



Grundwissen Physik

Release 0.4.4c

Aktualisiert am 24.03.2018

Bernhard Grotz

<http://www.grund-wissen.de>

Dieses Buch wird unter der [Creative Commons License \(Version 3.0, by-nc-sa\)](#) veröffentlicht. Alle Inhalte dürfen daher in jedem beliebigen Format vervielfältigt und/oder weiterverarbeitet werden, sofern die Weitergabe nicht kommerziell ist, unter einer gleichen Lizenz erfolgt, und das Original als Quelle genannt wird. Siehe auch:

[Erläuterung der Einschränkung by-nc-sa](#)
[Leitfaden zu Creative-Commons-Lizenzen](#)

Unabhängig von dieser Lizenz ist die Nutzung dieses Buchs für Unterricht und Forschung (§52a UrhG) sowie zum privaten Gebrauch (§53 UrhG) ausdrücklich erlaubt.

Der Autor erhebt mit dem Buch weder den Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Fehlerfreiheit; insbesondere kann für inhaltliche Fehler keine Haftung übernommen werden.

Die Quelldateien dieses Buchs wurden unter [Linux](#) mittels [Vim](#) und [Sphinx](#), die enthaltenen Graphiken mittels [Inkscape](#) erstellt. Der Quellcode sowie die Original-Graphiken können über die Projektseite heruntergeladen werden:

<http://www.grund-wissen.de>

Bei Fragen, Anmerkungen und Verbesserungsvorschlägen bittet der Autor um eine kurze Email an folgende Adresse:

info@grund-wissen.de

Augsburg, den 24. März 2018.

Bernhard Grotz

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Teilbereiche der Physik	1
Physikalisches Experimentieren	2
Größen und Einheiten	3
Mechanik	9
Körpereigenschaften	9
Masse	9
Volumen	10
Dichte	11
Aggregatzustand	13
Kinematik	14
Raumkurve und Massenpunkt	14
Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit	15
Bewegungen mit konstanter Beschleunigung	22
Wurfbewegungen	28
Kreisförmige Bewegungen	33
Dynamik	39
Mechanische Kräfte	39
Zusammenwirken mehrerer Kräfte	45
Arten mechanischer Kräfte	49
Drehmoment und Gleichgewicht	56
Drehmoment	56
Gleichgewicht	57
Schwerpunkt und Auflagefläche	58
Das Trägheitsmoment	60
Kraftwandler und Getriebe	63
Hebel	63
Flaschenzüge und Rollen	67
Schiefe Ebenen	69
Zahnräder und Getriebe	73
Arbeit, Leistung und Energie	76
Mechanische Arbeit	76
Wirkungsgrad	80
Mechanische Leistung	81
Mechanische Energie	83
Impuls und Drehimpuls	86
Der Impuls	86

Der Drehimpuls	90
Mechanik der Festkörper, Flüssigkeiten und Gase	91
Mechanik der Festkörper	91
Mechanik der Flüssigkeiten	100
Mechanik der Gase	123
Schwingungen und Wellen	127
Mechanische Schwingungen	127
Mathematische Beschreibung harmonischer Schwingungen	132
Mechanische Wellen	139
Mathematische Beschreibung von Wellen	148
Akustik	151
Eigenschaften von Schall	151
Schallquellen und Ausbreitung von Schall	151
Töne, Klänge und Geräusche	154
Schallintensität und Schallpegel	155
Doppler-Effekt	159
Optik	163
Ausbreitung des Lichts	163
Lichtquellen	163
Die Lichtgeschwindigkeit	164
Licht- und Beleuchtungsstärke	165
Die Lichtdurchlässigkeit	166
Blenden und Schatten	167
Reflexion von Licht	169
Der ebene Spiegel	169
Direkte und diffuse Reflexion	171
Gekrümmte Spiegel	171
Lichtbrechung	175
Das Brechungsgesetz	175
Optische Linsen	180
Linsensysteme	184
Brennweite und Brechkraft eines Linsensystems	184
Linsenfehler und Abhilfen	185
Der Abbildungsmaßstab und die Linsengleichung	186
Optische Geräte	187
Das Auge	187
Das Kepler-Fernrohr	191
Das Lichtmikroskop	192
Das Galilei-Fernrohr	193
Wellenoptik	194
Lichtbeugung und Interferenz	194
Lichtdispersion	200
Photometrie	201
Die Farbwahrnehmung des Menschen	201
Lichttechnische Einheiten	203
Funktionsprinzip von Spektrometern	206
Spektralanalyse	208

Wärmelehre	210
Temperatur und Wärme	210
Thermometer	211
Temperatur-Skalen	212
Wärmekapazität und Phasenübergänge	213
Wärmemenge und Wärmekapazität	213
Mischungsvorgänge	216
Phasenübergänge	217
Ausbreitung von Wärme	225
Die Wärmeleitung	225
Die Wärmeströmung	228
Die Wärmestrahlung	229
Ausdehnung bei Erwärmung	231
Ausdehnung von Festkörpern	231
Ausdehnung von Flüssigkeiten	233
Ausdehnung von Gasen	235
Die allgemeine Gasgleichung	238
Gasgemische und Partialdrücke	240
Die Van-der-Waals-Gleichung	241
Die kinetische Gastheorie	241
Die Hauptsätze der Wärmelehre	246
Erster Hauptsatz der Wärmelehre	247
Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre	249
Dritter Hauptsatz der Wärmelehre	255
Wärmekraftmaschinen	255
Kreisprozesse	256
Der Carnot-Prozess	256
Elektrizität und Magnetismus	257
Elektrische Ladung	257
Ladungstrennung	258
Ladungsausgleich und Ladungsnachweis	260
Stromstärke, Spannung und Widerstand	262
Die Stromstärke	263
Die elektrische Spannung	265
Der elektrische Widerstand	269
Elektrische Arbeit, Energie und Leistung	273
Elektrische Arbeit und Energie	273
Elektrische Leistung	274
Stromerzeugung und Stromverbrauch	275
Leiter, Halbleiter und Isolatoren	276
Leiter	276
Halbleiter	277
Isolatoren	280
Exkurs: Driftgeschwindigkeit von Elektronen	283
Elektrische Felder	284
Elektrische Feldstärke	285
Elektrisches Feld eines Plattenkondensators	286

Kapazität eines Plattenkondensators	290
Das Millikan-Experiment	291
Bewegung von geladenen Teilchen in elektrischen Feldern	293
Magnetismus	296
Permanentmagnete	296
Das Magnetfeld	298
Elektromagnete	299
Magnetische Feldstärke und magnetische Flussdichte	302
Die Lorentz-Kraft	303
Elektromagnetische Induktion	307
Atom- und Kernphysik	311
Atommodelle	311
Das Demokrit-Modell	311
Das Dalton-Modell	311
Das Thomson-Modell	312
Das Rutherford-Modell	313
Das Bohr-Modell	314
Die Sommerfeld-Erweiterung	315
Das Orbitalmodell	316
Das Schalenmodell	319
Aufbau der Materie	321
Elektronenhülle	322
Atomkern	322
Massendefekt	324
Radioaktivität	324
Stabilität von Atomkernen	325
Arten radioaktiver Strahlung	326
Nachweis radioaktiver Strahlung	328
Halbwertszeit und Aktivität	330
Ionendosis, Energiedosis und Äquivalentdosis	331
Experimente, Übungsaufgaben und Lösungen	333
Experimente	333
Experimente zur Mechanik	333
Experimente zur Akustik	352
Experimente zur Optik	353
Experimente zur Wärmelehre	359
Experimente zu Elektrizität und Magnetismus	365
Übungsaufgaben	371
Aufgaben zur Mechanik	371
Aufgaben zur Optik	392
Aufgaben zur Wärmelehre	395
Aufgaben zu Elektrizität und Magnetismus	398
Aufgaben zur Atom- und Kernphysik	401
Lösungen	401
Lösungen zur Mechanik	401
Lösungen zur Optik	448
Lösungen zur Wärmelehre	454

Lösungen zu Elektrizität und Magnetismus	462
Lösungen zur Atom- und Kernphysik	468
Tabellen	469
Symbole und Einheiten	472
Naturkonstanten	474
Materialabhängige Größen	476
Periodensystem der Elemente	479
Links und Quellen	481
Literaturverzeichnis	484
Stichwortverzeichnis	486

Einleitung

Früher hieß „Physik“ die Lehre von der ganzen Natur (*physis* = griech. Natur). Heute geht es in der Physik um das Studium der unbelebten Natur ohne chemische Veränderungen – Biologie und Chemie haben sich selbst zu großen Wissenschaftsbereichen entwickelt.

Teilbereiche der Physik

Die Physik kann ihrerseits in weitere Teilbereiche untergliedert werden. Hierbei unterscheidet man für gewöhnlich die „klassische“ Physik (Mechanik, Akustik, Optik und Wärmelehre) von der „modernen“ Physik. Letztere ist meist mit großem theoretischem und experimentellem Aufwand verbunden, so dass sie im Rahmen dieses Buchs nur knapp behandelt werden kann.

Klassische Physik Die klassische Physik ab dem 17. bis zum 19. Jahrhundert wurde stark durch Isaac Newton geprägt. Hierzu zählen unter anderem die Teilbereiche *Mechanik*, *Akustik*, *Optik* und *Wärmelehre*. In diesen Bereichen sind Beobachtungen oftmals direkt mit menschlichen Sinnen möglich.

In den weiteren Teilbereichen *Elektrizitätslehre* und *Magnetismus*, die ebenfalls zur „klassischen“ Physik gezählt werden, sind viele Vorgänge trotz oft alltäglichen Erfahrungen nicht direkt mit menschlichen Sinnen wahrnehmbar.

Moderne Physik Durch die Arbeiten von Albert Einstein (Relativitätstheorie), Erwin Schrödinger und Werner Heisenberg (Quantentheorie) und anderen wurde im 20. Jahrhundert die „moderne“ Physik begründet.

Hierzu zählen unter anderem die *Atom-, Kern- und Teilchenphysik*, die Quantentheorie, die Relativitätstheorie sowie die Festkörperphysik. Direkte Beobachtungen von Vorgängen sind hierbei mit menschlichen Sinnen (meist) unmöglich; teilweise sind sehr aufwendige Experimente nötig.

Sowohl Newton als auch Einstein haben mit ihren wissenschaftlichen Arbeiten jeweils die vorherrschenden Weltbilder maßgeblich beeinflusst. Beispielsweise vertrat Newton entgegen der bis dahin vorherrschenden Meinung die Ansicht, dass die Erde sich um die Sonne bewege und nicht umgekehrt. Einstein wiederum vertrat die Ansicht, dass es kein absolutes Bezugssystem (keinen „Äther“) gebe, also nur die *relative* Bewegung von Objekten von Bedeutung sei; aus den daraus resultierenden Folgerungen ist unter anderem die Urknall-Theorie entstanden.

Bis heute gibt es in allen Forschungsbereichen neue Erkenntnisse. Beispielsweise haben Forscher im Jahr 2014 publiziert, dass Wasser *zwei* flüssige Phasen haben kann.¹ Ob dies tatsächlich so ist, welche Erklärungen hierfür gefunden werden können und welche Konsequenzen diese Erkenntnis wohl haben wird, kann bis heute niemand mit Gewissheit sagen..

Physikalisches Experimentieren

Um naturwissenschaftliche Zusammenhänge „mit allen Sinnen“ erfahren zu können, lassen sich zu vielen Themen gezielt Experimente durchführen. Versuche, die unter gleichen Bedingungen stets gleiche Ergebnisse liefern, bilden die Basis für das Formulieren von Gesetzmäßigkeiten und für technische Anwendungen.

In vielen Fällen laufen Experimente nach folgendem Schema ab:

- **Beobachten:** Aus unseren alltäglichen Erfahrungen haben wir eine Vorstellung von Naturerscheinungen.

Beispiele:

Ein Regenbogen, ein Gewitter, das Gefrieren und Schmelzen von Wasser, das Schwimmen von Holz in Wasser, das Tönen einer Glocke, das Fallen eines Körpers. . . all diese Vorgänge wiederholen sich unter gleichen Bedingungen immer wieder auf die gleiche Art und Weise.

Was passiert allerdings, wenn sich einige Bedingungen ändern?

- **Fragen:** Wie entsteht ein Blitz? Warum kommt ein in die Höhe geworfener Stein auf die Erde zurück? Wie funktioniert eine Glühbirne, ein Auto, oder ein Fernseher?

Wie bei einem Puzzle lassen sich viele Antworten leicht(er) finden, wenn das Wissen um die einzelnen „Bausteine“ und ihrer Zusammensetzung vorhanden ist.

- **Experimentieren:** Mit Versuchen lassen sich einzelne Zusammenhänge in einer geeigneten Umgebung gezielt untersuchen. Während eines Versuchs wird sorgfältig beobachtet, gemessen und protokolliert. Die Ergebnisse eines Experiments können dann die eigene Vermutung bestätigen oder widerlegen.

In der Physik werden Zustandsänderungen von Objekten untersucht, in der Chemie Reaktionen chemischer Stoffe.

- **Naturgesetz(e) formulieren:** Lassen sich physikalische Vorgänge unter gleichen Bedingungen zu jeder Zeit wiederholen, so lassen sich nach Auswertung der Ergebnisse allgemein gültige Aussagen folgender Art formulieren:

„Falls diese und jene Bedingung gegeben ist, dann wird diese und jene Wirkung eintreten!“

¹ Die *Original-Mitteilung* (en.) stammt von einem Forscher-Team der Universität Utrecht, der zugehörige Artikel ist im renommierten Nature-Magazin erschienen.

Die Darstellung physikalischer Gesetze (Ursache und Wirkung) kann qualitativ in Worten oder quantitativ in mathematischer Form erfolgen. Eine Darstellung in mathematischer Form ist oft aussagekräftiger, erfordert allerdings eine Messbarkeit der entsprechenden Größen.

Größen und Einheiten

Maßeinheiten spielen in der Physik eine wichtige Rolle:

- Jede physikalische Größe entspricht einer messbaren Eigenschaft eines Objekts oder Zustands, beispielsweise Länge, Masse, Zeit, Geschwindigkeit, Energie, Temperatur usw.
- Jede physikalische Größe setzt sich aus einem Zahlenwert und einer Maßeinheit zusammen:

$$\boxed{\text{Physikalische Größe} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit}}$$

Physikalische Größen werden üblicherweise mit lateinischen oder griechischen Buchstaben in kursiver Schrift bezeichnet, Einheiten hingegen sollten zur optischen Unterscheidung nicht-kursiv geschrieben werden. In der Formeldarstellung schreibt man für eine Größe a auch folgendes:

$$a = \{a\} \cdot [a]$$

Handelt es sich beispielsweise bei der physikalischen Größe um die Masse m eines Objekts, so ist $[m] = \text{kg}$, falls die Masse in der Einheit „Kilogramm“ angegeben wird. Wiegt das Objekt 5,0 Kilogramm, so ist für dieses Objekt $\{m\} = 5,0$; insgesamt kann man also in diesem Fall $m = 5,0 \text{ kg}$ schreiben (das Mal-Zeichen zwischen Zahlenwert und Einheit wird üblicherweise nicht explizit geschrieben).

- Größen können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie in ihren Einheiten übereinstimmen. Zuerst müssen also einzelne Einheiten gegebenenfalls passend umgerechnet werden.
- Größen können stets miteinander multipliziert oder durcheinander dividiert werden. Das Ergebnis ergibt sich durch die Anwendung der Rechenvorschrift sowohl auf die Zahlenwerte als auch auf die Einheiten der einzelnen Größen.

Beispiele:

- Die Addition von 1,0 m plus 70 cm kann man auch als $1,0 \text{ m} + 0,70 \text{ m}$ schreiben; das Ergebnis ist dann 1,7 m.
- Bewegt man sich um eine 1,5 m je 1 s weiter, so beträgt die Geschwindigkeit $\frac{1,5 \text{ m}}{1,0 \text{ s}} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Wirkt auf eine Kurbel eine Kraft von 40 N im Abstand von 0,3 m von der Drehachse in senkrechter Richtung ein, so bewirkt diese ein Drehmoment von $40 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m} = 12 \text{ Nm}$.

Skalare und vektorielle Größen

Manche physikalische Größen, beispielsweise Masse und Temperatur, haben keine räumliche Vorzugsrichtung, ihre Wirkung ist also in allen Richtungen des Raumes gleich. Durch die Angabe *eines* Zahlenwerts und der zugehörigen Maßeinheit werden solche so genannten „skalaren“ Größen hinreichend beschrieben.

Skalare Größen sind beispielsweise Masse, Temperatur, Volumen, elektrische Ladung, und andere.

Andere physikalische Größen, beispielsweise Kraft und Geschwindigkeit, besitzen stets eine eindeutige Richtung im Raum. In Zeichnungen werden derartige Größen durch Pfeile (**Vektoren**), in physikalischen Formeln durch einen kleinen Pfeil über dem Formelsymbol dargestellt. Im dreidimensionalen Raum sind letztlich auch *drei* Zahlenwerte und die zugehörige Maßeinheit nötig, um die physikalische Wirkung dieser so genannten „vektoriellen“ Größen in die jeweiligen Raumrichtungen hinreichend zu beschreiben.²

Vektorielle Größen sind beispielsweise Kraft, Beschleunigung, Geschwindigkeit, und andere.

Internationale Einheiten

Durch Verwendung von klar festgelegten Maßeinheiten lassen sich Messergebnisse auch zu einer anderen Zeit, an einem anderen Ort und/oder in einer anderen Sprache nachvollziehen und vergleichen.

Im Jahr 1960 wurden auf einer Fachtagung folgende sieben Einheiten als internationales Einheitensystem festgelegt (Système international d' unités, kurz: SI):

Tab. 1: SI-Basiseinheiten

Größe	Einheit	Einheitsbezeichnung
Länge	m	Meter
Zeit	s	Sekunde
Masse	kg	Kilogramm
Temperatur	K	Kelvin
Elektr. Stromstärke	A	Ampere
Lichtstärke	cd	Candela
Stoffmenge	mol	Mol

Aus diesen sieben „SI-Einheiten“ lassen sich die weiteren (für die Praxis ebenso relevanten) Einheiten nur mittels Multiplikation oder Division herleiten.

Eine Übersicht zu in Deutschland und international anerkannten Einheiten und ihren Umrechnungen gibt es gratis als [Broschüre \(PDF\)](#) von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt.

² Bisweilen wird die Zeit als „vierte Komponente“ einer vektoriellen Größe auch der zeitliche Verlauf mit berücksichtigt; man kann das Ergebnis dann nicht mehr als einzelnes „Bild“ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem vorstellen, sondern vielmehr als „Film“ einer Vielzahl solcher aufeinander folgender Bilder.

Zehnerpotenzen

Je nach Untersuchungsgegenstand können sich die Zahlenwerte von Messergebnissen um etliche Größenordnungen unterscheiden – beispielsweise besitzt ein Planet eine erheblich größere Masse als ein einzelnes Atom, und ein Isolator einen um ein Vielfaches größeren elektrischen Widerstand als ein Leiter. Um dennoch die üblichen Maßeinheiten nutzen zu können – beispielsweise die Masse eines Körpers in Kilogramm anzugeben – hat man der Übersichtlichkeit halber so genannte „Zehnerpotenzen“ eingeführt. Hierbei gilt beispielsweise:

$$10^3 = 1000$$

$$10^2 = 100$$

$$10^1 = 10$$

$$10^0 = 1$$

Der letzte Ausdruck $10^0 = 1$ wurde willkürlich festgelegt; diese Festlegung bringt allerdings den Vorteil mit sich, dass man die Anzahl an Nullen des Ergebnisses unmittelbar anhand des Exponenten ablesen kann.

Bei der Angabe von Zehnerpotenzen sind auch negative Exponenten üblich, also beispielsweise:

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^{-2} = 0,01$$

$$10^{-3} = 0,001$$

Anstelle 10^{-1} könnte man auch $\frac{1}{10^1}$ schreiben, das Minuszeichen im Exponenten deutet somit lediglich darauf hin, dass die jeweilige (Zehner-)Potenz im Nenner steht.³ Die Zahl im Exponent gibt wiederum an, wie viele Nullen im Ergebnis vorkommen; nach der ersten Null muss dabei jeweils das Komma gesetzt werden.

Für die einzelnen Zehnerpotenzen gibt es sprachliche Abkürzungen, beispielsweise steht die Vorsilbe „kilo“ für den Faktor 1000 beziehungsweise 10^3 ; somit kann man beispielsweise für 1000 g auch $1 \cdot 10^3 \text{ g} = 1 \text{ kg}$ schreiben. Einige solcher Potenzen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

³ Auch bei Einheiten wird bisweilen diese Schreibweise genutzt, also beispielsweise $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ anstelle von $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ geschrieben. Der Vorteil dieser Schreibweise bei Einheiten liegt darin, dass man somit keine „gequetschten“ Brüche in den Fließtext (oder in eine Tabellenzeile) einfügen muss.

Tab. 2: Zehnerpotenzen

Vorsilbe	Kurzzeichen	Faktor	Kurzschreibweise
Exa	E	1 000 000 000 000 000 000	$1 \cdot 10^{18}$
Peta	P	1 000 000 000 000 000	$1 \cdot 10^{15}$
Tera	T	1 000 000 000 000	$1 \cdot 10^{12}$
Giga	G	1 000 000 000	$1 \cdot 10^9$
Mega	M	1 000 000	$1 \cdot 10^6$
Kilo	k	1 000	$1 \cdot 10^3$
Hekto	h	100	$1 \cdot 10^2$
Deka	da	10	$1 \cdot 10^1$
		1	$1 \cdot 10^0$
Dezi	d	0,1	$1 \cdot 10^{-1}$
Zenti	c	0,01	$1 \cdot 10^{-2}$
Milli	m	0,001	$1 \cdot 10^{-3}$
Mikro	μ	0,000 001	$1 \cdot 10^{-6}$
Nano	<i>unitin</i>	0,000 000 001	$1 \cdot 10^{-9}$
Piko	p	0,000 000 000 001	$1 \cdot 10^{-12}$
Femto	f	0,000 000 000 000 001	$1 \cdot 10^{-15}$
Atto	a	0,000 000 000 000 000 001	$1 \cdot 10^{-18}$

Ein wesentlicher Vorteil von Zehnerpotenzen liegt darin, dass sie sich aufgrund der Beziehung $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ einfach miteinander verrechnen lassen. Um beispielsweise eine Längenangabe von Dezimeter (dm = 10^{-1} m) in Millimeter (mm = 10^{-3} m) umzurechnen, genügt es, den jeweiligen Zahlenwert mit $10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2$ zu multiplizieren. Hierfür gibt es bei vielen Taschenrechnern sogar eine eigene Taste, die mit 10^x oder mit EXP gekennzeichnet ist, und einige Tipparbeit ersparen kann.⁴ Durch die Verwendung von Zehnerpotenzen bleibt einem auch das „Komma-Schieben“ (mitsamt der möglichen Fehlerquelle, dass mal eine Null übersehen wird) erspart.

Ein weiterer Vorteil bei der Verwendung von Zehnerpotenzen besteht darin, dass wegen der Beziehung $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ auch Umrechnungen von quadratischen oder kubischen Einheiten leicht vorgenommen werden können: Man ersetzt die jeweilige Vorsilbe durch die jeweilige Zehnerpotenz, und potenziert anschließend sowohl die Einheit als auch den Vorfaktor.

Beispiele:

- Wie viele Quadrat-Millimeter entsprechen einem Quadrat-Meter?

Für die Umrechnung zwischen m und mm gilt:

$$1 \text{ m} = 1 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

Somit gilt für einen Quadrat-Meter:

$$(1 \text{ m})^2 = 1 \cdot (10^3 \text{ mm})^2 = 1 \cdot (10^3)^2 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$$

⁴ Die bisweilen anzutreffende Tasten-Bezeichnung EXP ist eine Kurzschreibweise für „ $\cdot 10^x$ “. In noch kürzerer Form wird diese Schreibweise auch in Programmiersprachen verwendet; beispielsweise kann in Python die Zahl 1500 auch als 1.5e3 eingegeben werden.

Bei der Umwandlung wird zunächst die umzurechnende Einheit in Klammern gesetzt und die Zehner-Vorsilbe durch die entsprechende Zehnerpotenz ersetzt; anschließend wurden sowohl die Zehnerpotenz wie auch die Einheit quadriert.

- Welcher Bruchteil eines Kubik-Meters ist ein Kubik-Zentimeter?

Für die Umrechnung zwischen cm und m gilt:

$$1 \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Somit gilt für einen Kubik-Meter:

$$(1 \text{ cm})^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 1 \cdot (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Die Umrechnung in der jeweils anderen Richtung funktioniert ebenso; der „Umrechnungsfaktor“ bleibt gleich, der Exponent der Zehnerpotenz hat dann lediglich ein umgekehrtes Vorzeichen.

Messfehler

Physikalische Messungen erfolgen durch ein Vergleichen der zu messenden Größe mit einer in der entsprechenden Einheit geeichten Skala (Meterstab, Waage, Thermometer, Volt- und Amperemeter, usw). Häufig werden elektrische Messverfahren angewendet, welche die Messergebnisse mittels digitaler Anzeigen einfach ablesbar machen.

Dennoch muss stets beachtet werden, dass die ermittelten Messwerte fehlerhaft sein können. Man unterscheidet prinzipiell zwischen systematischen und zufälligen („statistischen“) Messfehlern:

- *Systematische* Fehler ergeben sich aus einer falsch eingestellten Messapparatur. Ist beispielsweise ein Thermometer falsch kalibriert, so weicht die angezeigte Temperatur unweigerlich von der tatsächlichen Temperatur ab.

Systematische Fehler treten bei jeder wiederholten Messung erneut auf, oftmals sorgen sie für eine konstante Abweichung vom tatsächlichen Wert (wenn beispielsweise die Skala eines Lineal bei 1 mm statt 0 mm beginnt).

- *Statistische* Fehler lassen sich auf Schwankungen der zu messenden Größe bei punktuellen Messungen mit Messfühlern, Messverzögerungen sowie Ablesungenauigkeiten (bei nicht-digitalen Anzeigen) beziehungsweise ungenaue elektronische Sensoren (bei digitalen Messgeräten) zurückführen.

Für jede einzelne Messung gilt also:

$$\boxed{\text{Messwert} = \text{Tatsächlicher Wert} \pm \text{systematische Fehler} \pm \text{statistische Fehler}}$$

oder kürzer:

$$\boxed{\text{Messwert} = \text{Tatsächlicher Wert} \pm \text{Fehler}}$$

Eine derartige explizite Darstellung eines Messergebnisses stellt letztlich eine Wahrscheinlichkeitsaussage dar. Üblicherweise wird damit gemeint, dass sich der tatsächliche Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% innerhalb des Intervalls [Messwert – Fehler; Messwert + Fehler] befindet.

Systematische Fehler treten bei jeder Messung erneut auf; sie können durch geschickte experimentelle Methoden minimiert und teilweise sogar komplett vermieden werden. Zufällige Fehler lassen sich nie komplett vermeiden; man versucht sie durch wiederholte Messungen und statistische Methoden möglichst gering zu halten.

Mechanik

Mechanik ist die Wissenschaft der physikalischen Eigenschaften von Körpern, der Bewegungszustände und deren Ursache – der Kräfte.

Körpereigenschaften

Alle physikalischen Körper, also räumlich begrenzte Materieformen, bestehen aus Stoffen und besitzen gemeinsame physikalische Eigenschaften. Umgangssprachlich bezeichnet man physikalische beziehungsweise geometrische Körper häufiger als „Objekte“.

Masse

Jedes physikalische Objekt besteht aus Materie; jeder Materie-Baustein wiederum „wiegt“ etwas, so dass jedes physikalische Objekt auch stets eine gewisse Masse m als charakteristische Eigenschaft aufweist.

Einheit:

Die Masse eines Objekts wird meist in Kilogramm (kg) angegeben. Weitere gebräuchliche Einheiten sind die Tonne (t) und das Gramm (g).

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$$

Die Masse m eines Objekts kann man an seiner Schwere beziehungsweise an seiner Trägheit erkennen:

- Die Eigenschaft „Schwere“ gibt an, wie sehr ein Objekt in der Lage ist, sich selbst oder einen anderen Gegenstand im Gravitationsfeld eines Planeten zu beschleunigen. Als anschauliches Beispiel kann man an die „Gewichte“ einer Kuckucksuhr denken, die beim Herabsinken in der Lage sind, die Zeiger der Uhr anzutreiben.¹

¹ „Gewicht“ und „Schwere“ sind nahezu gleichwertige Begriffe:

- Mit dem Begriff „Gewicht“ gibt man die Kraft an, die ein ruhendes, beispielsweise am Boden liegendes Objekt aufgrund seiner Masse im Gravitationsfeld eines Planeten aufweist.
- Mit dem Begriff „Schwere“ bezeichnet man die (beschleunigende) Kraft, die auf ein frei bewegliches Objekt im Gravitationsfeld eines Planeten wirkt.

Die Unterscheidung zwischen „Schwere“ und „Gewicht“ ist somit vor allem sprachlicher Natur; beide Begriffe betonen, dass mit dem Vorhandensein von Masse stets auch *Gravitationskräfte* vorhanden sind.

- Die Eigenschaft „Trägheit“ gibt an, wie sehr sich ein Objekt einer von außen einwirkenden Kraft widersetzt; man kann die „Trägheit“ eines Objekts somit als „Widerstand gegen Beschleunigung“ auffassen.

Im Rahmen seiner Relativitätstheorie konnte Albert Einstein zeigen, dass beide Eigenschaften stets im gleichen Maß vorhanden sind; es muss somit nicht explizit zwischen schwerer und träger Masse unterschieden werden.

Volumen

Jedes Objekt besitzt ein Volumen V , also eine räumliche Ausdehnung.

Einheit:

Das Volumen V eines Objekts wird meist in Kubikmeter (m^3) angegeben. Weitere gebräuchliche Einheiten sind der Liter ($1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$) und der Kubikzentimeter (cm^3):

$$1\text{ m}^3 = 10 \times 10 \times 10\text{ dm}^3 = 1000\text{ l}$$

$$1\text{ l} = 10 \times 10 \times 10\text{ cm}^3 = 1000\text{ cm}^3$$

Ein Liter entspricht einem Kubik-Dezimeter, also einem Würfel von $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ Kantenlänge.

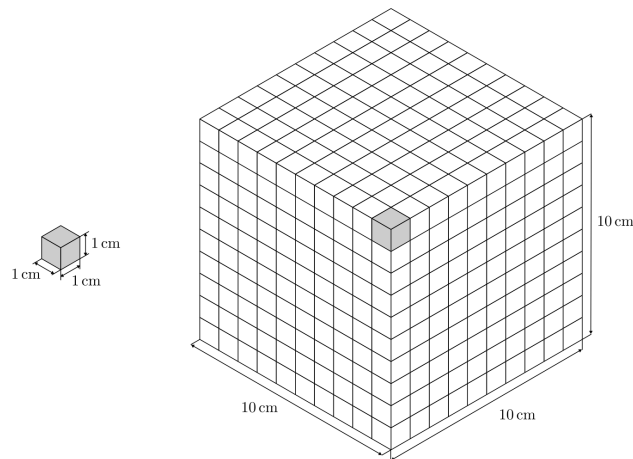


Abb. 1: Ein Kubikzentimeter und ein Kubikdezimeter (Liter) im Vergleich.

Zur Bestimmung des Volumens eines Objekts können folgende Methoden angewendet werden:

- Das Volumen eines festen, *regelmäßig* geformten Objekts kann durch geometrische Berechnung bestimmt werden. Dazu müssen die charakteristischen Längen der jeweiligen Form gemessen werden.
- Das Volumen eines festen, *unregelmäßig* geformten Objekts kann durch Flüssigkeitsverdrängung ermittelt werden.

- Das Volumen von Flüssigkeiten kann mit Messzylindern gemessen werden
- Gase verteilen sich gleichmäßig in dem zur Verfügung stehenden Raum. Das Volumen eines Gases kann daher bestimmt werden, indem das Volumen des vom Gas ausgefüllten Raumes gemessen wird.

Dichte

Die Dichte ρ eines Gegenstands gibt an, welche Masse m er bei einem bestimmten Volumen V besitzt.

Definition:

Die Dichte ρ eines Objekts ist gleich dem Verhältnis aus seiner Masse m und seinem Volumen V :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

Einheit:

Verwendet man Standard-Einheiten, so ergibt sich als Einheit für die Dichte Kilogramm je Kubikmeter (kg/m^3). Eine weitere gebräuchliche Einheit ist Gramm je Kubik-Zentimeter (g/cm^3):

$$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 100 \times 100 \times 100 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} = 1\,000\,000 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Folgende Dichte-Einheiten können als gleichwertig verwendet werden:

$$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$$

Experimentell kann die Dichte eines Festkörpers bestimmt werden, indem man seine Masse mit Hilfe einer Waage bestimmt und sein Volumen durch Eintauchen in eine Flüssigkeit ermittelt. Nach dem Archimedischen Prinzip verdrängt jeder Gegenstand beim Eintauchen ebenso viel Flüssigkeit, wie er selbst an Volumen hat. Teilt man den Wert der Masse durch den Wert des Volumen, so erhält man die Dichte des Objekts.

Stoff	Dichte in kg/m^3
Aluminium	2700
Blei	11340
Eis	900
Glas	ca. 2500
Gold	19300
Hartgummi	ca. 1300
Holz	500 bis 1200
Kork	200
Kupfer	8900
Schaumstoff	150
Silber	10500
Stahl	7800

Die Dichte einer Flüssigkeit kann am einfachsten mit einem *Aräometer* gemessen werden: Je kleiner die Dichte der Flüssigkeit ist, desto weiter taucht das Aräometer in die Flüssigkeit ein. An der Skala des eintauchenden Aräometers kann die Dichte der Flüssigkeit somit direkt abgelesen werden.

Stoff	Dichte in kg/m^3
Ethanol	790
Glycerin	1260
Leichtbenzin	700
Petroleum	810
Quecksilber	13600
Schmieröl	900
Schwefelsäure	1836
Wasser (bei 4°C)	1000

Die Dichte von Gasen hängt stark vom Druck und von der Temperatur ab. Um die Dichten verschiedener Gase dennoch vergleichen zu können, werden die entsprechenden Werte für Normalbedingungen, also Druck $p = 1 \text{ bar}$ und $T = 0^\circ\text{C}$, angegeben.

Stoff (bei 0°C)	Dichte in kg/m^3
Chlor	3,21
Helium	0,18
Kohlenstoffdioxid	1,98
Luft	1,29
Methan	0,72
Wasserstoff	0,09
Xenon	5,90

Durchschnittliche Dichte

Besteht ein Gegenstand aus mehr als einem Material, so setzt sich seine durchschnittliche Dichte aus den jeweiligen Massen- und Volumenanteilen zusammen:

$$m_{\text{ges}} = m_1 + m_2 + \dots$$

$$\rho_{\text{ges}} \cdot V_{\text{ges}} = \rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2 + \dots$$

Teilt man beide Seiten der Gleichung durch V_{ges} , so erhält man für die durchschnittliche Dichte ρ_{ges} des Objekts:

$$\rho_{\text{ges}} = \frac{m_1 + m_2 + \dots}{V_{\text{ges}}} = \frac{\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

Da die Masse von Gasen gegenüber der von Festkörpern meist vernachlässigbar klein ist, kann die obige Formel beispielsweise genutzt werden, um den „Luftanteil“ eines porösen Gegenstands zu bestimmen.

Aggregatzustand

Da Objekte aus chemischen Stoffen bestehen und diese im festen, flüssigen und gasförmigen Aggregatzustand auftreten können, unterscheidet man entsprechend auch zwischen Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen.

Je nach Aggregatzustand zeigen Objekte ein unterschiedliches Volumen- und Formverhalten:

- Im festen Zustand sind die Atome einer Substanz in Kristallgittern oder Makromolekülen fest an ihre Plätze gebunden und können nur Schwingungen um ihre jeweilige Position ausführen.
- Im flüssigen Zustand können sich die einzelnen Atome beziehungsweise Moleküle innerhalb der Flüssigkeit frei bewegen. Der Austritt aus der Flüssigkeit wird jedoch durch zwischenmolekulare Kräfte stark erschwert.
- Im gasförmigen Zustand spielen zwischenmolekulare Kräfte so gut wie keine Rolle; die Atome beziehungsweise Moleküle können sich frei bewegen.

Tab. 3: Aggregatzustände und ihre Eigenschaften

Aggregatzustand	Fest	Flüssig	Gasförmig
Typisches Beispiel	Metall	Wasser	Luft
Volumen	Bestimmt	Bestimmt	Angepasst an Gefäßvolumen
Form	Bestimmt	Bestimmt	Angepasst an Gefäßform
Abstand zwischen Teilchen	Klein	Klein	Sehr groß
Verschiebbarkeit der Teilchen	Klein	Groß	Sehr groß
Kompressibilität	Sehr gering	Sehr gering	Sehr groß

In welchem Aggregatzustand ein Material vorliegt, hängt vom Druck und von der Temperatur ab; im Abschnitt *Phasenübergänge* wird hierauf näher eingegangen.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Kinematik

Die Kinematik ist das Teilgebiet der Physik, in dem unterschiedliche Bewegungen, also Ortsveränderungen von Körpern gegenüber einem Bezugspunkt, untersucht werden.

Raumkurve und Massenpunkt

Eine Bewegung entspricht einer Ortsveränderung eines Objekts *relativ* zu einem anderen, als ruhend angenommenen Objekt beziehungsweise Standpunkt – dieser entspricht normalerweise dem Ort des Beobachters.

Die Raumkurve

Je nach der Form der Bewegung (beispielsweise geradlinig, kreisförmig, innerhalb einer Ebene oder räumlich) wird zur physikalischen Beschreibung der Bewegung ein geeignetes Koordinatensystem („Bezugssystem“) gewählt. Im Ursprung des Koordinatensystems steht meistens der als ruhend angenommene Beobachter. Das beobachtete Objekt durchläuft bezüglich dieses Zentrums eine ein-, zwei- oder dreidimensionale Raumkurve („Trajektorie“).

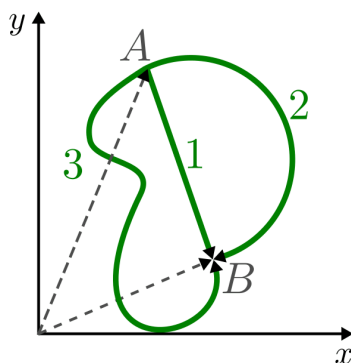


Abb. 2: Mögliche Raumkurven einer zweidimensionalen Bewegung von A nach B aus der Vogelperspektive: Geradlinig (1), kreisförmig (2) und krummlinig (3).

Der Massenpunkt

In vielen Fällen ist die physikalische Beschreibung einer Bewegung einfacher, wenn man sich das beobachtete Objekt als einen einzelnen Punkt im Koordinatensystem vorstellt.

Dieser „Massenpunkt“ wird dabei so behandelt, als ob er die gesamte Masse des Objekts besäße – meist wird daher der *Schwerpunkt* des Objekts als Massenpunkt ausgewählt.¹

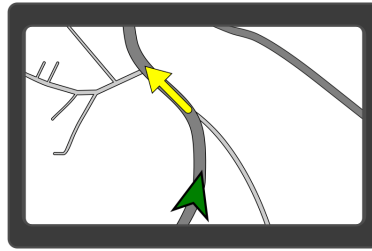


Abb. 3: Bei GPS-Geräten gilt der Beobachter als der „ruhende“ Bezugspunkt – aus dieser Perspektive bewegt sich die Welt an ihm vorbei.

Neben der Verschiebung des Schwerpunkts („Translation“) kann auch eine Drehung („Rotation“) des Objekts um dieses Zentrum stattfinden. Tritt eine Kombination beider Bewegungsformen auf, so können diese unabhängig voneinander betrachtet und die jeweiligen Effekte addiert werden; man spricht in diesem Fall von einer „Überlagerung“ von Bewegungsvorgängen. In den folgenden Abschnitten werden die zur Beschreibung von allgemeinen Bewegungsvorgängen nötigen Formeln und Überlegungen vorgestellt, wobei zunächst von einfachen Modellen ausgegangen wird und diese dann schrittweise erweitert werden.

Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

Im folgenden Abschnitt werden zunächst anhand von eindimensionalen Bewegungen einige grundlegende Konzepte zur mathematischen Beschreibung von Bewegungsvorgängen vorgestellt; diese werden dann auf zwei- beziehungsweise dreidimensionale Vorgänge übertragen.

Eindimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

Eine geradlinige Bewegung stellt die einfachste Variante eines Bewegungsvorgangs dar: Es genügt bereits eine einzelne Raumachse als Koordinatensystem. Hat man (willkürlich, aber verbindlich) den Nullpunkt sowie die Richtung der Koordinatenachse einmalig festgelegt, so genügt folglich eine einzige Längenangabe s , um den Ort des Objekts bezüglich des Koordinatenursprungs exakt angeben zu können:

- Hat der Ort s einen positiven Wert, so befindet sich das Objekt um den entsprechenden Wert entlang der als positiv gewählten Raumrichtung vom Koordinatenursprung entfernt.
- Hat der Ort s einen negativen Wert, so befindet sich das Objekt um den entsprechenden Wert entgegen der als positiv gewählten Raumrichtung vom Koordinatenursprung entfernt.

¹ In der Kinematik werden die zur Bewegung beziehungsweise Beschleunigung eines Objekts nötigen Kräfte nicht weiter betrachtet, sondern nur die Bewegung des Objekts selbst. Die Berücksichtigung der wirkenden Kräfte ist Aufgabe der so genannten *Dynamik*, welche auf der Kinematik aufbaut.

Bei Bewegungsvorgängen ändert sich der Ort s des Objekts im zeitlichen Verlauf; man schreibt daher häufig auch explizit $s(t)$, um die Abhängigkeit des Ortes s von der Zeit t auszudrücken.

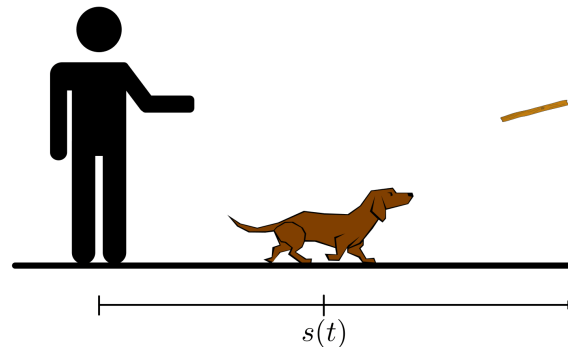


Abb. 4: Die Bewegung eines Hundes, der einem Stöckchen naheht oder es zurückbringt, kann in guter Näherung als geradlinige Bewegung aufgefasst werden.

Die Δ -Schreibweise

Das Symbol s wird nicht nur für Ortsangaben verwendet, sondern ebenfalls um zurückgelegte Wegstrecken anzugeben. In diesem Fall wählt man allerdings bevorzugt die Schreibweise Δs , um Verwechslungen zu vermeiden. Das Δ -Symbol (ein griechisches „Delta“) steht dabei für „Differenz“ – gemeint ist damit, inwiefern sich der Wert von s_{end} am Ende des Bewegungsvorgangs von dem Wert s_{start} zu Beginn des Bewegungsvorgangs unterscheidet:

$$\begin{aligned}\Delta s &= s_{\text{end}} - s_{\text{start}} \\ &= s - s_0\end{aligned}$$

Dass bei dieser Konvention der Startwert (meist mit s_0 bezeichnet) vom Endwert (meist mit s bezeichnet) abgezogen wird, hat folgenden Grund:

- Ist der Anfangswert s_0 kleiner als der Endwert s , so verläuft die Bewegung entlang der als positiv definierten Bewegungsrichtung.
- Ist umgekehrt der Endwert s kleiner als der Anfangswert s_0 , so verläuft die Bewegung in Richtung der negativen Koordinatenachse.

Gilt für den Startwert $s_0 = 0$, so beginnt die Bewegung am Nullpunkt des Koordinatensystems, und für den Zeitpunkt t gilt $\Delta s = s - s_0 = s$. In diesem Fall stimmt somit zu einem Zeitpunkt t der Ort $s(t)$ mit der zurückgelegten Wegstrecke Δs überein, und das Δ kann weggelassen werden; im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall.

Die gleiche Δ -Schreibweise wird auch für einzelne Zeitabschnitte verwendet; auch hier gilt beispielsweise $\Delta t = t_{\text{end}} - t_{\text{start}}$. Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass man einen Vorgang in verschiedenen Zeitabschnitten $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_1$, usw. unterteilen kann, sofern in diesen beispielsweise unterschiedliche Geschwindigkeiten oder Bewegungsrichtungen vorliegen; eine komplexe Aufgabenstellung kann so in mehrere einfacher zu lösende Teile zerlegt werden.

Definition von Geschwindigkeit

Bewegt sich ein Objekt mit konstanter Geschwindigkeit, so legt es in gleichen Zeitabschnitten die jeweils gleiche Wegstrecke zurück.

Definition:

Die Geschwindigkeit v eines sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Objekts ist gleich dem Verhältnis aus der zurückgelegten Wegstrecke Δs und der dazu benötigten Zeit Δt :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2)$$

Einheit:

Die Geschwindigkeit wird meist in Kilometer je Stunde (km/h) oder in Meter je Sekunde (m/s) angegeben.

Beispiele:

- Licht legt in einer Sekunde 300 000 km zurück. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt somit 300 000 000 m/s .
- Eine Schnecke legt in einer Sekunde etwa 0,8 mm zurück. „Schneckentempo“ entspricht somit ungefähr 0,0008 m/s .

Umrechnung von km/h in m/s

Sowohl km/h als auch m/s sind als Geschwindigkeits-Einheiten üblich. Um sie ineinander umzurechnen, kann man folgende Zusammenhänge nutzen:

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1000 \text{ m} \\ 1 \text{ h} &= 60 \text{ min} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3600 \text{ s} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

und umgekehrt:

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (3)$$

Ein Spaziergänger beispielsweise, der sich mit knapp 5 km/h bewegt, legt also in einer Sekunde etwas mehr als einen Meter zurück.

Ort und zurückgelegte Wegstrecke

Der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit kann allgemein in Form eines $v(t)$ -Diagramms dargestellt werden. Hierbei wird der Betrag der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit wie der Graph einer mathematischen Funktion in ein zweidimensionales Koordinatensystem eingezeichnet.

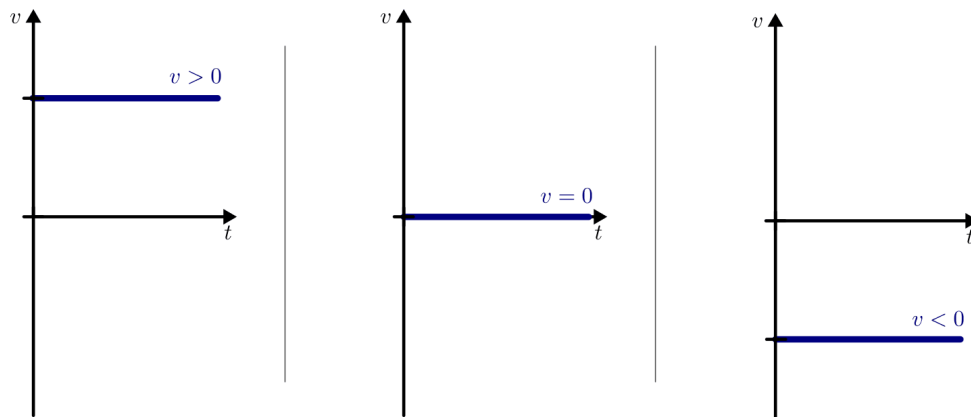


Abb. 5: $v(t)$ -Diagramme einer konstanten Geschwindigkeit. Der Wert der Geschwindigkeit kann größer, gleich oder kleiner Null sein.

Im Fall einer zeitlich konstanten Geschwindigkeit entspricht der Graph der Geschwindigkeit einer waagrechten Geraden. Der Wert der $v(t)$ -Geraden hat folgende Bedeutung:

- Umso größer der Wert der Geschwindigkeit ist, desto weiter ist die $v(t)$ -Gerade von der horizontalen t -Achse (entspricht dem Wert $v = 0$) entfernt.
- „Ruhe“ ist der Spezialfall einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, für den gerade $v = 0$ gilt.
- Bewegt sich ein Objekt in die entgegengesetzt zur ursprünglich als „positiv“ festgelegten Richtung, so erhält seine Geschwindigkeit ein negatives Vorzeichen.

Kennt man die (konstante) Geschwindigkeit v eines Objekts und weiß, wie lange es mit dieser Geschwindigkeit unterwegs ist, so kennt man allerdings noch nicht den genauen Ort, an dem sich das Objekt zur Zeit t befindet. Man weiß nämlich nicht, von welchem Startpunkt aus die Bewegung begonnen hat. Um den Ort $s(t)$ des Objekts in Abhängigkeit von der Zeit angeben zu können, muss also die Startposition s_0 mit berücksichtigt werden:

$$s(t) = v_0 \cdot \Delta t + s_0$$

Der zeitliche Verlauf der zurückgelegten Wegstrecke kann ebenfalls graphisch in Form eines so genannten Weg-Zeit-Diagramms („ $s(t)$ -Diagramm“) dargestellt werden. Aus Gleichung (2) folgt, dass sich die Wegstrecke Δs bei konstanter Geschwindigkeit v in gleichen Zeitabschnitten Δt kontinuierlich um $\Delta s = v \cdot \Delta t$ ändert – die entsprechende Weg-Zeit-Linie entspricht also einer Geraden.

Die Steigung der Geraden in einem $s(t)$ -Diagramm hat folgende Bedeutung:

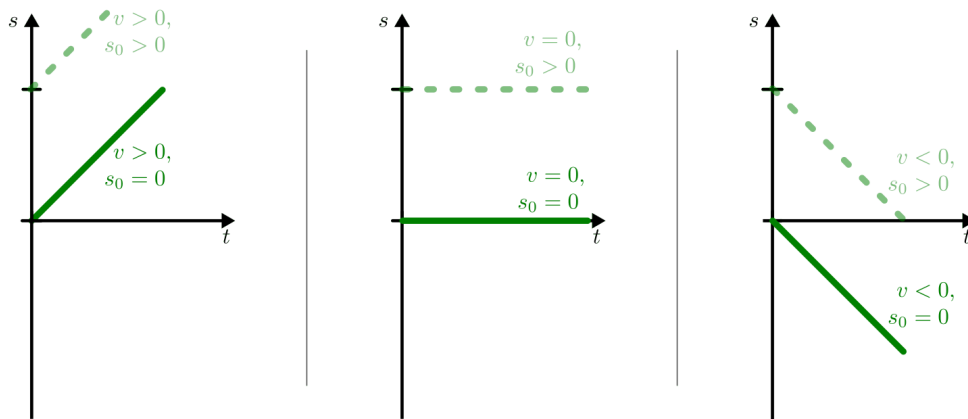


Abb. 6: $s(t)$ -Diagramme einer konstanten Geschwindigkeit. Die Steigung der Weg-Zeit-Geraden kann größer, gleich oder kleiner Null sein.

- Umso größer die (konstante) Geschwindigkeit ist, desto steiler ist der Verlauf der Geraden im $s(t)$ -Diagramm.
- Ist die Geschwindigkeit eines Objekts konstant gleich Null, so bleibt seine Entfernung vom Beobachter unverändert – egal, ob sich das beobachtete Objekt an der Position des Beobachters oder in einer Entfernung s_0 vom Beobachter entfernt liegt. In beiden Fällen entspricht zeitliche Verlauf des zurückgelegten Weges einer waagrecht Geraden.
- Das Vorzeichen der Geschwindigkeit gibt an, ob die Gerade im $s(t)$ -Diagramm steigt oder fällt. Eine negative Steigung bedeutet hierbei, dass sich das beobachtete Objekt entgegen der ursprünglich als „positiv“ festgelegten Raumrichtung bewegt – egal, ob die Bewegung vom Beobachter oder von einer um die Strecke s_0 entfernten Stelle aus beginnt.

Der Wert, den die Ortsfunktion $s(t) = v \cdot t$ zu einer bestimmten Zeit t annimmt, entspricht jeweils der Fläche zwischen der entsprechen Geschwindigkeits-Zeit-Linie und der t -Achse im $v(t)$ -Diagramm; gegebenenfalls muss das Vorzeichen berücksichtigt werden und die anfängliche Entfernung s_0 zum Ergebnis hinzu addiert werden.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit

Auch wenn sich die Geschwindigkeit mit der Zeit beziehungsweise entlang einer Wegstrecke mehrfach ändert, so kann man trotzdem für den gesamten Bewegungsvorgang eine durchschnittliche Geschwindigkeit angeben.

Definition:

Die Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} eines Objekts ist gleich dem Verhältnis aus der Wegstrecke Δs_{ges} , die er insgesamt zurücklegt, und der dazu benötigten Zeit Δt_{ges} :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s_{\text{ges}}}{\Delta t_{\text{ges}}} \quad (4)$$

Beispiel:

- Ein Radrennfahrer legt eine Etappe von 130 km in einer Zeit von 4,0 h zurück. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt somit:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s_{\text{ges}}}{\Delta t_{\text{ges}}} = \frac{130 \text{ km}}{4 \text{ h}} = 32,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Man sieht, dass auch bei diesem Vorgang das Modell der geradlinigen Bewegung verwendet werden kann, auch wenn sich der Radfahrer sehr wahrscheinlich nicht geradlinig fortbewegt. Bei vielerlei Fragestellungen ist allerdings nicht der konkrete Streckenverlauf von Bedeutung, sondern nur die Länge der Strecke. Kennt man zusätzlich die durchschnittliche Geschwindigkeit, so weiß man, wie lange der Bewegungsvorgang dauern wird; derartige Abschätzungen sind beispielsweise bei Wanderungen oder Fahrrad-Touren durchaus hilfreich.

Die Relativgeschwindigkeit

Bewegen sich zwei Objekte von einem gleichen Ausgangspunkt aus mit verschiedenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 in die gleiche Richtung, so entspricht ihre gegenseitige Entfernung der Differenz der zurückgelegten Wegstrecken; die Objekte entfernen sich also mit zunehmender Zeit voneinander. Die wachsende Entfernung kann durch die so genannte Relativgeschwindigkeit v_{rel} ausgedrückt werden:

$$v_{\text{rel}} = v_2 - v_1 \quad (5)$$

Diese Gleichung gibt die Relativgeschwindigkeit des zweiten Objekts relativ zum ersten Objekt an; umgekehrt gibt $v_1 - v_2$ die Geschwindigkeit des ersten Objekts relativ zum zweiten an. Beide Relativgeschwindigkeiten haben den gleichen Betrag, ein unterschiedliches Vorzeichen, da sie in ihren Richtungen entgegengesetzt sind.

Das Rechnen mit Relativgeschwindigkeiten ist beispielsweise hilfreich, um die für Überholvorgänge mit konstanten Geschwindigkeiten notwendigen Zeiten beziehungsweise Wegstrecken zu berechnen. Zudem können, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, mittels Relativgeschwindigkeiten auch Entfernungen zwischen Objekten berechnet werden, die sich mit konstanten Geschwindigkeiten in unterschiedlichen Raumrichtungen bewegen.

Mehrdimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

Die im letzten Abschnitt vorgestellten Gesetzmäßigkeiten für eindimensionale Bewegungen lassen sich auch ohne großen Aufwand auf zweidimensionale Bewegungen übertragen. Ein Grundprinzip hierbei ist, dass jeder zweidimensionale Bewegungsvorgang in eine x - und eine y -Komponente aufgeteilt werden kann. Die Ausrichtung des Koordinatensystems kann wiederum einmalig frei gewählt werden kann, ist für den Rest der Rechnung dann allerdings verbindlich.

Ein zweites Grundprinzip ist, dass einzelne Bewegungsvorgänge, auch wenn sie entlang unterschiedlicher Raumrichtungen stattfinden, jeweils getrennt voneinander betrachtet werden können.

Addition von Teilgeschwindigkeiten

Verlaufen zwei Bewegungen geradlinig entlang einer gemeinsamen Linie, so genügt eine einfache Addition der beiden Geschwindigkeitsbeträge v_1 und v_2 , um die resultierende Geschwindigkeit zu erhalten.

Beispiele:

- Eine Person bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_1 auf einem Laufband entgegen der Laufbandgeschwindigkeit v_2 . Sind beide Geschwindigkeiten gleich groß, so bleibt die Person an der gleichen Stelle – die resultierende Geschwindigkeit v ist gleich Null.
Sind beide Geschwindigkeiten unterschiedlich groß, so bewegt sich die Person in Richtung der größeren Geschwindigkeit.¹
- Stimmt die Bewegungsrichtung der Person mit der Richtung der Laufbandgeschwindigkeit überein, so addieren sich die Beträge beider Geschwindigkeiten. Die Geschwindigkeit v der Person (relativ zum Erdboden) ist somit gleich $v_1 + v_2$.

Die Addition der auftretenden Geschwindigkeiten ist auch möglich, wenn diese in einem beliebigen Winkel zueinander stehen. Zeichnerisch stellt man dazu die beiden Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 als Pfeile dar, deren Richtungen mit denen der beiden Geschwindigkeiten übereinstimmen und deren Längen die Beträge beider Geschwindigkeiten abbilden. Nach den Regeln der **Vektor-Addition** lässt sich damit aus beiden Geschwindigkeits-Pfeilen die Richtung und der Betrag der resultierenden Geschwindigkeit \vec{v} graphisch ermitteln.

Betrag und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit \vec{v} können auch rechnerisch bestimmt werden. Für eine zweidimensionale Bewegung (in einer Ebene) gilt:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1x} + v_{2x} \\ v_{1y} + v_{2y} \end{pmatrix}$$

Die resultierende Geschwindigkeit \vec{v} entspricht somit einer komponentenweisen Addition der beiden Geschwindigkeits-Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 . Für den Betrag der resultierenden Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ gilt:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Aus dem Verhältnis der y - zur x -Komponente lässt sich der Winkel der resultierenden Geschwindigkeit bestimmen:

$$\tan \varphi = \frac{v_y}{v_x} \iff \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$$

¹ Definiert man die Bewegungsrichtung der Person (nach rechts) als positiv, so kann der Betrag der resultierenden Geschwindigkeit als Differenz beider Geschwindigkeiten $v_1 - v_2$ berechnet werden. Gilt $v_2 > v_1$, so ist die resultierende Geschwindigkeit „negativ“, sie verläuft somit von rechts nach links.

Schreibt man die Differenz $v_1 - v_2$ als Summe $v_1 + (-v_2)$, so zeigt sich, dass auch in diesem Fall – unter Berücksichtigung der Bewegungsrichtungen – die resultierende Geschwindigkeit gleich der Summe der Einzelgeschwindigkeiten ist.

Beispiel:

- Ein Boot überquert mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ senkrecht einen Fluss, der mit einer Geschwindigkeit $v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ strömt. Legt man ein Koordinatensystem so an, dass die y -Achse in Richtung der Geschwindigkeit des Bootes und die x -Achse in Richtung der Flussströmung zeigt, so folgt für die resultierende Geschwindigkeit \vec{v} :

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Betrag der resultierenden Geschwindigkeit ist hierbei:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \sqrt{10 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 3,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Winkel gegenüber der x -Achse (Richtung des Flusses) beträgt:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{3}{1} \right) \approx 71,6^\circ$$

Das Boot driftet somit um einem Winkel von rund $90^\circ - 71,6^\circ = 18,40^\circ$ ab.

Die in die jeweiligen Richtungen zurückgelegten Wegstrecken Δs_x und Δs_y lassen sich wiederum komponentenweise über die Formel $\Delta s = v \cdot \Delta t$ berechnen.

Eine weitere Verallgemeinerung auf dreidimensionale Bewegungsvorgänge erfolgt nach den gleichen Prinzipien, indem man zusätzlich eine z -Komponente betrachtet und folglich mit drei- anstelle mit zweidimensionalen Vektoren rechnet.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

Das Modell einer Bewegung mit konstanter Beschleunigung stellt eine Verallgemeinerung einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit dar. Hat ein sich bewegendes Objekt insbesondere eine konstante Beschleunigung mit einem Wert von Null, so bewegt es sich mit konstanter Geschwindigkeit fort; Eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit kann also Spezialfall einer beschleunigten Bewegung angesehen werden.

Durch das Einbeziehen von Beschleunigungen wird berücksichtigt, dass keine abrupten, sondern stets nur kontinuierliche Geschwindigkeitsänderungen möglich sind. Die allgemeinen Zusammenhänge zwischen Geschwindigkeitsänderung, Beschleunigung und Zeit beziehungsweise Wegstrecke werden im folgenden Abschnitt zunächst für geradlinige, dann auch für zusammengesetzte Bewegungsvorgänge näher beschrieben.

Eindimensionale Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

Bei einer Bewegung mit konstanter Beschleunigung nimmt die Geschwindigkeit eines Objekts in gleichen Zeitabschnitten um den jeweils gleichen Betrag zu beziehungsweise ab.

Definition:

Die Beschleunigung a eines sich geradlinig bewegenden Objekts ist gleich dem Verhältnis aus der Geschwindigkeitsänderung Δv und der dazu benötigten Zeit Δt :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (6)$$

Einheit:

Die Beschleunigung wird in Meter je Quadratsekunde (m/s^2) angegeben.

Beispiele:

- 1 m/s^2 ist die Beschleunigung eines Objekts, dessen Geschwindigkeit sich in 1 s um 1 m/s ändert.
- Ein Fahrzeug, das in einer Zeit von $t = 10 \text{ s}$ von 0 km/h auf $100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}$ angetrieben wird, weist eine Beschleunigung von $2,78 \text{ m/s}^2$ auf.
- Die Beschleunigung die ein Objekt im freier Fall auf der Erde erfährt („Erdbeschleunigung“), beträgt rund $9,81 \text{ m/s}^2$. Häufig wird diese Beschleunigung, die bei vielerlei physikalischen Vorgängen eine Rolle spielt, mit dem Buchstaben $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ bezeichnet und *Ortsfaktor* genannt.

Bei längeren Bewegungsvorgängen können aufeinander folgende Zeitabschnitte unterschiedliche Beschleunigungen aufweisen. Beispielsweise beschleunigt ein Sprinter zunächst gleichmäßig, bis er seine Höchstgeschwindigkeit erreicht hat, hält diese Geschwindigkeit (möglichst) konstant bis zum Ziel, und bremst nach der Ziellinie wieder gleichmäßig ab. Derartige Bewegungsvorgänge lassen sich oftmals abschnittsweise durch jeweils konstante (Durchschnitts-)Beschleunigungen beschreiben.

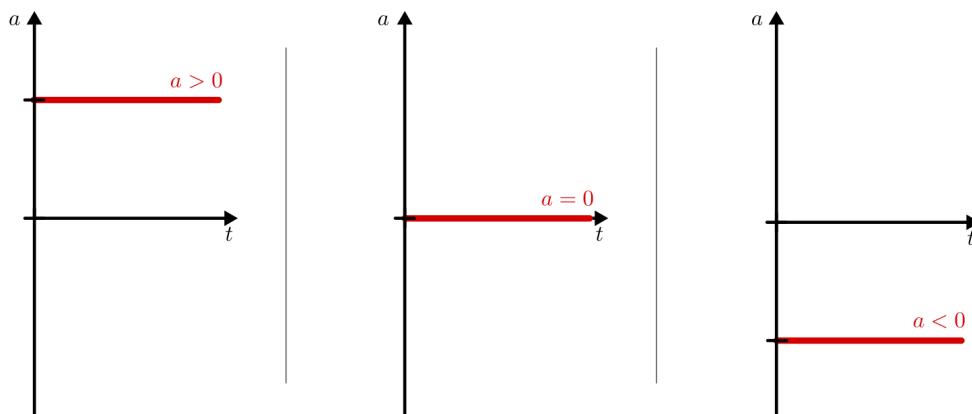


Abb. 7: Beschleunigung-Zeit-Diagramme einer konstanten Beschleunigung. Der Wert der Beschleunigung kann größer, gleich oder kleiner Null sein.

Beschleunigung und Geschwindigkeit

Aus Gleichung (6) folgt, dass sich die Geschwindigkeit bei einer konstanten Beschleunigung a in gleichen Zeitabschnitten Δt kontinuierlich um den Wert $\Delta v = a \cdot \Delta t$ verändert.

Kennt man die (konstante) Beschleunigung a eines Objekts und weiß, über welchen Zeitabschnitt Δt die Beschleunigung anhält, so kann man im Allgemeinen jedoch nicht angeben, wie groß die Geschwindigkeit v des Objekt zur Zeit t ist. Hierzu muss man zusätzlich wissen, wie groß die anfängliche Geschwindigkeit v_0 des Objekts war. Für den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit $v(t)$ gilt also:

$$v(t) = a \cdot \Delta t + v_0$$

Zeichnet man ein $v(t)$ -Diagramm einer solchen Bewegung, so entspricht der Graph der Geschwindigkeit einer Geraden.

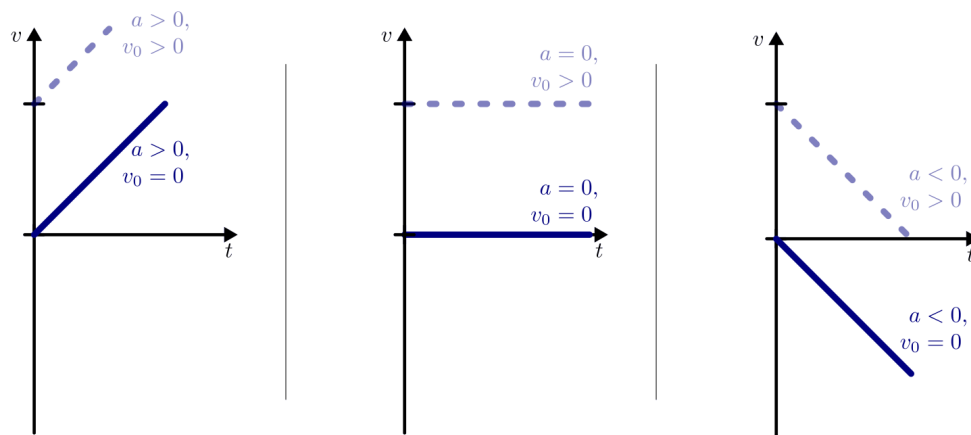


Abb. 8: Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme einer konstanten Beschleunigung. Die Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Geraden kann größer, gleich oder kleiner Null sein.

Die Steigung einer $v(t)$ -Geraden hat folgende Bedeutung:

- Umso steiler die Geschwindigkeit-Zeit-Gerade ist, desto größer ist die Beschleunigung.
- Ist die Beschleunigung des beobachteten Objekts gleich Null, so entspricht die Geschwindigkeit-Zeit-Linie einer waagrechten Geraden. Dies gilt gleichermaßen für ruhende und sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bewegende Objekte.
- Eine Beschleunigung entgegen der ursprünglich als „positiv“ festgelegten Raumrichtung erhält ein negatives Vorzeichen – egal, ob das beobachtete Objekt ruht oder sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 fortbewegt. Dies hat – je nach Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 – eine Beschleunigung „in Gegenrichtung“ beziehungsweise ein kontinuierliches Abbremsen zur Folge.

Aus einem $v(t)$ -Diagramm kann also die Beschleunigung zu einem Zeitpunkt t ermittelt werden, indem man an dieser Stelle nicht den Wert, sondern die *Steigung* der Diagrammlinie betrachtet. Beispielsweise gilt für einen Bremsvorgang $v > 0$, während für die Geschwindigkeitsänderung (und somit für die Steigung des Graphen) $\Delta v < 0$ gilt.

Beschleunigung und Wegstrecke

Zeichnet man in ein $s(t)$ -Diagramm die zurückgelegte Wegstrecke in Abhängigkeit von der Zeit ein, so hat der Graph bei einer beschleunigten Bewegung ($a \neq 0$) ein parabelförmigen Verlauf. Die konkrete Form der Parabel hängt von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der anfänglichen Entfernung s_0 des Objekts vom Beobachter (Koordinatenursprung) ab.

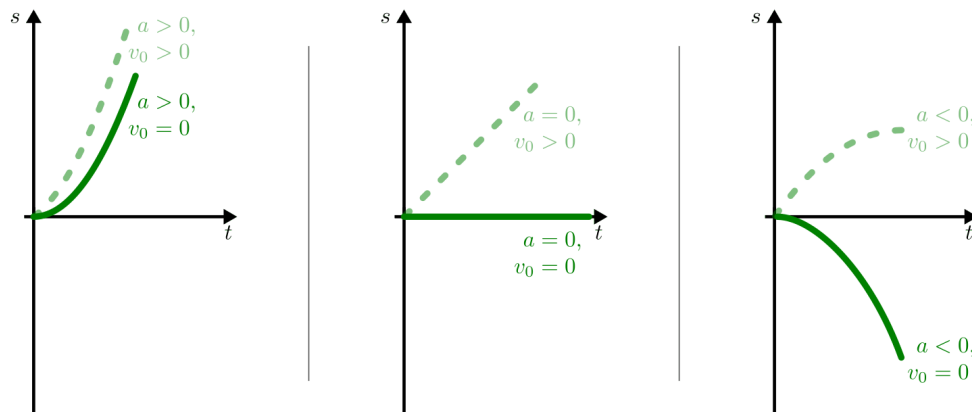


Abb. 9: Weg-Zeit-Diagramme einer konstanten Beschleunigung. Für $a > 0$ ist die Weg-Zeit-Parabel nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet (linkes bzw. rechtes Bild). Für $a = 0$ entspricht die Weg-Zeit-Funktion einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (mittleres Bild).

Wegstrecken in $v(t)$ -Diagrammen ablesen

Zunächst soll angenommen werden, dass zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Bewegung am Koordinatenursprung s_0 mit einer Startgeschwindigkeit von $v_0 = 0$ beginnt. In diesem Fall gilt:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \quad (7)$$

Diesen Zusammenhang kann man sich anschaulich erklären, indem man bedenkt, dass sich eine zurückgelegte Wegstrecke letztlich ein Produkt aus Geschwindigkeit und Zeit darstellt. Stellt man sich den Zeitabschnitt Δt , in dem die Beschleunigung stattfindet, nochmals in viele kleine Zeitabschnitte $\Delta t_1^*, \Delta t_2^*, \Delta t_3^*$ usw. unterteilt vor (wie bei einer Betrachtung des Vorgangs mit Stroboskop-Licht), so kann man in diesen kurzen Momenten die jeweiligen Geschwindigkeiten v_1^*, v_2^*, v_3^* usw. jeweils in guter Näherung als konstant annehmen.

Bei einer solchen Aufteilung in viele kleine Zeitschritte mit jeweils konstanten Geschwindigkeiten lassen sich die in den einzelnen Zeitschritten zurückgelegten Wegstrecken mittels der Formel $\Delta s = v \cdot \Delta t$ berechnen; die Einzelergebnisse können dann zum Gesamtergebnis aufsummiert werden. In einem $v(t)$ -Diagramm entsprechen die so berechneten einzelnen

Wegstrecken den Rechteck-Flächen zwischen der (stufenförmigen) Geschwindigkeit und der t -Achse.

Ist die Beschleunigung konstant, so nimmt die Geschwindigkeit v des sich bewegenden Objekts linear mit der Zeit zu. Der Mittelwert der einzelnen Geschwindigkeiten während des Beschleunigungsvorgangs entspricht wiederum der Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} des Objekts:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \quad (8)$$

Mit v_0 wird hierbei wiederum die Geschwindigkeit zu Beginn der Beschleunigung, mit v die (End-)Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t bezeichnet. Ist insbesondere die Startgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so ist $\bar{v} = \frac{1}{2} \cdot v$, also gleich der Hälfte der Endgeschwindigkeit. In diesem Fall gilt somit für die während des Beschleunigungsvorgangs zurückgelegte Wegstrecke:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \bar{v} \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot v \cdot \Delta t \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a \cdot \Delta t) \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \end{aligned}$$

Der Hintergedanke bei dieser Gleichung ist, dass während des Beschleunigungsvorgangs – über alle kleinen Zeitschritte gemittelt – die durchschnittliche „Höhe“ der Rechtecke gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} ist; die Gesamt-Fläche zwischen der $v(t)$ -Linie und der t -Achse ist also identisch mit der Fläche, die man erhält, wenn man die Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} mit Δt multipliziert.¹

Die gleiche Überlegung trifft ebenso zu, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt für die Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} = v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist also allgemein gleich dem Mittelwert zwischen der Start- und Endgeschwindigkeit; bei einer konstanten Beschleunigung a wird sie zur Hälfte der Beschleunigungszeit Δt , also zum Zeitpunkt $(t_{\text{start}} +) \frac{1}{2} \cdot \Delta t$ erreicht. Setzt man wiederum diesen Term für \bar{v} in die Bewegungsgleichung ein, so erhält man:

$$\Delta s = \bar{v} \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 + v_0 \cdot \Delta t \quad (9)$$

Diese Gleichung gibt allgemein den Zusammenhang zwischen der zurückgelegten Wegstrecke Δs , der Beschleunigung a , der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Zeitdauer Δt an.

¹ Eine andere, gleichwertige Überlegung ist, dass die Fläche zwischen der $v(t)$ -Linie und der t -Achse ein Dreieck darstellt. Dieses Dreieck entspricht genau der Hälfte des Rechtecks, das man erhält, wenn man $v(t) = a \cdot \Delta t$ mit Δt multipliziert. In beiden Fällen sind die berechneten Flächen identisch.

Die allgemeine Bewegungsgleichung

Die Gleichung (9) ist tatsächlich eine Verallgemeinerung der bislang betrachteten Fälle:

- Ist die Beschleunigung $a = 0$, so erhält man die Ortsgleichung für Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \Delta t^2}_{=0} + v_0 \cdot \Delta t = v_0 \cdot \Delta t$$

- Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so erhält man die Ortsgleichung (7) für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung ohne Anfangsgeschwindigkeit:

$$v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 + \underbrace{0 \cdot \Delta t}_{=0} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$$

Man kann sich eine beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit also als zwei Prozesse vorstellen, die gleichzeitig ablaufen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen (einmal die Bewegung mit der konstanten Anfangsgeschwindigkeit und einmal die Bewegung mit der konstanten Beschleunigung ohne Anfangsgeschwindigkeit). Beide Teilprozesse können somit getrennt voneinander betrachtet und ihre Effekte addiert werden.

Den konkreten Ort $s(t)$ eines Objekts erhält man schließlich, indem man bei der Bewegung dessen anfängliche Entfernung vom Koordinatenursprung s_0 mit berücksichtigt:

$$s(t) = \bar{v} \cdot \Delta t + s_0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 + v_0 \cdot \Delta t + s_0 \quad (10)$$

Diese Formel genügt in Kombination mit der Formel $v(t) = a \cdot \Delta t + v_0$ bereits, um den Ort sowie die Geschwindigkeit eines Objekts zu jedem beliebigen Zeitpunkt angeben zu können, sofern die Startwerte bekannt sind und die Beschleunigung konstant ist.²

Die Bremsformel

Insbesondere für Bremsvorgänge gibt es eine weitere nützliche Formel, die sich aus der obigen Gleichung (9) herleiten lässt.³ Mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 gilt für den Zusammenhang zwischen v , a und Δs :

² Bei nicht konstanten Beschleunigungen müsste der Prozess in Teilabschnitte mit jeweils konstanten (Durchschnitts-)Beschleunigungen zerlegt werden. Die ist meist mit erheblich mehr Rechenaufwand verbunden und wird kaum ohne Hilfe von Computern berechnet.

³ Die Bremsformel (11) lässt sich durch folgende Umformungen auf die ursprünglichen Gleichungen (6) und (7) zurückführen:

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= (a \cdot t + v_0)^2 - v_0^2 \\ &= a^2 \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot v_0 \cdot t + v_0^2 - v_0^2 \\ &= a^2 \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot v_0 \cdot t \\ &= 2 \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \right) \\ &= 2 \cdot a \cdot \Delta s \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta s \quad (11)$$

Diese Gleichung wird häufig „Bremsformel“ genannt; im Fall $v = 0$ lässt sich damit der Bremsweg $\Delta s = \frac{v_0^2}{2 \cdot |a|}$ bei bekannter Anfangsgeschwindigkeit und Beschleunigung unmittelbar berechnen. Die „Bremsformel“ lässt sich allerdings auch allgemein auf Bewegungen mit konstanter Beschleunigung anwenden und erleichtert insbesondere dann das Rechnen, wenn in der Aufgabenstellung keine Zeitangabe enthalten ist.

Reaktionszeit und Anhalteweg

Um die gesamte Strecke zu berechnen, die ein Fahrzeug zum Anhalten benötigt, muss neben dem Bremsweg auch die Wegstrecke berücksichtigt werden, die der Fahrer während der Reaktionszeit zurücklegt. Es gilt also:

$$\Delta s_{\text{Anhalte}} = \Delta s_{\text{Brems}} + \Delta s_{\text{Reaktion}}$$

Während der Reaktionszeit, die oftmals vereinfacht als „Schrecksekunde“ angenommen wird, bewegt sich das Fahrzeug mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 weiter. Es ergibt sich somit mit $t_{\text{Reaktion}} \hat{=} 1 \text{ s}$:

$$\Delta s_{\text{Anhalte}} = \frac{v_0^2}{2 \cdot |a|} + v_0 \cdot t_{\text{Reaktion}}$$

Der Bremsweg (und somit auch der Anhalteweg) nimmt bei der gleichen Bremsbeschleunigung quadratisch mit der Geschwindigkeit zu; aus diesem Grund sind in Ortschaften sowie an unübersichtlichen Stellen Geschwindigkeitsbegrenzungen für die Verkehrssicherheit wichtig.

Beschleunigungen und Kräfte

Beschleunigungen treten allgemein dann auf, wenn eine resultierende *Kraft* F_{res} auf einen Gegenstand einwirkt; für die Beschleunigung gilt dabei $a = \frac{F}{m}$, wobei m für die Masse des Gegenstands steht. Kennt man also die auf einen Gegenstand einwirkenden Kräfte, so kann mittels der obigen Formeln auch dessen Bewegung vorhergesagt werden; umgekehrt können aus berechneten oder gemessenen Beschleunigungswerten auch die entsprechenden Kräfte abgeschätzt werden.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Wurfbewegungen

Im folgenden Abschnitt werden zunächst eindimensionale, später auch zweidimensionale Wurfbewegungen näher beschrieben. Als Vereinfachung soll dabei der Luftwiderstand vernachlässigt werden.

Alle Wurfbewegungen haben die Gemeinsamkeit, dass die geworfenen Objekte eine Beschleunigung von $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ („Erdbeschleunigung“) in Richtung des Erdmittelpunkts erfahren. Die einzelnen Wurfbewegungen unterscheiden sich also lediglich hinsichtlich ihrer Startbedingungen.

Freier Fall

Als „freien Fall“ bezeichnet man einen Bewegungsvorgang, bei dem ein Objekt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 0$ in einer Höhe $h = s_0$ startet und konstant mit der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ beschleunigt wird; der Luftwiderstand wird dabei vernachlässigt.

Durch die konstante Beschleunigung wird das fallende Objekt mit der Zeit kontinuierlich beschleunigt. Beginnt der Vorgang zur Zeit $t_0 = 0$, so gilt für die Geschwindigkeit v des Objekts in Abhängigkeit von der Zeit:

$$v(t) = -g \cdot t$$

Für die zurückgelegte Wegstrecke Δs beziehungsweise den Ort s gilt entsprechend mit $v_0 = 0$:

$$\Delta s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + s_0$$

Beim Aufprall auf dem Boden gilt $s(t) = 0$; daraus lässt sich die Falldauer beziehungsweise die Geschwindigkeit v_{\max} beim Aufprall berechnen:

$$s(t) = 0 \iff \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\max}^2 = s_0$$

$$t_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot s_0}{g}}$$

$$v_{\max} = -g \cdot t_{\max} = -g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s_0}{g}} = -\sqrt{\frac{2 \cdot s_0 \cdot g^2}{g}} = -\sqrt{2 \cdot s_0 \cdot g}$$

- Gilt für die konstante Beschleunigung $a < 0$, so ist die (Halb-)Parabel nach unten hin geöffnet.
 - Ohne Anfangsgeschwindigkeit ($v_0 = 0$) findet eine beschleunigte Bewegung in negative s -Richtung statt.
 - Mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ ergibt sich ein kontinuierliches Abbremsen, wobei der Scheitel der Halbparabel den Bremsweg angibt:

$$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Bleibt nach einem vollständigen Abbremsen – wie bei einem senkrechten Wurf nach oben – die Beschleunigung $a < 0$ weiterhin bestehen, so findet anschließend eine

beschleunigte Bewegung in negativer s -Richtung statt. Kann der Luftwiderstand vernachlässigt werden, so spricht man bei diesem Vorgang von einem „freien Fall“ mit $|g| = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und $v_0 = 0$.

Beispiel:

- Der Schacht eines Brunnens hat eine Tiefe von $h = -40 \text{ m}$. Wie lange dauert es, bis aus der Höhe $h_0 = 0 \text{ m}$ fallender ein Stein im freien Fall (ohne Luftwiderstand) am Grund des Schachtes ankommt? Wie groß ist seine Geschwindigkeit v beim Aufprall?

Die Bewegung des Steins entspricht einem freien Fall mit der Beschleunigung $|g| = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$. Für die vom Stein zurückgelegte Wegstrecke Δs gilt dabei:

$$\Delta s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2$$

Der Vorgang endet, wenn eine Strecke von $\Delta s = -40 \text{ m}$ durchlaufen wurde (das negative Vorzeichen ergibt sich, wenn eine Bewegung nach oben als „positiv“ deklariert wird). Für die Fallzeit Δt gilt also:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta s}{-g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (-40 \text{ m})}{-9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 2,86 \text{ s}$$

In dieser Zeit erreicht der Stein folgende Geschwindigkeit:

$$v = -g \cdot t = -9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,86 \text{ s} \approx -28,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Stein erreicht beim Aufprall unter Vernachlässigung des Luftwiderstands somit eine Geschwindigkeit von rund $28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; das entspricht rund $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Senkrechter Wurf nach oben

Wird ein Objekt senkrecht nach oben geworfen, so startet es in der z -Richtung mit einer positiven Anfangsgeschwindigkeit v_0 ; gleichzeitig wird es durch die Erdbeschleunigung in die entgegengesetzte Richtung beschleunigt. Beginnt der Vorgang wiederum zur Zeit $t_0 = 0$, so gilt für die Geschwindigkeit v des Objekts in Abhängigkeit von der Zeit:

$$v(t) = -g \cdot t + v_0$$

Als Annahme soll zunächst gelten, dass das Objekt in einer Höhe von $s_0 = 0$ abgeworfen wird. Dann gilt für den Ort s in Abhängigkeit von der Zeit:

$$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

Aus den beiden obigen Gleichungen kann man die maximale Steighöhe s_{max} berechnen. Die zum Erreichen dieser Höhe benötigte Zeit t_{max} lässt sich anhand der ersten Gleichung bestimmen; an diesem Punkt ist nämlich die Geschwindigkeit des Objekts gleich Null:

$$v_0 - g \cdot t_{\text{max}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}$$

Setzt man diesen Term für t_{\max} in die zweite Gleichung ein, so kann man entsprechend die maximale Steighöhe s_{\max} berechnen:

$$\begin{aligned} s_{\max} &= v_0 \cdot t_{\max} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\max}^2 \\ &= v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} \\ &= \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \end{aligned}$$

Nach der doppelten Zeit, also $2 \cdot t_{\max}$, kommt das Objekt wieder auf dem Boden an. Dies kann man beispielsweise überprüfen, indem man in der Weg-Zeit-Gleichung $s(t) = 0$ setzt und die Gleichung nach t auflöst. (Der Luftwiderstand wird dabei vernachlässigt.)

Die Wegstrecke wird beim Herunterfallen in der gleichen Weise durchlaufen wie beim Hochwerfen, nur zeitlich umgekehrt. Entsprechend ist auch die Geschwindigkeit des Objekts, sofern kein Luftwiderstand auftritt, vor Aufprall wieder gleich der ursprünglichen Geschwindigkeit v_0 .

Senkrechter Wurf nach unten

Kann ein geworfenes Objekt – beispielsweise im Anschluss an einen senkrechten Wurf nach oben – nach dem Erreichen seiner Ausgangslage weiter herab fallen, so führt ab diesem diesem Zeitpunkt einen so genannten senkrechten Wurf nach unten aus; seine Anfangsgeschwindigkeit beträgt dabei $-v_0$.

Für die Geschwindigkeit v des Objekts gilt in Abhängigkeit von der Zeit t :

$$v(t) = -g \cdot t - v_0$$

Für den Ort des Objekts gilt im zeitlichen Verlauf entsprechend:

$$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - v_0 \cdot t + s_{z,0}$$

Das Koordinatensystem wurde ursprünglich so festgelegt, dass sich der Nullpunkt der z -Achse in Höhe der Abwurfstelle, also in einer Höhe $s_{z,0}$ über dem Boden befindet. Das Objekt kann beim senkrechten Wurf nach unten somit maximal die Wegstrecke $\Delta s_{z,0}$ zurücklegen; erreicht es den Boden, so ist $s(t) = 0$: Damit erhält man als Gleichung:

$$-z_0 = -v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t - z_0 = 0$$

Diese quadratische Gleichung für t_{\max} kann folgendermaßen mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelöst werden:

$$t_{\max} = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot z_0}}{g}$$

Setzt man diese Zeit t in die Geschwindigkeit-Zeit-Gleichung ein, so folgt für die Geschwindigkeit v des Gegenstands unmittelbar vor dem Aufprall auf den Boden:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -v_0 - g \cdot \left(\frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot z_0}}{g} \right) \\ &= -v_0 - \left(-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot z_0} \right) \\ &= -\sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot z_0} \end{aligned}$$

Gilt im Speziellen für die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so entspricht das Ergebnis $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot z_0}$ der Geschwindigkeit des Objekts beim freien Fall.

Waagrechter Wurf

Wird ein Objekt von einer erhöhten Position $s_{z,0} = z_0$ aus waagrecht geworfen, so bewegt er sich – unter Vernachlässigung des Luftwiderstands – entlang der horizontalen x -Richtung mit seiner ursprünglichen Geschwindigkeit $v_0 = v_x$ fort. In der vertikalen Richtung findet gleichzeitig eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung entgegen der z -Achse statt; die Anfangsgeschwindigkeit in dieser Richtung ist $v_{z,0} = 0$.

Für den Vektor \vec{v} der Geschwindigkeit gilt somit in Abhängigkeit von der Zeit t :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -g \cdot t \end{pmatrix}$$

Die maximale Flugzeit t_{\max} lässt sich aus der z -Komponente des zurückgelegten Weges bestimmen: Gilt $s_z = 0$, so ist das Objekt auf dem Boden angekommen. Für die zugehörige Zeit t_{\max} gilt somit:

$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\max}^2 + z_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot z_0}{g}}$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich aus der x -Komponente der Bewegung die maximale Wurfweite $s_{x,\max}$ bestimmen:

$$s_{x,\max} = v_0 \cdot t_{\max} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot z_0}{g}}$$

Schräger Wurf

Bei einem schrägen Wurf wird ein Objekt in einem Winkel α gegenüber der Horizontalen abgeworfen ($0 < \alpha < 90^\circ$). Für die Komponenten v_{0x} und v_{0z} der Geschwindigkeit v_0 des Objekts gilt beim Abwurf:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Ohne Luftwiderstand bleibt die horizontale Komponente der Geschwindigkeit unverändert. In vertikaler Richtung wird das Objekt hingegen – wie beim senkrechten Wurf nach

oben – mit der Beschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt. Für die Geschwindigkeit \vec{v} gilt somit in Abhängigkeit von der Zeit t :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} - g \cdot t \end{pmatrix}$$

Es findet also eine Überlagerung einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in x -Richtung und einer Bewegung mit konstanter Beschleunigung in z -Richtung statt. Für die in beiden Richtungen zurückgelegten Wegstrecken Δs_x und Δs_y gilt:

$$\Delta \vec{s} = \begin{pmatrix} \Delta s_x \\ \Delta s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \cdot t \\ v_{0z} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden wird wiederum zunächst angenommen, dass das Objekt aus einer Höhe $s_{0z} = 0 \text{ m}$ geworfen wird. Wie beim senkrechten Wurf gilt dann für die Zeit t , in welcher der Körper die maximale Steighöhe $s_{z,\text{max}}$ erreicht:

$$v_{0z} - g \cdot t_{z,\text{max}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{z,\text{max}} = \frac{v_{0z}}{g}$$

Setzt man diese Zeit in die Bewegungsgleichung für die z -Komponente ein, so folgt für die maximale Steighöhe $s_{z,\text{max}}$:

$$s_{z,\text{max}} = v_{0z} \cdot \frac{v_{0z}}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_{0z}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0z}^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_{0z}^2}{g^2} = \frac{v_{0z}^2}{2 \cdot g}$$

Die Wurfbahn ist (ohne Luftwiderstand) parabelförmig und damit symmetrisch; die Zeit bis zum Aufprall auf dem Boden muss somit doppelt so lang sein wie die Zeit $t_{z,\text{max}}$ zum Erreichen der maximalen Steighöhe. In dieser Zeit erreicht das Objekt in horizontaler Richtung folgende Entfernung:

$$s_{x,\text{max}} = v_{0x} \cdot (2 \cdot t_{z,\text{max}}) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{g}$$

Hierbei wurde im letzten Rechenschritt das Additionstheorem für Sinus-Funktionen genutzt. Die Wurfweite ist also – ebenfalls wie die Wurfhöhe – vom Wurfwinkel α abhängig. Für $\alpha = 45^\circ$ ist im obigen Fall $\sin(2 \cdot \alpha) = \sin(90^\circ) = 1$ und somit die Wurfweite maximal ($s_{x,\text{max},45^\circ} = \frac{v_0^2}{g}$).

Kreisförmige Bewegungen

Eine kreisförmige Bewegung ist die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn. Da einzelne Teile des Körpers dabei unterschiedlich lange Strecken zurücklegen, wird im Allgemeinen nur die Bewegung seines Schwerpunkts betrachtet.

Rotationen

Prinzipiell gibt es keinen Unterschied zwischen einer kreisförmigen Bewegung und einer Rotation. Im Sprachgebrauch bezeichnet man allerdings eine Bewegung als kreisförmig, wenn der Radius der Kreisbahn groß ist im Vergleich zu den Abmessungen des sich bewegenden Körpers; ist der Radius der kreisförmigen Bewegung hingegen in der gleichen Größenordnung wie die Länge des Körpers, so spricht man von einer Rotation.

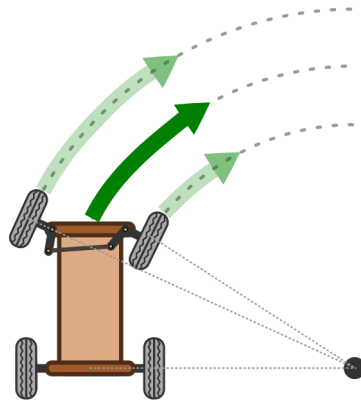


Abb. 10: Entlang einer Kreisbahn legen die Räder auf der Innen- und Außenspur unterschiedlich weite Strecken zurück.

Kreisförmige Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ändert sich ständig die Richtung, in die sich der Körper bewegt, jedoch nicht der Betrag seiner Geschwindigkeit. Eine volle Umdrehung entspricht dabei einem Winkel von $2 \cdot \pi = 360^\circ$, bei einer Umlaufbahn mit dem Radius r beträgt die dabei vom Körper zurückgelegte Strecke $s = 2 \cdot \pi \cdot r$.

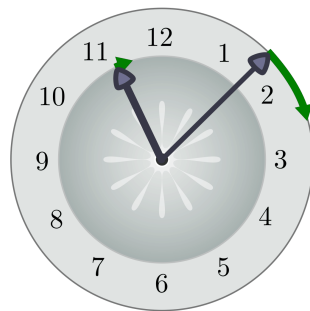


Abb. 11: Die Spitzen eines Uhrzeigers durchlaufen eine Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit.

Winkelgeschwindigkeit und Drehzahl

Bei einer kreisförmigen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit überstreicht der Ortsvektor des Körpers – ausgehend vom Mittelpunkt der Kreisbewegung – in gleichen Zeitabschnitten einen jeweils gleichen Winkel.

Definition:

Die Winkelgeschwindigkeit (auch „Drehgeschwindigkeit“ oder „Kreisfrequenz“ genannt) ω eines Körpers ist gleich dem Verhältnis aus dem durchlaufenen Winkel $\Delta\varphi$ und der dazu benötigten Zeit Δt :

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit wird häufig eine komplette Umdrehung ($\varphi = 360^\circ = 2 \cdot \pi$) in Relation zu der dafür benötigten Umlaufzeit T gesetzt:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (12)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist umso schneller, desto kleiner der Wert der Umlaufzeit T ist.

Einheit:

Die Winkelgeschwindigkeit ω wird in **Radian** je Sekunde (rad/s) angegeben ($1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$).

Die Winkelgeschwindigkeit ist, wie auch die Bahngeschwindigkeit, eine vektorielle Größe. Da bei einer gleichmäßigen Kreisbewegung die Winkelgeschwindigkeit konstant bleibt, existiert für diese nur eine mögliche Richtung, die ebenfalls unverändert bleibt, und zwar senkrecht zur Drehebene.

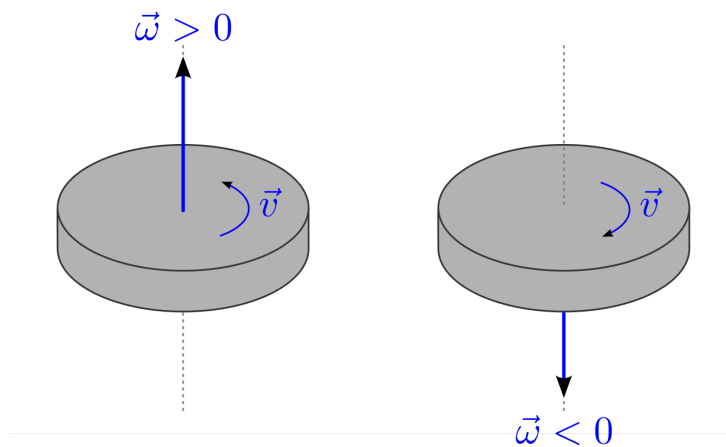


Abb. 12: Richtung der Winkelgeschwindigkeit bei einer Rotation oder kreisförmigen Bewegung.

Als Merkgel für die Orientierung von $\vec{\omega}$ kann die „Rechte-Hand-Regel“ genutzt werden: Zeigen die Finger der rechten Hand in Richtung der Drehbewegung, so zeigt der Daumen die Richtung der Winkelgeschwindigkeit an.

Neben der Winkelgeschwindigkeit wird bei Dreh- und Rotationsbewegungen häufig auch eine sogenannte „Drehzahl“ n angegeben, welche die Anzahl an vollständigen Umdrehungen je Zeiteinheit angibt. Zwischen der Drehzahl n und der Winkelgeschwindigkeit ω gilt folgender Zusammenhang:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

Der Faktor $2 \cdot \pi$ ergibt sich daraus, dass eine vollständige Umdrehung einem Winkel von $360^\circ = 2 \cdot \pi$ entspricht. Da Winkelangaben reine Zahlenwerte sind, wird eine Drehzahl von beispielsweise zehn Umdrehungen je Minute als $n = 10 \frac{1}{\text{min}}$ geschrieben. Wenn allerdings nur $10 \frac{1}{\text{min}}$ als Bezeichnung angegeben wird, so kann anhand der Einheit nicht zweifelsfrei abgelesen werden, ob damit eine Winkelgeschwindigkeit oder eine Drehzahl gemeint ist. In der Praxis wird die Drehzahl daher häufig in der Form $n = 10 \frac{\text{U}}{\text{min}}$ angegeben, wobei $\frac{\text{U}}{\text{min}}$ für „Umdrehungen je Minute“ steht.

Bahngeschwindigkeit

Je weiter ein rotierender Punkt oder ein sich auf einer Kreisbahn bewegendes Körper von der Rotationsachse entfernt ist, desto weitere Strecken legt er bei gleicher Winkelgeschwindigkeit zurück.

Definition:

Die Bahngeschwindigkeit v eines Körpers auf einer Kreisbahn ist gleich dem Produkt aus seiner Winkelgeschwindigkeit ω und dem Radius r der Kreisbahn:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \quad (13)$$

Einheit:

Die Bahngeschwindigkeit v in Meter je Sekunde (m/s) oder in Kilometer je Stunde (km/h) angegeben.

Radialbeschleunigung

Da sich die Richtung der Bahngeschwindigkeit eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω beziehungsweise konstanter Bahngeschwindigkeit v umlaufenden Punktes ständig ändert, erfährt jeder Körper auf einer Kreisbahn eine zeitlich konstante Radialbeschleunigung a_φ in Richtung des Kreismittelpunktes.

Definition:

Die Radialbeschleunigung a_{rad} ist direkt proportional zum Quadrat der Bahngeschwindigkeit v und umgekehrt proportional zum Kreisradius r :

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} \quad (14)$$

Einheit:

Die Zentripetalbeschleunigung a_{rad} wird in Meter je Quadratsekunde (m/s^2) angegeben.

Die obige Formel für die Radialbeschleunigung lässt sich herleiten, wenn man in einer schematischen Abbildung zu den zwei Ortspunkten P_1 und P_2 eines sich auf einer Kreisbahn bewegendem Körpers die zugehörigen Bahngeschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 einzeichnet. Diese ändern aufgrund der Radialbeschleunigung zwar ihre Richtung, jedoch nicht ihren Betrag, so dass $v_1 = v_2$ gilt. Beide Bahngeschwindigkeiten stehen zudem stets senkrecht zur jeweiligen Radiuslinie; bewegt sich also der Körper entlang der Kreisbahn um den Winkel φ weiter, so dreht sich auch sein Geschwindigkeitsvektor um den gleichen Winkel.

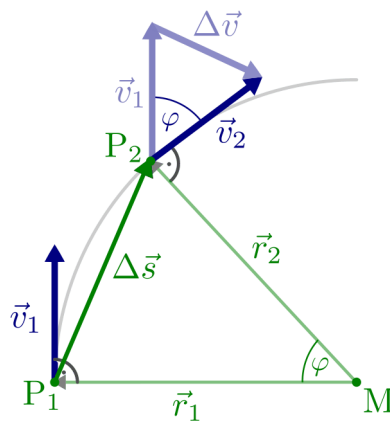


Abb. 13: Schematische Skizze zur Herleitung der Formel für die Radialbeschleunigung.

Da der Abstand $r_1 = r_2$ der Punkte P_1 und P_2 vom Kreismittelpunkt gleich ist, haben das grün dargestellte Orts-Dreieck und das blau dargestellte Geschwindigkeits-Dreieck neben dem gleichen Winkel φ zudem ein gleiches Längenverhältnis zweier Seiten, denn es gilt $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = 1$.¹ Beide Dreiecke sind also einander *ähnlich* und stimmen somit in den Längenverhältnissen aller Seiten überein. Folglich gilt:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r} \quad \text{oder} \quad \Delta v = \Delta s \cdot \frac{v}{r}$$

Setzt man diesen Ausdruck für die Geschwindigkeitsänderung Δv in Relation zur dafür benötigten Zeit Δt , so erhält man die Gleichung (14) für die Radialbeschleunigung:

$$a_{\text{rad}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r} = v \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$$

Auch bei einer konstanten Bahngeschwindigkeit ist eine Kreisbewegung stets eine beschleunigte Bewegung: Es ändert sich zwar nicht der Betrag $v = |\vec{v}|$ der Geschwindigkeit, dafür aber kontinuierlich ihre Richtung.

Kreisförmige Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

In gleicher Weise, wie eine Beschleunigung a eine Änderung der Geschwindigkeit v eines Körpers hervorruft, bewirkt eine Winkelbeschleunigung α eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit ω eines Körpers.

¹ Die Indizes der Bahngeschwindigkeiten können somit weggelassen werden, man kann also einfacher v für v_1 und v_2 sowie r für r_1 und r_2 schreiben.

Zwischen der Winkelbeschleunigung α und der in der Zeit Δt bewirkten Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ gilt folgender Zusammenhang:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (15)$$

Die Winkelbeschleunigung ist, wie auch die Winkelgeschwindigkeit, eine vektorielle Größe. Wird beispielsweise eine liegende Scheibe gegen den Uhrzeigersinn beschleunigt, so zeigt die Winkelbeschleunigung nach oben, andernfalls nach unten.² Allgemein kann wiederum die „Rechten-Hand-Regel“ genutzt werden: Zeigen die Finger der rechten Hand in die Beschleunigungsrichtung, so zeigt der Daumen die Richtung der Winkelbeschleunigung an.

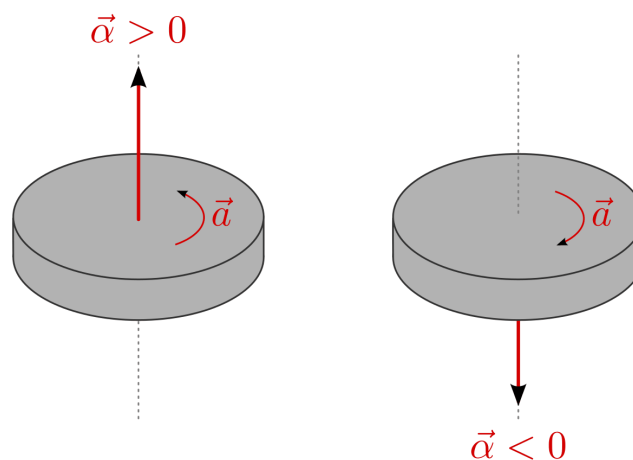


Abb. 14: Richtung der Winkelbeschleunigung bei einer Rotation oder kreisförmigen Bewegung.

Da sich bei einer Bewegung auf einer Kreisbahn der Radius r nicht ändert, gibt es einen weiteren Zusammenhang zwischen der Winkelbeschleunigung und der gewöhnlichen tangentialen *Beschleunigung* a :

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad (16)$$

Für den während der beschleunigten Kreisbewegung durchlaufenen Drehwinkel $\Delta\varphi$ gilt ebenfalls in Analogie zur beschleunigten geradlinigen Bewegung:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (\Delta t)^2 + \varphi_0 \quad (17)$$

Hierbei gibt φ_0 den anfänglichen Winkel der kreisförmigen Bewegung an.

² Ebenso ist die Winkelbeschleunigung negativ, wenn ein sich mit positiver Winkelgeschwindigkeit (gegen den Uhrzeigersinn) bewegendes Gegenstand auf der Kreisbahn abgebremst wird – er wird gleichermaßen in Gegenrichtung beschleunigt.

An einem rotierfähigen Gegenstand treten Winkelbeschleunigungen immer dann auf, wenn ein resultierendes *Drehmoment* M_{res} auf den Gegenstand einwirkt; für die Winkelbeschleunigung gilt dabei $\alpha = \frac{M_{\text{res}}}{I}$, wobei I für das *Trägheitsmoment* des Gegenstands steht.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Dynamik

Die Dynamik ist das Teilgebiet der Physik, in dem Kräfte und ihre Wirkung auf Körper untersucht werden.

Mechanische Kräfte

Kräfte erkennt man an den Wirkungen, die sie hervorrufen. Wird ein Körper verformt oder ändert sich seine Geschwindigkeit, so ist stets eine Kraft die Ursache dafür. Es können jedoch auch Kräfte wirken, ohne dass sich der Bewegungszustand eines Körpers ändert oder er (sichtbar) verformt wird. In diesem Fall heben sich mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte in ihrer Wirkung auf („*Zusammenwirken mehrerer Kräfte*“).



Abb. 15: Beim Bogenschießen wird die Sehne gespannt und dabei der Bogen elastisch verformt. Lässt man die Sehne los, so beschleunigt die Spannkraft des Bogens den Pfeil.

Die Newtonschen Gesetze

Die drei im folgenden kurz dargestellten Gesetzmäßigkeiten stellen die Basis der klassischen Mechanik dar. Sie wurden in dieser Form erstmals im Jahre 1687 von *Isaac Newton* niedergeschrieben.

Das 1. Newtonsche Gesetz („Trägheitsgesetz“)

Zur Änderung eines Bewegungszustands, d.h. zu einer *Beschleunigung*, ist stets eine Kraft nötig. Die Ursache dafür liegt in der sogenannten „Trägheit“, einer Eigenschaft eines jeden Körpers, sich aufgrund seiner Masse einer Beschleunigung zu widersetzen. Ursprünglich hatten Galileo Galilei und Isaac Newton diese Gesetzmäßigkeit etwa so formuliert:

„Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, solange keine äußeren Kräfte an ihm wirken.“¹

Wenn sich ein Körper mit einer festen Geschwindigkeit geradlinig bewegt, dann bleibt der Betrag und die Richtung der Bewegung konstant, bis eine Kraft eine Änderung seiner Bewegung bewirkt. Dass wir es im Alltag gewohnt sind, dass Gegenstände ohne beschleunigend wirkende Kräfte irgendwann von selbst zu Ruhe kommen, liegt an nie völlig vermeidbaren Reibungskräften und am Luftwiderstand. Im Weltall allerdings, in dem es aufgrund der Abwesenheit von Materie auch keine Reibung gibt, umkreisen die Planeten viele Millionen Jahre lang ihre Sonne(n), ohne ihre Geschwindigkeit zu verlieren.

Auch das Abbremsen eines Körpers entspricht einer (negativen) Beschleunigung und erfordert dementsprechend eine Kraft.

Das 2. Newtonsche Gesetz („Kraftgesetz“)

Als Kraft wird allgemein die Ursache einer Beschleunigung oder Verformung bezeichnet. Der quantitative Zusammenhang zwischen der Größe einer Kraft und der durch sie bewirkten Beschleunigung wurde erstmals durch Isaac Newton in Form einer mathematischen Gleichung beschreiben.

Formel:

Die Größe einer Kraft \vec{F} ist proportional zu der Beschleunigung \vec{a} , die ein Körper der Masse m durch sie erfährt:²

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (18)$$

Die Richtung der Beschleunigung \vec{a} stimmt mit der Richtung der beschleunigenden Kraft \vec{F} überein.

Einheit:

¹ In mathematischer Schreibweise bedeutet dies, dass der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} eines Körpers dann konstant bleibt, wenn die Summe aller n wirkenden Kräfte \vec{F}_i gleich Null ist:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \iff \quad \vec{v} = \text{konst.}$$

² Streng genommen gilt diese Definition nur dann, wenn die Masse m des Körpers konstant ist. In allgemeiner Form lässt sich die Kraft als *zeitliche Änderung des Impulses* eines Körpers definieren.

Kräfte werden in der Einheit Newton (N) angegeben:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Beispiele:

- Durch eine Kraft von 1 N erfährt ein Körper der Masse 1 kg eine Beschleunigung von $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Dies gilt im Weltall, im Vakuum, und allgemein immer dann, wenn keine Reibung auftritt. Durch *Reibungskräfte* kann die tatsächliche Beschleunigung in der Praxis deutlich geringer sein.

- 1 N entspricht auf der Erde der Gewichtskraft eines 100 g schweren Körpers.

Eine Masse von 1 kg erfährt auf der Erde eine Gewichtskraft von rund 10 N. Im freien Fall übt die Erde damit eine Beschleunigung von rund $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (genauer: $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) auf sie aus.

Kräfte werden nach ihrer Ursache (Muskelkraft, Magnetkraft, Motorkraft, usw.) oder nach ihrer Wirkung (Zugkraft, Druckkraft, Antriebskraft, Verformungskraft, usw.) benannt.

Tab. 4: Beispiele für Kräfte in Natur und Technik

Kraft	Betrag der Kraft in N
Gewichtskraft eines Normalbriefes	0,2
Gewichtskraft einer Tafel Schokolade	1
Gewichtskraft von einem Liter Wasser	10
Gewichtskraft von einem Kilogramm Zucker	10
Gewichtskraft eines Menschen	ca. 700
Zugkraft eines PKW	ca. 5000
Zugkraft einer Lokomotive	ca. 15000
Anziehungskraft der Erde auf den Mond	$2 \cdot 10^{20}$

Das 3. Newtonsche Gesetz („Kraft und Gegenkraft“)

Zu jeder Kraft gehört eine gleich große Gegenkraft. Kraft und Gegenkraft haben entgegengesetzte Richtungen und wirken auf verschiedene Körper ein – sie können sich somit nicht gegenseitig aufheben.

$$F_{A \rightarrow B} = -F_{B \rightarrow A}$$

Beispiel:

- Ein Gewicht hängt an einem Faden. Der Faden verhindert das Fallen des Probekörpers. In ihm wirkt eine Kraft, die so groß wie das Gewicht des Körpers ist. Beide Kräfte unterscheiden sich aber durch ihre Richtung. Die Kraft im Faden und das Gewicht haben entgegengesetzte Richtungen, sie heben sich in ihrer Wirkung auf.

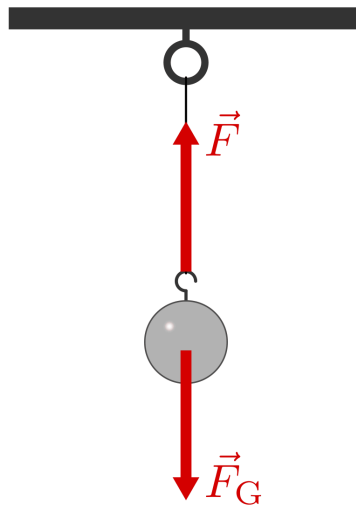


Abb. 16: Kraft und Gegenkraft an einem hängenden Gewichtstück.

Schneidet man den Faden durch, so führt der Körper durch die Anziehungskraft der Erde eine geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung aus (Luftwiderstand wird vernachlässigt). Da alle Kräfte wechselseitig wirken, zieht der Körper auch die Erde an. Die Erde „fällt“ somit auch auf den Körper zu – die Wirkung ist allerdings so gering, dass wir davon nichts merken.

Betrag, Wirkungslinie und Angriffspunkt

Um die Wirkung einer Kraft vorhersagen zu können, muss man nicht nur die Größe (den „Betrag“) einer Kraft kennen, sondern auch wissen, an welchem Punkt sie angreift und in welche Richtung sie wirkt.

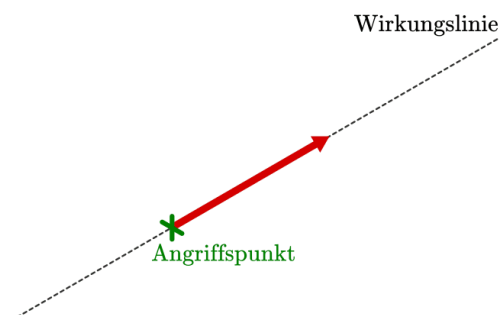


Abb. 17: Ein Kraftvektor ist durch seinen Betrag, seine Wirkungslinie und seinen Angriffspunkt eindeutig definiert.

In Koordinatensystemen und Zeichnungen werden Kräfte meist durch Pfeile („Vektoren“) dargestellt. Dabei gilt:

- Die Länge des Pfeils gibt in einem bestimmten Maßstab (beispielsweise $1\text{ N} = 1\text{ cm}$) den Betrag der Kraft an. Die Wahl des Maßstabs ist beliebig, muss aber für alle Kräfte einer Zeichnung gleichermaßen gelten.
- Der Anfangspunkt des Pfeils ist gleich dem Angriffspunkt der Kraft.
- Die Richtung des Pfeils entspricht der Wirkungslinie der Kraft.

Entlang der Wirkungslinie kann der Kraftvektor bei geeigneter Kraftübertragung beliebig verschoben werden, ohne dass sich an der physikalischen Wirkung der Kraft etwas ändert.

Kraftübertragung mit Seil, Stange und Kette

In vielen Fällen ist es nützlich, eine Kraft „aus der Entfernung“ wirken zu lassen, also ihren Angriffspunkt entlang ihrer Wirkungslinie zu verschieben.

- Mittels Seilen und Ketten lassen sich Zugkräfte auf einen anderen Körper übertragen,
- Mittels Stangen – und bedingt auch mit Drähten – können sowohl Zugkräfte als auch Druckkräfte auf einen anderen Körper übertragen werden.

In Getrieben werden üblicherweise *Zahnräder und Zahnstangen* zur Kraftübertragung verwendet.

Verformung und Elastizität

Kräfte können neben der Geschwindigkeit auch die Form eines Körpers verändern. Je nach Material des Körpers sind Verformungen auf zweierlei Arten möglich:

- *Elastische* Verformung:

Bei einem elastischen Vorgang bildet sich die Verformung eines Körpers zurück, wenn die verformende Kraft nachlässt. Ein typisches elastisches Material ist Gummi, doch auch viele Metalle (beispielsweise Stahl) wirken bei nicht zu großer Krafteinwirkung elastisch.

Beispiel: Ein Gummiball nimmt, wenn keine Kräfte mehr auf ihn einwirken, wieder seine ursprüngliche Form ein.

- *Plastische* Verformung:

Bei einem plastischen Vorgang bleibt die Verformung bestehen, wenn Kraft nicht mehr wirkt. Typische plastische Materialien sind Knetmasse, Wachs, Lehm, Blei, usw.

Beispiel: Die Verformung einer zusammengedrückten Kugel aus Wachs oder Knetmasse bleibt bestehen.

Es gibt keinen Stoff, der vollkommen elastisch oder vollkommen unelastisch ist. Wirken nur geringe Kräfte, so verhält sich beispielsweise Kupfer elastisch. Bei großen Kräften verhält es sich plastisch.

Kraftmessung

Zur mechanischen Kraftmessung wird häufig die verformende Wirkung der Kraft genutzt. Je stärker man beispielsweise eine Schraubenfeder verdreht oder sie auseinander zieht, desto größer wird die Spannkraft, mit welcher die Feder sich der Verformung widersetzt. Ist an einer Feder eine geeignete Skala vorhanden, kann die auf sie wirkende Kraft somit direkt abgelesen werden. Da eine Feder nicht beliebig gedehnt werden kann, gibt es Federkraftmesser mit verschiedenen Federhärten und Skalen, die sich für verschiedene Messbereiche eignen.



Abb. 18: Beispiel eines Federkraftmessers.

Bei sich bewegenden Körpern, beispielsweise Autos, kann man die Kraft anhand einer Geschwindigkeitsänderung des Körper bestimmen – hierzu muss allerdings die Masse m des Körpers bekannt sein. Misst man die Geschwindigkeitsänderung Δv und die dafür benötigte Zeit Δt , so kann man die Beschleunigung $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ berechnen und erhält durch Einsetzen in Gleichung (18) die wirkende Kraft F :

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Scheinkräfte

Mit Hilfe der Newtonschen Gesetze lässt sich die Bewegung eines Körpers in einem ruhenden oder sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinigen Bezugssystem (einem so genannten „Inertialsystem“) hinreichend beschreiben. In einem beschleunigten Bezugssystem sind zur Beschreibung von Bewegungen jedoch so genannte „Scheinkräfte“ zu berücksichtigen.

Befindet man sich beispielsweise in einem sich gleichmäßig bewegenden oder stehenden Eisenbahnwagen und wirft einen Ball senkrecht in die Luft, so landet dieser auch wieder in der eigenen Hand. Beschleunigt der Zug jedoch, nachdem der Ball die Hand verlassen

hatte, so scheint dieser aus der Perspektive des mit dem Zug beschleunigten Werfers im Lauf des Flugs von der Hand weg zu bewegen. Während also für einen außen stehenden Beobachter sich der Zug unter dem sich in horizontaler Richtung gleichförmig bewegenden Ball wegbewegt, muss ein Beobachter im Zug sich eine der Beschleunigung des Zugs entgegengesetzte Kraft auf den Ball hinzu denken, um die Bewegung des Balls richtig vorhersagen können.

Eine nur in einem beschleunigten Bezugssystem auftretende Kraft wird als Scheinkraft bezeichnet. Sie ist gleich dem Produkt aus der Masse m des beschleunigten Gegenstands und einer zur Beschleunigung des Bezugssystems a gleich großen, aber in die entgegengesetzte Richtung wirkenden Beschleunigung $-a$:

$$\vec{F}_T = -m \cdot a$$

Eine wichtige Scheinkraft ist die Trägheitskraft F_T , die beispielsweise beim Beschleunigen oder Abbremsen von Fahrzeugen auftritt. Ein Sonderfall dieser Trägheitswirkung ist die *Zentrifugalkraft* bei einer kreisförmigen Bewegung. Trägheitskräfte werden auch in technischen Anwendungen genutzt, wenn durch ein schnelles Abbremsen eines Objekts eine große Kraft erzielt werden soll, beispielsweise beim Hämmern, Pressen, usw.

D'Alembertsches Prinzip

Befindet sich ein Beobachter gemeinsam mit dem beobachteten Objekt in einem beschleunigten Bezugssystem, so erfährt dieser die gleiche Beschleunigung a wie das Objekt selbst. Aus Sicht dieses Beobachters befindet sich das Objekt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit; die auf das Objekt wirkenden Kräfte addieren sich aus Sicht des mitbeschleunigten Beobachters somit zu Null.

Aus Sicht eines ruhenden Beobachters unterscheidet sich die Dynamik des Objekts (gegenüber der Perspektive eines mitbeschleunigten Beobachters) lediglich um die Trägheitskraft $F_T = -m \cdot a$. Somit muss in einem ruhenden Bezugssystem für die am Objekt wirkenden Kräfte gelten:

$$\sum_{i=1}^n F_i + F_T = \sum_{i=1}^n F_i - m \cdot a = 0$$

Diese Gleichung ist nach ihrem Entdecker benannt und wird allgemein als D'Alembertsches Prinzip bezeichnet. Es kann genutzt werden, um dynamische Vorgänge auf statische Gleichgewichtsbedingungen zurückführen und somit einfacher berechnen zu können.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Zusammenwirken mehrerer Kräfte

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper ein, so kann man sich diese als zu einer Gesamtkraft zusammengesetzt denken. Die Gesamtkraft F_{ges} hat auf den Körper die gleiche Wirkung wie die gemeinsame Wirkung der n einzelnen (Teil-)Kräfte.

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (19)$$

Will man die Wirkung mehrerer Kräfte auf einen Körper angeben, müssen Betrag und Richtung jeder Kraft bekannt sein.

Zusammenwirken mehrerer Kräfte mit gleicher Richtung

Wirken zwei Teilkräfte in die gleiche Richtung, so erhält man die Gesamtkraft, indem man die Beträge der Teilkräfte addiert. Die Gesamtkraft zeigt in die gleiche Richtung wie die einzelnen Teilkräfte.

Beispiel:

- Die Gewichtskraft, die ein Stapel Teller auf eine Unterlage ausübt, ist gleich der Summe der Gewichtskräfte der einzelnen Teller.

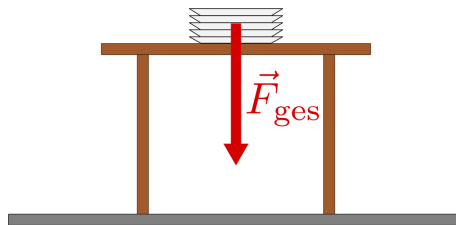


Abb. 19: Kraftaddition mehrerer Teilkräfte zu einer Gesamtkraft.

Wirken zwei Teilkräfte in die entgegengesetzte Richtung, so erhält man die Gesamtkraft, indem man die Differenz aus den Beträgen der Teilkräfte bildet. Die Gesamtkraft zeigt in Richtung der größeren der beiden Teilkräfte.

Beispiel:

- Zieht beim Seilziehen eine Gruppe stärker als die andere, so bewegen sich alle Teilnehmer in die Richtung der stärkeren Kraft. Die Gesamtkraft, mit der alle Teilnehmer beschleunigt werden, ist gleich dem Kraftunterschied beider Gruppen. (Ziehen beide Gruppen gleich stark, so sind beide Kräfte im Gleichgewicht, und kein Körper wird beschleunigt.)

Zusammenwirken mehrerer Kräfte mit unterschiedlicher Richtung

Wirken an einem Punkt mehrere Kräfte in unterschiedlicher Richtung, so sind für die Bestimmung der resultierenden Kraft die Beträge wie auch die Richtungen der einzelnen Teilkräfte zu berücksichtigen. In Zeichnungen lassen sich die wirkenden Teilkräfte wiederum als Vektorpfeile darstellen; dabei müssen die Längen der Vektoren zueinander in einem frei wählbaren Maßstab den Beträgen der einzelnen Kräfte entsprechen.

Beispiel:

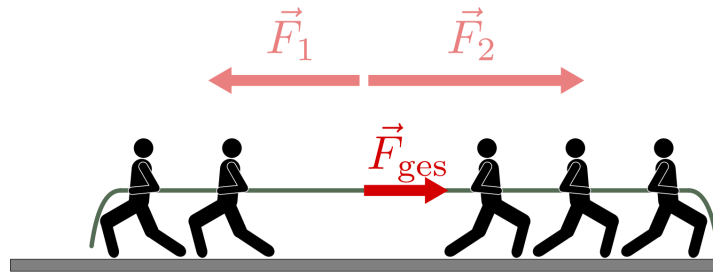


Abb. 20: Kraftaddition mehrerer Kräfte mit entgegengesetzter Richtung.

- Soll ein Schiff von einem anderen ohne Abdrift über einen Fluss gezogen werden, so muss die Kraft des ziehenden Schiffes auch die Schubkraft des fließenden Wassers ausgleichen.

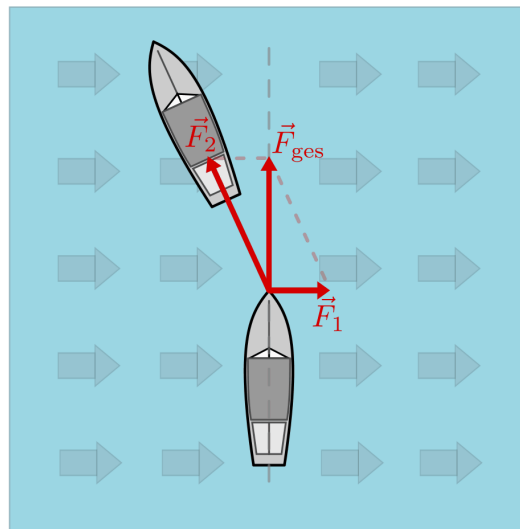


Abb. 21: Kraftaddition mehrerer Kräfte mit unterschiedlichen Richtungen.

Die sich aus zwei Teilkräften ergebende Gesamtkraft kann zeichnerisch ermittelt werden, indem beide Vektorpfeile addiert werden, d.h. der Anfangspunkt des einen Vektors an die Spitze des anderen Vektors verschoben wird. Die Verbindungslinie vom gemeinsamen Angriffspunkt zum sich so ergebenden Endpunkt entspricht dann der resultierenden Gesamtkraft.¹

Rechnerisch erhält man die sich aus zwei Teilkräften \vec{F}_1 und \vec{F}_2 ergebende Gesamtkraft \vec{F}_{ges} , indem man die einzelnen Komponenten beider Kraftvektoren miteinander addiert:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{z,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ F_{z,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x,1} + F_{x,2} \\ F_{y,1} + F_{y,2} \\ F_{z,1} + F_{z,2} \end{pmatrix}$$

¹ Wirken an einem gemeinsamen Angriffspunkt mehr als zwei Kräfte in unterschiedliche Richtungen, so kann die resultierende Gesamtkraft graphisch ermittelt werden, indem alle Vektorpfeile durch paralleles Verschieben so miteinander verbunden werden, dass der Anfangspunkt des zweiten Vektors am Endpunkt des ersten liegt, der Anfangspunkt des dritten Vektors am Endpunkt des zweiten liegt, usw. Der Vektor vom Anfangspunkt der Vektorkette zu ihrem Endpunkt entspricht der wirkenden Gesamtkraft.

Der Betrag der wirkenden Gesamtkraft ist auch hierbei gleich dem Betrag des Ergebnisvektors, der sich gemäß folgender Formel berechnen lässt:

$$F_{\text{ges}} = |\vec{F}_{\text{ges}}| = \sqrt{F_{\text{ges},x}^2 + F_{\text{ges},y}^2 + F_{\text{ges},3}^2}$$

Zerlegung einer Kraft in Teilkräfte

In gleicher Art und Weise, wie sich mehrere Kräfte zu einer Gesamtkraft addieren lassen, kann man eine Kraft auch in mehrere Teilkräfte aufteilen, die gemeinsam eine gleiche Wirkung hervorrufen.

Beispiel:

- Eine Straßenlampe wird von zwei Halteseilen getragen. Diese können nur Zugkräfte vermitteln, d.h. die Teilkräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 in den Seilen müssen entlang der Seilrichtungen verlaufen; die Summe beider Teilkräfte wiederum muss der Gewichtskraft \vec{F}_G der Lampe entsprechen.

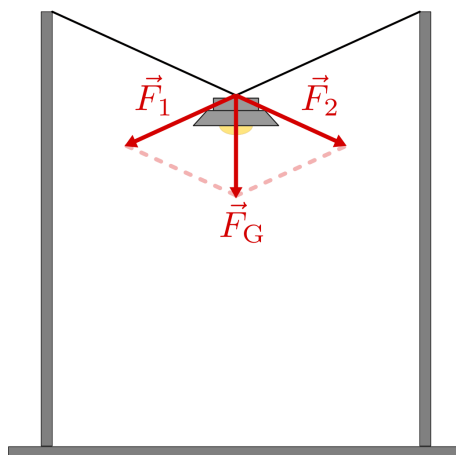


Abb. 22: Kraftzerlegung einer Kraft in zwei Teilkräfte.

Um eine Kraft in zwei gegebene Richtungen zu zerlegen, zeichnet man vom Anfangs- und Endpunkt der Kraft Parallelen zu diesen Richtungen. Das entstehende Parallelogramm ergibt die gesuchten Teilkräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 .

Kennt man die Winkel α und β zwischen der zu zerlegenden Kraft \vec{F} und den beiden Teilkräften \vec{F}_1 und \vec{F}_2 , so gilt für die Beträge F_1 und F_2 der Teilkräfte:

$$F_1 = F \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$F_2 = F \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Betragsmäßig ist die Summe $F_1 + F_2$ der Teilkraftbeträge, sofern die Winkel α bzw. β nicht gleich Null sind, stets größer als der Betrag F der zu zerlegenden Kraft.

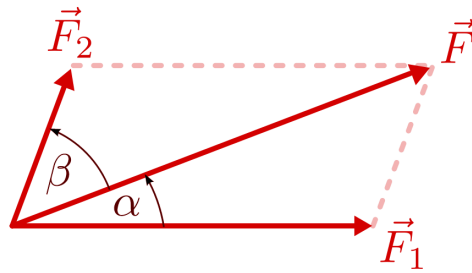


Abb. 23: Kraftzerlegung einer Kraft bei bekannten Winkeln α und β .

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Arten mechanischer Kräfte

Bei einer mechanischen Kraft denkt man häufig an Muskelkraft oder die Kraft eines Motors; weitere mechanische Kräfte, für die es jeweils eigene Formeln als Rechengrundlage gibt, sind im folgenden Abschnitt näher beschrieben.

Gewichtskraft

Die Gewichtskraft eines Objekts ist diejenige Kraft, mit der es von der Erde angezogen wird.

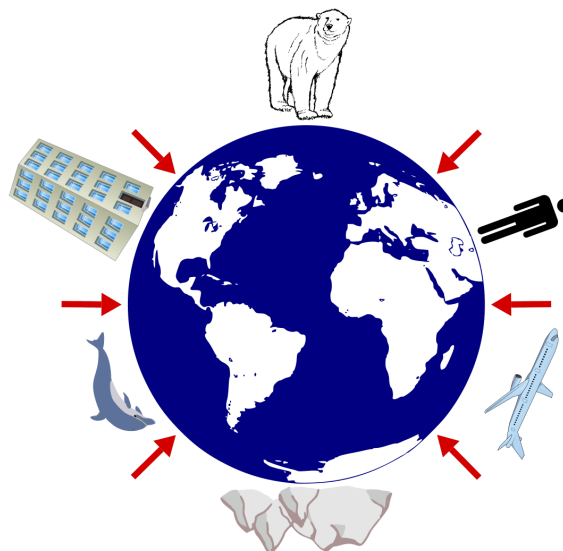


Abb. 24: Die Richtung der Gewichtskraft auf der Erde.

Je größer die Masse eines Objekts ist, desto stärker wird es von der Erde angezogen. Bei einer größeren Masse ist allerdings auch eine größere Kraft nötig, um sie zu beschleunigen;

ohne Luftwiderstand werden daher alle Objekte, die sich im freien Fall befinden, gleich schnell zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt.

Formel:

Der Wert der Gewichtskraft F_G , die ein Objekt der Masse m durch die Anziehungskraft eines Planeten erfährt, ist proportional zum so genannten Ortsfaktor \vec{g} .¹

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} \quad (20)$$

Auf der Erdoberfläche gilt für den Ortsfaktor, wie sich aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz ableiten lässt, näherungsweise $g = |\vec{g}| = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$.²

Beispiele:

- Ein Objekt mit einer Masse von 1,0 kg hat auf der Erde eine Gewichtskraft von

$$F_{G,\text{Erde}} = m \cdot g = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9,81 \text{ N}$$

- Ein Objekt mit einer Masse von 50 kg hat auf der Erde eine Gewichtskraft von

$$F_{G,\text{Erde}} = 50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 490,5 \text{ N}$$

¹ Der Ortsfaktor $g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ wird bisweilen auch als *Erdbeschleunigung* bezeichnet. Er gibt diejenige Beschleunigung an, die ein Körper im freien Fall in Erdnähe erfährt, sofern der Luftwiderstand vernachlässigbar ist. Die Gleichheit der Einheiten ergibt sich aus dem *Newtonschen Kraftgesetz*:

$$\text{N} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \iff \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Der Ortsfaktor kann somit einerseits als Beschleunigungs-Wert aufgefasst werden (wenn sich ein Objekt im freien Fall befindet) als auch als Umrechnungsfaktor zwischen der Masse m und der Gewichtskraft F_G : $1 \text{ kg} \hat{=} 9,81 \text{ N}$.

² Genau genommen ist die obige Formel eine Näherung für das allgemeine Gravitationsgesetz, wonach auf zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 stets eine anziehende Kraft F_G wirkt. Ihr Betrag ist von den beiden Massen sowie vom Abstand r zwischen ihren Schwerpunkten abhängig:

$$F_G = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Dabei ist $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ die allgemeine Gravitationskonstante. Für die Gewichtskraft, die ein Körper in Nähe der Erdoberfläche erfährt, kann näherungsweise und $r \approx r_E = 6371 \text{ km}$ gesetzt werden (der Abstand eines Gegenstands von der Erdoberfläche ist meist vernachlässigbar klein gegenüber dem Erdradius). Mit der Erdmasse $m_E = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ kann der Ortsfaktor g somit folgendermaßen definiert werden:

$$g = \gamma \cdot \frac{m_E}{r_E^2} \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Für die Gewichtskraft eines Körpers m auf der Erde gilt damit in guter Näherung:

$$F_G = \gamma \cdot \frac{m \cdot m_E}{r_E^2} \approx m \cdot g$$

Das Gewicht eines Objekts ist nicht an allen Stellen auf der Erde exakt gleich, sondern hängt vom Ort ab, an dem es sich befindet:

- Auf einem hohen Berg hat ein Objekt ein etwas geringeres Gewicht als in Höhe des Meeresspiegels.
- An verschiedenen Stellen der Erde hat jedes Objekt – da die Erde keine ideale Kugelgestalt hat, sondern zu den Polen hin etwas „abgeflacht“ ist – ebenfalls ein geringfügig unterschiedliches Gewicht. Im Vergleich zu Mitteleuropa ist ein Objekt am Äquator etwas leichter, an den Polen etwas schwerer.
- Auf dem Mond oder auf anderen Planeten hängt die Gewichtskraft, die ein Objekt erfährt, von der Masse des jeweiligen Himmelskörpers ab: Je schwerer ein Planet ist, desto größer ist die Anziehungskraft, die er auf andere Massen ausübt.

Ort	Ortsfaktor in $\frac{\text{N}}{\text{kg}}$
Äquator	9,78
Mitteleuropa	9,81
Pole der Erde	9,83
300 km über der Erde	8,96
40 000 km über der Erde	0,19
Mond der Erde	1,60
Venus	8,87
Mars	3,69
Merkur	3,70
Jupiter	24,79
Saturn	10,44
Sonne	274

Auf dem Mond hat ein Objekt der Masse 1 kg eine Gewichtskraft von

$$F_{G,\text{Mond}} = 1 \text{ kg} \cdot 1,62 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1,62 \text{ N}$$

Auf der Sonne erfährt ein Objekt der Masse 1 kg eine Gewichtskraft von

$$F_{G,\text{Sonne}} = 1 \text{ kg} \cdot 274 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 274 \text{ N}$$

Im Universum haben Objekte also überall die gleiche Masse, jedoch nicht das gleiche Gewicht.

Reibungskraft

Erfahrungsgemäß kommt jedes bewegte Objekt, das nicht angetrieben wird, nach einer gewissen Zeit zur Ruhe. Da seine Geschwindigkeit abnimmt, muss eine bremsende Kraft wirken. Eine derartige Kraft nennt man Reibungskraft F_R .

Reibungskräfte treten immer auf, wenn sich Objekte berühren und gegeneinander bewegen. Ursache dafür sind die unebenen Oberflächen der Objekte und Kohäsionskräfte, die zwischen den Molekülen der aneinander reibenden Objekte wirken.

Haftreibung

Bei starker Vergrößerung gleicht selbst eine geschliffene Oberfläche einem kleinen Gebirge mit vielen Zacken und Spitzen. Haften zwei Objekte aneinander, so verhaken sich diese Spitzen ineinander. Versucht man die Objekte gegeneinander zu bewegen, so werden die Zacken etwas verformt; einer stärkeren Zugkraft wirkt eine stärkere Haftreibungskraft entgegen.

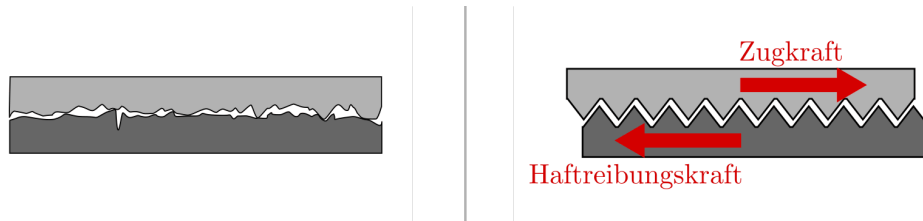


Abb. 25: Stark vergrößerte Darstellung der Oberfläche von gleitenden Körpern und Modelldarstellung der Haftreibung.

Je stärker zwei Objekte aneinander gepresst sind, desto stärker ist die maximale Haftreibungskraft (als anschauliches Beispiel kann man zwei Bürsten ineinander stecken und versuchen sie gegeneinander zu bewegen).

Formel:

Haften zwei Objekte aneinander, so ist der Betrag der maximalen Haftreibungskraft $F_{R,Haft,max.}$ proportional zu der Normalkraft F_{\perp} , die beide Körper aneinander presst:

$$F_{R,Haft,max.} = \mu_H \cdot F_{\perp}$$

Die Proportionalitätskonstante heißt Haftreibungszahl μ_H und hängt vom Stoff und von der Oberflächenbeschaffenheit der Objekte ab. Ist die angreifende Kraft größer als die maximale Haftreibungskraft, so beginnen die Objekte relativ zueinander zu gleiten.

Tab. 5: Haft- und Gleitreibungszahlen einiger Materialien

Stoffpaar	Haftreibungszahl μ_H	Gleitreibungszahl μ_H
Holz auf Holz	0,5 bis 0,6	0,2 bis 0,4
Stahl auf Stahl	0,15	0,06
Stahl auf Eis	0,03	0,01
Autoreifen auf Beton (trocken)	1,00	0,60
Autoreifen auf Beton (nass)	0,50	0,30
Autoreifen auf Eis	0,10	0,05

Gleitreibung

Bewegen sich zwei Objekte gegeneinander, so schlittern die rauhen Oberflächen übereinander hinweg. Sie können sich – anders als bei der Haftreibung – nicht völlig ineinander verhaken.

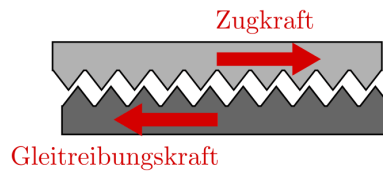


Abb. 26: Modelldarstellung der Gleitreibung.

Formel:

Die Gleitreibungskraft $F_{R,Gleit}$ hängt – wie auch die Haftreibungskraft – von der zusammenpressenden Gewichts- oder Normalkraft F_{\perp} und der Oberflächenbeschaffenheit der Objekte ab:

$$F_{R,Gleit} = \mu_G \cdot F_{\perp}$$

Die Gleitreibungszahl μ_G ist stets kleiner als die *Haftreibungszahl* μ_H .

Rollreibung

Rollt ein Objekt auf dem anderen entlang, so können die Unebenheiten der Oberflächen deutlich leichter überwunden werden. Die Rollreibungskraft ist bei gleicher zusammenpressender (Gewichts-)Kraft wesentlich kleiner als die Gleitreibungskraft.

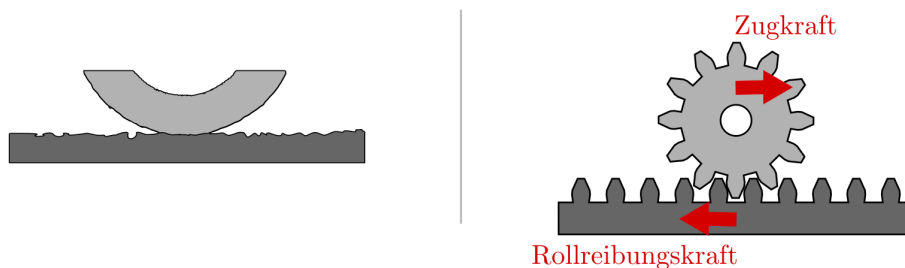


Abb. 27: Stark vergrößerte Darstellung eines auf einer Unterlage abrollenden Rades und Modellvorstellung der Rollreibung.

Um unerwünschte Reibungskräfte zu verringern, verwendet man Schmiermittel (Fett, Öl). Dadurch wird der Raum zwischen den sich reibenden Flächen ausgefüllt, so dass sich die Unebenheiten der Körper nicht mehr so störend auswirken.

Tab. 6: Rollreibungszahlen einiger Materialien

Stoffpaar	Rollreibungszahl μ_R
Eisen auf Eisen	circa 0,005
Kugeln im Kugellager	circa 0,001

In sehr vielen Fällen sind Reibungskräfte allerdings unerlässlich: Ohne Reibungskräfte zwischen den Rädern von Fahrzeugen und der Straße wäre eine gezielte Fortbewegung unmöglich: Die Räder würden durchdrehen. Um ihnen vielmehr eine möglichst gute Straßenlage zu geben, werden die Reifen aus Spezialgummi gefertigt und mit Profilen versehen. Ohne Reibung wären auch Bremsen oder gar Klebstoffe unmöglich.

Strömungswiderstand

Bewegt sich ein Objekt durch ein flüssiges oder gasförmiges Medium, so muss es stets einen Strömungswiderstand (beispielsweise Luftwiderstand) überwinden. Hierbei hängt die Größe der Widerstandskraft von der Dichte ρ des durchquerten Mediums, der Querschnittsfläche A des Körpers, dem Quadrat seiner Geschwindigkeit v^2 sowie einem so genannten „Widerstandsbeiwert“ c_w ab; letzterer gibt den Einfluss der Objektform an.

Beispielsweise gilt für die Luftwiderstandskraft F_L näherungsweise folgende Formel:³

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho_L \cdot A \cdot v^2$$

Bei üblichen Straßenfahrzeugen kann der Widerstandsbeiwert im optimalen Falle 0,09 betragen, bei Omnibussen sind Werte bis zu 0,6 üblich.

Gegenstand	c_w -Wert
Halbkugel (konkav), Fallschirm	1,33
Rechteckige Platte	1,1 bis 1,3
Kreisförmige Platte	1,11
Mensch (stehend)	0,78
LKW	0,6 bis 0,9
Fahrradfahrer (Mountainbike)	0,5 bis 0,7
Kugel	0,25 bis 0,45
Halbkugel (konvex)	0,34
Tropfen (Stromlinienform)	0,02

Die Dichte der Luft beträgt unter Normalbedingungen $\rho_{\text{Luft}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$. Für die Berechnung der Wasserwiderstandskraft muss mit der entsprechend höheren Dichte von Wasser ($\rho_{\text{Wasser}} = 1000 \text{ kg/m}^3$) gerechnet werden.

³ Bei turbulenten Strömungen mit komplexen Luftverwirbelungen lässt sich der Luftwiderstand nicht mit Hilfe einer einzelnen Formel berechnen, sondern erfordert aufwendige Computer-Simulationen und numerische Verfahren.

Die Formel $F_{LW} = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot v^2 \cdot A \cdot c_w$ lässt sich aus dem Zusammenhang $F = p_{\text{dyn}} \cdot A$ zwischen Kraft, *dynamischem Druck* und Fläche herleiten; der Luftwiderstandsbeiwert ist als reiner Zahlenwert lediglich ein zusätzlicher Gewichtungsfaktor.

Spannkraft

Drückt man einen elastischen Gegenstand, beispielsweise eine Schraubenfeder, zusammen oder zieht ihn auseinander, so wirkt in ihm eine entgegengesetzt gerichtete Kraft, die ihn wieder auf ihre ursprüngliche Länge zurück zu formen versucht.

Formel:

Je weiter die Wegstrecke s ist, um die eine Schraubenfeder gestaucht oder gedehnt wird, desto stärker ist die rückstellende Spannkraft F_S der Feder.

$$\vec{F}_S = -D \cdot \vec{s} \quad (21)$$

Die Federkonstante D ist dabei von der Form und dem Material der Feder beziehungsweise des elastischen Körpers abhängig. Die Federkonstante (und damit die Federhärte) einer Schraubenfeder ist beispielsweise umso größer, je dicker der Draht ist und je enger er gewickelt ist; sie wird im Allgemeinen in Newton je Meter (N/m) angegeben.

Das Minuszeichen in Gleichung (21) bedeutet, dass die Richtung der Auslenkung der Feder s von ihrer Ruhelage der Richtung der Federkraft entgegengesetzt ist. Gleichung (21) wird zu Ehren ihres Entdeckers, [Robert Hooke](#), auch als „Hookesches Gesetz“ bezeichnet.

Radialkraft

Ein Körper bewegt sich aufgrund seiner Masse stets entlang einer geradlinigen Bahn, wenn keine Kraft auf ihn einwirkt. Eine *kreisförmige Bewegung* ist somit nur möglich, wenn eine Kraft den Körper auf der Kreisbahn hält, also ihn kontinuierlich zum Kreismittelpunkt hin beschleunigt. Diese Kraft wird Radialkraft beziehungsweise Zentripetalkraft genannt.

Für den Betrag der Radialkraft gilt ebenfalls das *Kraftgesetz* $F = m \cdot a$. Mit der *Radialbeschleunigung* $a = \frac{v^2}{r}$ folgt für die Radialkraft F_{rad} :

$$F_{\text{rad}} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Befindet man sich als Beobachter selbst auf einer Kreisbahn, so nimmt man hingegen die entsprechende Gegenkraft („Zentrifugalkraft“) wahr. Sitzt man beispielsweise in einem Fahrzeug, das nach links lenkt, so scheint eine Kraft zu wirken, die den eigenen Körper zur rechten Seite hin beschleunigt (*Scheinkraft*). In Wirklichkeit versucht man sich aufgrund der Trägheit geradeaus zu bewegen und wird erst durch die zum Kreismittelpunkt hin wirkende Radialkraft auf die Kreisbahn gezwungen.

Technisch wird die Radialkraft beispielsweise in Zentrifugen genutzt. Dabei wird ein zu trennendes Gemisch an Substanzen, die sich beispielsweise in einem Reagenzglas befinden, in eine Kreisbewegung mit hoher Winkelgeschwindigkeit und kleinem Bahnradius versetzt. Das Stoffgemisch wird dabei gemäß seiner Dichte-Anteile aufgetrennt, die „schwereren“ Substanzen bewegen sich dabei aufgrund ihrer Trägheit nach außen und lagern sich so am Boden des rotierenden Gefäßes ab. Diese Schichtung bleibt auch nach einem Abschalten der Zentrifuge bestehen, da letztlich nichts anderes als ein Sedimentationsvorgang stattgefunden hat – nur ein sehr schneller. Die durch die Radialkraft bewirkte Radialbeschleunigung kann mit Zentrifugen beziehungsweise Ultrazentrifugen ein 100- bis 250 000-faches der Erdbeschleunigung g betragen.

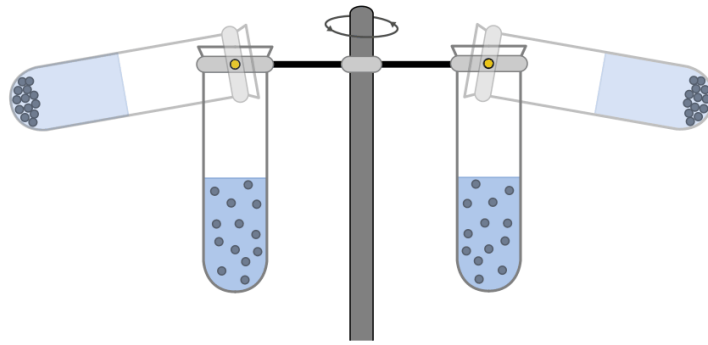


Abb. 28: Modell einer einfachen Zentrifuge.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Drehmoment und Gleichgewicht

Drehmoment

Wirkt eine Kraft auf einen starren Körper, so kann sie sowohl eine Verschiebung (*Translation*) als auch eine Drehung (*Rotation*) bewirken. Für die Drehbewegung des Körpers ist dabei nur derjenige Anteil der Kraft von Bedeutung, dessen Wirkungslinie senkrecht zur Linie zwischen Drehachse und Angriffspunkt der Kraft steht.

Definition:

Wirkt eine Kraft \vec{F} im senkrechten Abstand \vec{s} von einer festen Drehachse, so erzeugt sie ein Drehmoment \vec{M} , für das gilt:

$$\vec{M} = \vec{s} \times \vec{F}$$

$$M = s \cdot F \cdot \sin \alpha$$

Hierbei bezeichnet α den Winkel zwischen der Krafrichtung und der Verbindungslinie vom Drehzentrum zum Angriffspunkt der Kraft.

Das Drehmoment ist als *Vektorprodukt* seinem Betrag nach maximal, wenn die Kraft \vec{F} senkrecht zur Strecke \vec{s} zwischen Angriffspunkt und Drehachse auf den Körper einwirkt. Wirkt die Kraft entlang dieser Verbindungslinie, so ist der Betrag des Drehmoments gleich Null.

Einheit:

Die Einheit des Drehmoments ist – gemäß seiner Definition – das Newtonmeter (Nm). Ein Newtonmeter entspricht demjenigen Drehmoment, das eine Kraft $F = 1 \text{ N}$ im senkrechten Abstand $s = 1 \text{ m}$ ihrer Wirkungslinie von der Drehachse erzeugt.

Das Kräftepaar

Ein Sonderfall eines Drehmoments tritt auf, wenn zwei gleich große, aber in entgegengesetzter Richtung wirkende Kräfte am gleichen Gegenstand angreifen. Bezeichnet man mit l den Abstand der zwei zueinander parallelen Wirkungslinien beider Kräfte F_1 und F_2 , so gilt für die resultierenden Drehmomente M_1 und M_2 :

$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot F_1$$
$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot F_2$$

Damit ergibt sich als Drehmoment insgesamt:

$$M = M_1 + M_2 = l \cdot F$$

Das Drehmoment derartiger Kräftepaare ist beispielsweise für Schrauben, Windeisen, Kreuzschlüssel usw. von Bedeutung.

Gleichgewicht

Ein um eine Achse drehbarer Körper ist im Gleichgewicht, wenn sich alle an ihm wirkenden Drehmomente gegenseitig ausgleichen.

Definition:

Der Schwerpunkt ist der Punkt eines starren Körpers, bei dem sich alle durch sein Gewicht wirkenden Drehmomente $M_i = s_i \times F_i$ zu Null addieren:

$$\sum_{i=1}^n \vec{s}_i \times \vec{F}_i = 0$$

Die Kräfte F_i entsprechen dabei den Gewichtskräften der einzelnen fest miteinander verbundenen Massestücke („Massenpunkte“).¹ Die Strecken s_i den zugehörigen Abständen vom Schwerpunkt, sofern dieser als Koordinatenursprung angesehen wird.

Ist ein anderes Koordinatensystem vorgegeben, so gilt für den Schwerpunkt \vec{s}_S eines Körpers:

$$\vec{s}_S = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{s}_i}{m_{\text{ges}}}$$

Hierbei werden mit m_i die Massen der einzelnen Punktmassen und mit m_{ges} die Gesamtmasse bezeichnet.

Ist die Summe aller wirkenden Drehmomente bezüglich einem bestimmten Punkt als feste Drehachse nicht gleich Null, so führt der Körper eine Rotation um diese Drehachse aus.

¹ Der Begriff „Massenpunkt“ bezieht sich auf einen physikalischen Körper, dessen Verhalten hinreichend beschrieben werden kann, wenn man sich dessen gesamte Masse in seinem Schwerpunkt vereinigt denkt.

Beispielsweise kann eine Hantelstange mit zwei außen angebrachten Gewichten gleicher Masse und Form in guter Näherung als ein starrer Körper aufgefasst werden, der aus zwei fest miteinander verbundenen Punktmassen besteht. Der Schwerpunkt liegt in diesem Fall mittig in der Hantelstange.

Stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht

Allgemein kann zwischen drei unterschiedlichen Gleichgewichts-Arten unterschieden werden:

- Ein Körper im stabilen Gleichgewicht kehrt bei einer kleinen Auslenkung von selbst wieder in seine ursprüngliche Lage zurückführt.
- Ein Körper im labilen Gleichgewicht kippt bei einer minimalen Auslenkung um, entfernt sich also dauerhaft von der Ausgangslage.
- Ein Körper in indifferentem Gleichgewicht ist in keiner Lage stabiler als in einer anderen. Dies gilt beispielsweise für Kugeln, Walzen oder Räder.

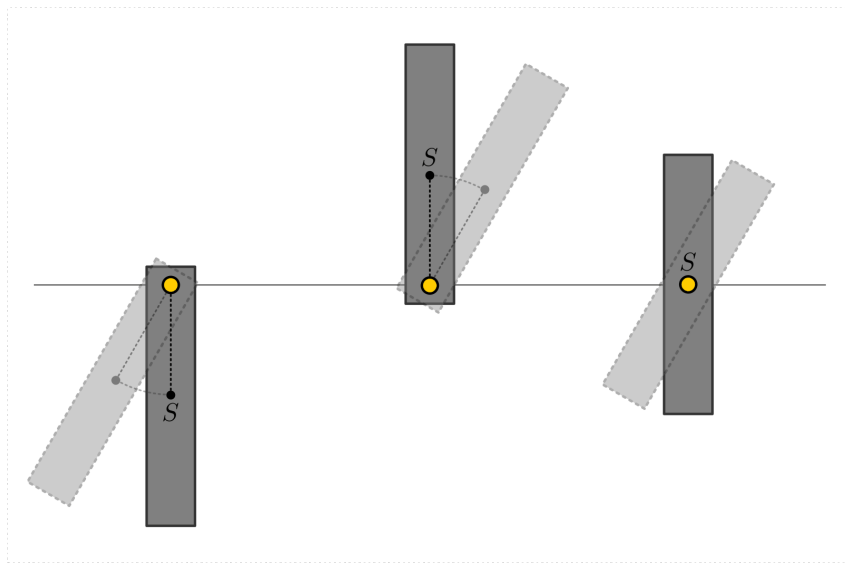


Abb. 29: Stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht bei einer aufgehängten Holzleiste.

Kann sich ein Körper frei um eine Drehachse beziehungsweise einen Aufhängepunkt drehen, so nimmt sein Schwerpunkt die tiefst mögliche Stelle ein. In dieser Lage befindet sich der Schwerpunkt stets senkrecht unterhalb der Achse beziehungsweise des Aufhängepunktes. Sind Schwerpunkt, Aufhänge- und Drehpunkt identisch, so befindet sich der Körper in jeder Lage im indifferenten Gleichgewicht.

Schwerpunkt und Auflagefläche

Ein frei stehender Körper, an dem keine äußeren Drehmomente wirken, kippt nicht um, solange sich sein Schwerpunkt oberhalb der Auflagefläche („Standfläche“) befindet. Der Grund dafür ist, dass bei einer kleinen Auslenkung der Schwerpunkt des Körpers zunächst angehoben wird.

Bei einer weiteren Auslenkung überschreitet die vom Schwerpunkt aus senkrecht nach unten gezeichnete Lot-Linie die Grenze der Auflagefläche. Sobald dies der Fall ist, kippt der Körper um und nimmt damit eine stabile Gleichgewichtslage mit tiefer liegendem Schwerpunkt ein.

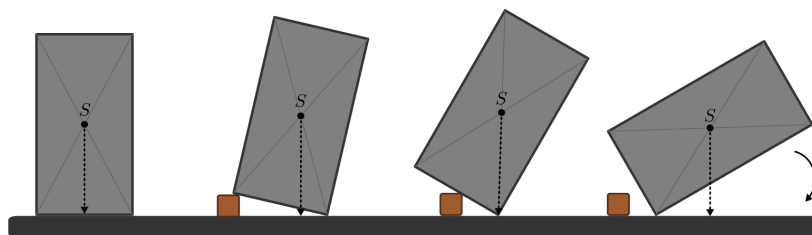


Abb. 30: Umkippen eines Körpers.

Hat ein Gegenstand oder Körper mehrere Auflagepunkte, so entspricht die Auflagefläche der Fläche zwischen den einzelnen Auflagepunkten. Beispielsweise entspricht die Auflagefläche eines Schemels mit drei Beinen der dreieckigen Fläche, die von den Beinen des Schemels begrenzt wird.

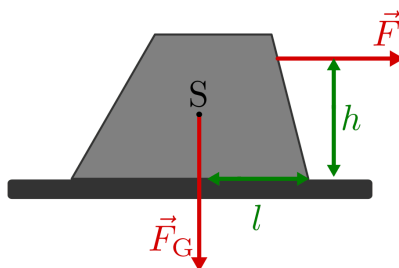


Abb. 31: Standfestigkeit eines Gegenstands.

Wirkt eine Kraft \vec{F} in einer Höhe h über der Standfläche waagrecht auf den Körper ein, so übt diese bezüglich der Kippkante ein so genanntes Kippmoment $F \cdot h$ aus. Im entgegengesetzten Drehsinn bewirkt die im Schwerpunkt S wirkende Gewichtskraft des Gegenstands ein „Standmoment“ $F \cdot l$, wobei l den Abstand der Kippkante von der Wirkungslinie der Gewichtskraft angibt. Im Gleichgewichtsfall gilt:

$$F \cdot h = F_G \cdot l$$

Die zum Kippen des Gegenstands nötige Kraft beträgt also mindestens:

$$F = \frac{F_G \cdot l}{h}$$

Die Standfestigkeit eines Gegenstands ist umso größer, je geringer seine Höhe h ist, je größer seine Gewichtskraft F_G ist und je größer der senkrechte Abstand l des Schwerpunkts zur Kippkante ist.²

² Liegt der Schwerpunkt durch eine unterschiedliche Massenverteilung nicht in der Mitte, sondern im unteren Teil des Gegenstands, so muss zudem eine größere *Hubarbeit* geleistet werden, um den Schwerpunkt über die Kippkante zu heben – zum Kippen ist in diesem Fall also mehr *Arbeit* nötig.

Das Trägheitsmoment

Wird ein Gegenstand durch ein äußeres Drehmoment so weit gekippt, dass sein Gleichgewicht einen instabilen Zustand annimmt, so beginnt dieser eine Rotationsbewegung auszuführen.

Bei Translationsbewegungen ist die Beschleunigung \vec{a} , die ein Körper durch eine äußere Kraft \vec{F} erfährt, umgekehrt proportional zur Masse m des Körpers („Kraftgesetz“). Entsprechend ist bei Rotationsbewegungen die *Winkelbeschleunigung* $\vec{\alpha}$, die ein Körper durch ein äußeres Drehmoment \vec{M} erfährt, umgekehrt proportional zum sogenannten Trägheitsmoment J des Körpers.

Es gilt also:

- Für Translationsbewegungen:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

- Für Rotationsbewegungen:

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} \tag{22}$$

Das Drehmoment zeigt in die gleiche Richtung wie die Winkelbeschleunigung, zeigt also in Richtung der Drehachse; der Betrag des Drehmomentvektors ist um den Faktor J vom Betrag der Winkelbeschleunigung α verschieden.

Der Wert des Trägheitsmoment J eines Körpers hängt einerseits von der Lage der Drehachse, andererseits von der räumlicher Verteilung der rotierenden Masse ab. Massestücke, die weit von der Drehachse entfernt liegen, tragen stärker zum Trägheitsmoment bei als Massestücke, die sich in der Nähe der Drehachse befinden. Beispielsweise hat ein kleines Teilchen der Masse m , das auf einer Kreisbahn mit Radius r rotiert, ein Trägheitsmoment von $J = m \cdot r^2$.

Das Trägheitsmoment eines beliebig geformten Körpers kann rechnerisch bestimmt werden, wenn man ihn aus einer Vielzahl von einzelnen kleinen Massestücken m_i zusammengesetzt denkt, die jeweils im Abstand r_i von der Drehachse entfernt liegen. Das Trägheitsmoment des Körpers ist dann gleich der Summe der Trägheitsmomente aller einzelnen Teilstücke:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$$

Die Trägheitsmomente einiger regelmäßig geformter Körper, die in technischen Anwendungen häufig auftreten, sind in Formelsammlungen aufgelistet. Eine kleine Auswahl davon findet sich in Abbildung *Trägheitsmomente*. Dabei ist zu beachten, dass der gleiche Körper bezüglich unterschiedlichen Rotationsachsen verschiedene Trägheitsmomente besitzen kann.

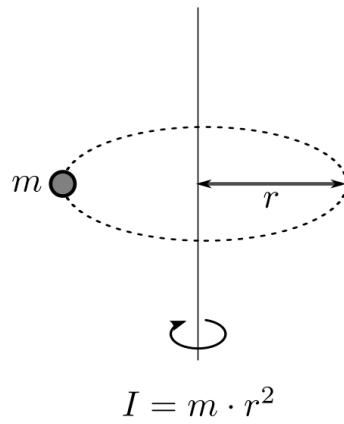


Abb. 32: Trägheitsmoment einer Punktmasse auf einer Kreisbahn.

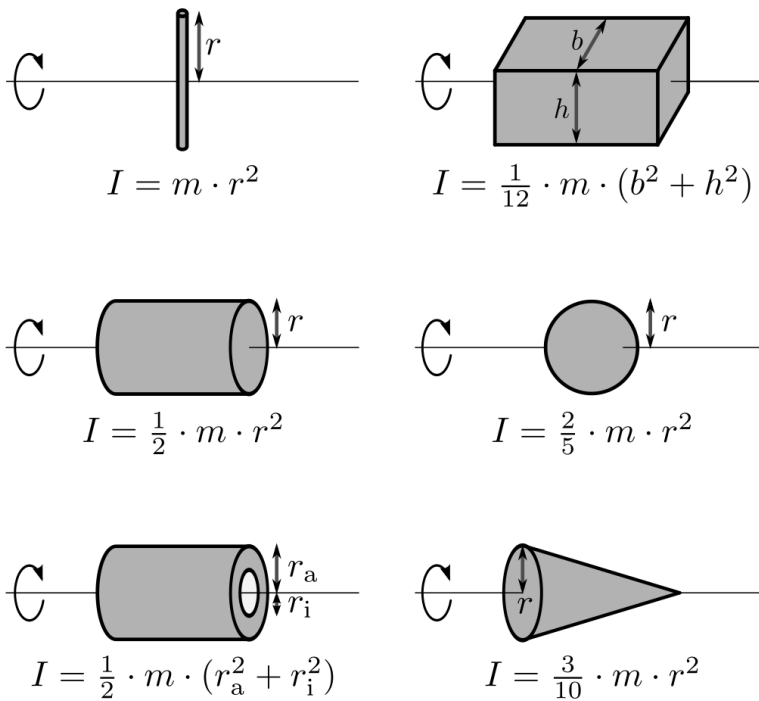


Abb. 33: Trägheitsmomente verschieden geformter Körper.

Der Satz von Steiner

Rotiert ein Körper mit einer Masse m um eine Achse, die im Abstand a parallel zum Schwerpunkt verläuft, so muss zum jeweiligen Wert J des Trägheitsmoments noch der Term $m \cdot a^2$ hinzu addiert werden. Das lässt sich dadurch erklären, dass in diesem Fall der Schwerpunkt des Körpers auf einer Kreisbahn um die neue Drehachse rotiert. Es gilt somit:

$$J_a = J + m \cdot a^2 \quad (23)$$

Formal ist das neue Trägheitsmoment also gleich dem ursprünglichen Trägheitsmoment (bei Rotation um den Schwerpunkt) plus dem Trägheitsmoment des Schwerpunkts um die neue Rotationsachse. Somit lassen sich viele Rotationsvorgänge (insbesondere Rollbewegungen) in einfacher Weise auf Drehbewegungen um den Schwerpunkt zurückführen.

Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmoments

Um das Trägheitsmoment eines beliebigen Objekts, beispielsweise einer rotierenden Scheibe oder eines Rades, experimentell zu bestimmen, kann man es beispielsweise mittels einer Halterung oberhalb seines Schwerpunkts frei drehbar aufhängen.

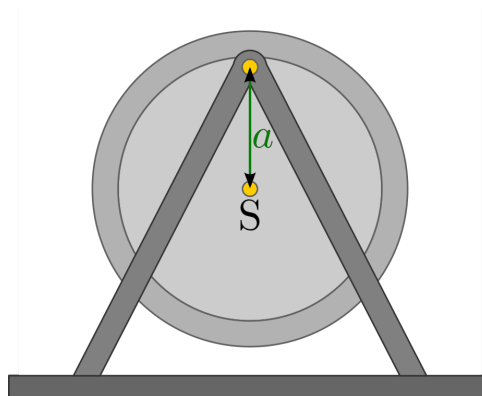


Abb. 34: Aufbau zur experimentellen Bestimmung des Trägheitsmoment eines rotierenden Objekts.

Lenkt man diese Anordnung aus der Ruhelage aus, so beginnt es als *physikalisches Pendel* mit einer leicht messbaren Schwingungsdauer T um die Ruhelage zu schwingen. Für das Trägheitsmoment des Objekts um seinen Schwerpunkt gilt dann:

$$J = m \cdot a \cdot \left(\frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot a} - 1 \right) \quad (24)$$

Hierbei bezeichnet $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ die Erdbeschleunigung, m die Masse des schwingenden Gegenstands, und a den Abstand zwischen seinem Schwerpunkt S und dem Aufhängepunkt. Da alle anderen Größen in der obigen Formel entweder konstant oder ebenfalls leicht messbar sind, kann das Trägheitsmoment unmittelbar bestimmt werden.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Kraftwandler und Getriebe

Mit Hilfe einfacher Einrichtungen ist es möglich, die Richtung und/oder den Betrag von Kräften zu ändern. Wichtige Beispiele für solche „Kraftwandler“ sind Hebel, feste und lose Rollen, Flaschenzüge und geneigte Ebenen. In komplexeren Maschinen werden diese grundlegenden Techniken in vielfacher Weise miteinander kombiniert.

Zusätzlich werden sich in Maschinen häufig auch Getriebe („Drehmomentwandler“) eingebaut, insbesondere Zahnrad- und Riemengetriebe. Bei diesen Einrichtungen bleiben die Kräfte bei der Übertragung von einem Objekt zum nächsten unverändert. Die wirkenden Drehmomente ändern sich allerdings, da die rotierenden Objekte (normalerweise) unterschiedliche Radien aufweisen.

Hebel

Ein Hebel ist ein starrer, meist stabförmiger Körper, der sich um eine feste Achse drehen lässt (z.B. eine Wippe). Hebel werden beispielsweise dazu genutzt, um mit einer kleinen Kraft einen Körper mit großem Gewicht zu heben.



Abb. 35: Die Wippe als (zweiseitiger) Hebel: Nicht nur die wirkende Kraft, auch der Abstand zur Drehachse ist von Bedeutung.

Die Stelle, an der eine Kraft \vec{F} am Hebel wirkt, heißt Angriffspunkt der Kraft, der Abstand ihrer Wirkungslinie zur Drehachse wird Kraftarm s genannt.

Wirken auf einen Hebel zwei Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 , so ist der Hebel dann im Gleichgewicht, wenn das Produkt ersten Kraft \vec{F}_1 mit ihrem Kraftarm \vec{s}_1 gleich dem Produkt der zweiten Kraft \vec{F}_2 mit ihrem Kraftarm \vec{s}_2 ist:

$$\vec{s}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{s}_2 \times \vec{F}_2 \quad (25)$$

Die obige Formel, die formal eine Gleichheit zweier *Drehmomente* beschreibt, wird auch als Hebelgesetz bezeichnet. Es gilt für alle Hebelformen gleichermaßen.

Zweiseitige Hebel

An einem zweiseitigen Hebel liegen die Angriffspunkte der Kräfte, von der Drehachse aus betrachtet, auf verschiedenen Seiten des Hebels.

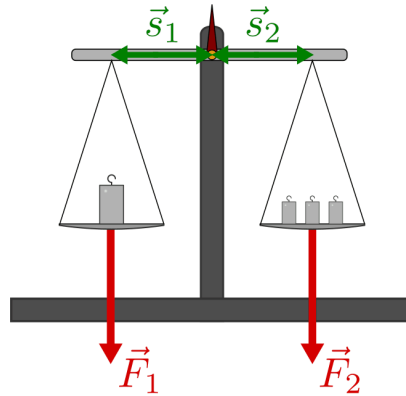


Abb. 36: Die Balkenwaage als zweiseitiger Hebel.

Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn das Drehmoment $\vec{s}_1 \times \vec{F}_1$ auf der linken Seite des Hebels dem Drehmoment $\vec{s}_2 \times \vec{F}_2$ auf der rechten Seite des Hebels entspricht.¹ Ist das wirkende Drehmoment auf der einen Seite größer als auf der anderen, so führt die Hebelstange eine entsprechende Rotation um die Drehachse aus.

Einseitige Hebel

An einem einseitigen Hebel liegt die Drehachse am Rand der Hebelstange, so dass die Angriffspunkte aller wirkenden Kräfte, von der Drehachse aus betrachtet, auf der gleichen Seite des Hebels liegen.

Damit an einem einseitigen Hebel ein Gleichgewicht herrschen kann, muss wiederum die Summe der linksdrehenden Drehmomente gleich der Summe der rechtsdrehenden Drehmomente entsprechen. Dazu müssen die auf einen einseitigen Hebel einwirkenden Kräfte in entgegengesetzte Richtungen zeigen.²

Ein markantes Beispiel für einen einseitigen Hebel ist der menschliche Unterarm. Der Ellenbogen wirkt als Drehachse, die Gewichtskraft des zu tragenden Gegenstands wirkt nach unten, die Muskelkraft des Biceps nach oben. Da der Biceps-Muskel um ein Vielfaches näher an der Drehachse am Unterarm angreift als das zu tragende Gewicht, muss die dort wirkende Kraft um ein entsprechendes Vielfaches größer sein.

¹ Wirken auf eine Seite der Hebelstange mehrere Kräfte ein, so entspricht das Drehmoment auf dieser Seite der Summe der einzelnen Drehmomente.

² Wirkt eine Kraft nicht senkrecht auf einen Hebel ein, so muss sie, wie in Abschnitt *Kraftzerlegung in Teilkräfte* beschrieben, in eine Teilkraft senkrecht und eine zweite Teilkraft parallel zur Hebelstange aufgeteilt werden. Für das wirkende Drehmoment ist nur der senkrechte Anteil der Kraft von Bedeutung.

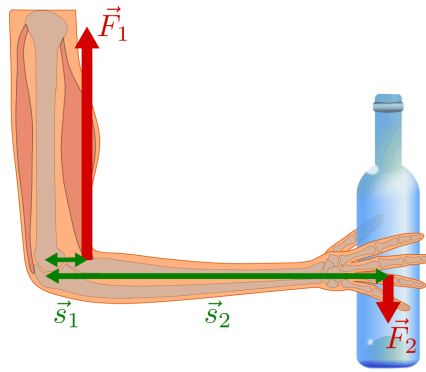


Abb. 37: Der Unterarm als einseitiger Hebel.

Winkelhebel

Ein Hebel mit einer gewinkelten Stange wird Winkelhebel genannt. Je nachdem, an welcher Stelle sich die Drehachse befindet, gleicht ein Winkelhebel einem einseitigen oder zweiseitigen Hebel.

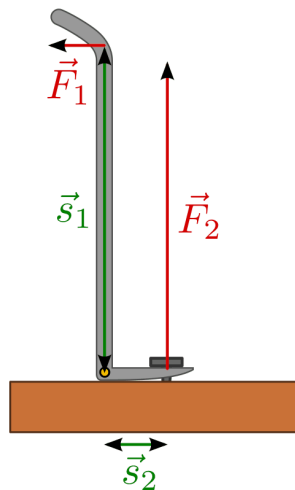


Abb. 38: Ein Nageleisen als (zweiseitiger) Winkelhebel.

Das Hebelgesetz $\vec{s}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{s}_2 \times \vec{F}_2$ gilt auch bei einem Winkelhebel unverändert. Ist das linksdrehende Drehmoment gleich dem rechtsdrehenden, so herrscht ein Hebel-Gleichgewicht; andernfalls tritt eine entsprechende Rotation um die Drehachse auf.

Wellrad und Kurbel

Ein Wellrad besteht aus (mindestens) zwei verschieden großen und miteinander verbundenen Rädern, die fest auf einer Achse („Welle“) sitzen. Die Felgen der Räder können dabei aus einem massiven Material bestehen, oder über Speichen mit der Achse verbunden sein.

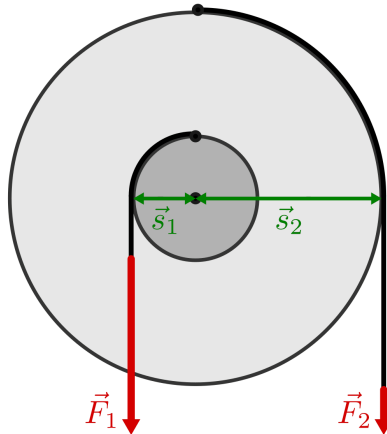


Abb. 39: Das Wellrad als Kraftwandler

Prinzipiell handelt es sich auch bei einem Wellrad um einen Hebel³, so dass im Gleichgewichtsfall wiederum das allgemeine Hebelgesetz gilt:

$$\vec{s}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{s}_2 \times \vec{F}_2$$

Dabei entsprechen die Wegstrecken $|\vec{s}_1|$ und $|\vec{s}_2|$ den Radien der beiden Räder. Betraglich ist die Kraftverstärkung, die bei einer Drehung des äußeren Rades gegenüber dem inneren Rad auftritt, gleich dem Verhältnis der Radien beider Räder:

$$F_1 = \frac{s_2}{s_1} \cdot F_2$$

Eine kleine Kraft am großen Rad hat somit eine große Kraft am kleinen Rad zur Folge. Nach dem gleichen Prinzip funktioniert auch eine Kurbel. Diese kann man sich als einzelne, massive Speiche eines Wellrades vorstellen.

Beispiel:

- Eine Kurbel mit einem Radius von $r_2 = 25 \text{ cm}$ wird mit einer Kraft von $F_2 = 100 \text{ N}$ angetrieben. Die Kraft, die dadurch auf ein Antriebsrad mit Radius $r_1 = 5 \text{ cm}$ wirkt, beträgt somit:

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 = \frac{F_2 \cdot r_2}{r_1}$$

$$F_1 = \frac{100 \text{ N} \cdot 0,25 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} = 500 \text{ N}$$

Auch in diesem Fall bewirkt eine kleine Kraft an der langen Pedalstange eine große Kraft am kleinen Antriebsrad.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

³ Je nachdem, an welchen Stellen das Seil an den beiden Rädern verknotet ist, kann es sich beim Wellrad um einen einseitigen bzw. zweiseitigen Winkel oder auch um einen Winkelhebel handeln. Die Funktionsweise des Wellrads bleibt dabei unverändert.

Flaschenzüge und Rollen

Die feste Rolle

Eine Rolle besteht aus einer Scheibe, entlang deren Umfang sich eine Rille zur Aufnahme eines Seils befindet. Die Rolle ist um eine Achse drehbar.

Wird eine Rolle so befestigt, dass sie sich drehen, aber nicht verschieben kann, so bezeichnet man sie als feste Rolle oder Umlenkrolle.

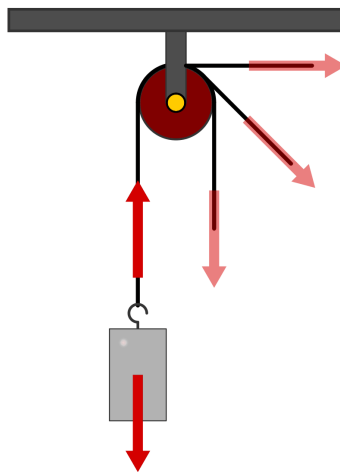


Abb. 40: Hochziehen eines Gewichts mit Hilfe einer festen Rolle. Die Richtung der Zugkraft kann beliebig verändert werden, der Betrag der Zugkraft ändert sich nicht.

Durch eine feste Rolle wird die Richtung einer Kraft geändert, jedoch nicht ihr Betrag.¹ Auf diese Weise wird zwar keine Kraft „gespart“, doch kann auf diese Weise beim Heben einer Last beispielsweise die eigene Gewichtskraft mit als Zugkraft genutzt werden. Ein weiterer Vorteil einer festen Rolle besteht darin, dass man beim Anheben einer Last nicht unbedingt in Zugrichtung (oberhalb der Last) stehen muss, sondern einen günstigeren Standort einnehmen kann.

Die lose Rolle

Mit Hilfe einer in einer Seilschlinge hängenden „losen“ Rolle kann zwar nicht – wie bei einer festen Rolle – die Richtung, dafür aber der Betrag der aufzubringenden Kraft geändert werden. Hierzu wird ein Ende des Seils an einem beliebigen Punkt oberhalb der Last befestigt.

Kann das Gewicht der Rolle gegenüber dem Gewicht der zu hebenden Last vernachlässigt werden, so wird durch die lose Rolle der Betrag der nötigen Zugkraft halbiert.

¹ Die Reibungskraft ist bei einer festen Rolle meist sehr gering. Sie wird daher bei grundsätzlichen Berechnungen meist vernachlässigt.

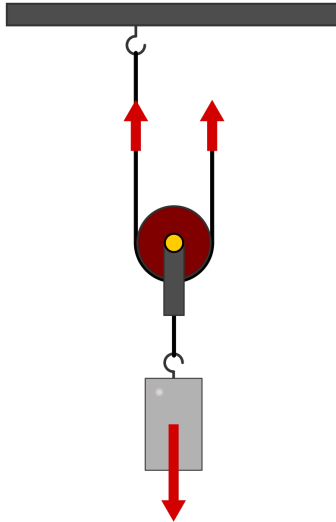


Abb. 41: Hochziehen eines Gewichts mit Hilfe einer losen Rolle. Der Betrag der Zugkraft wird halbiert, die Richtung der Zugkraft bleibt gleich.

Der Flaschenzug

Die lose Rolle als Kraft sparende Einrichtung wird meist in Kombination mit einer festen Rolle verwendet, um auch noch die Richtung der aufzuwendenden Kraft zu verändern. Eine Kombination aus (mindestens) zwei losen und festen Rollen wird Flaschenzug genannt.

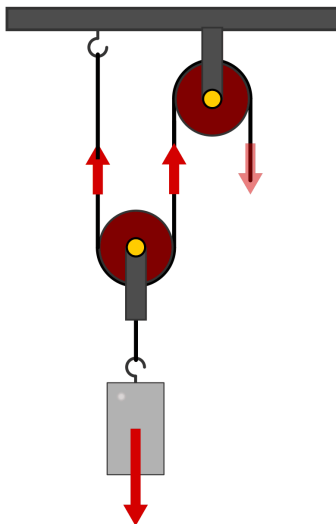


Abb. 42: Ein Flaschenzug mit zwei tragenden Seilstücken. Der Betrag der Zugkraft wird halbiert, ihre Richtung verändert.

Die nötige Zugkraft an einem Flaschenzug ergibt sich aus der Anzahl an Seilstücken, auf die sich die zu hebende Last verteilt. Als tragendes Seilstück wird dabei jedes Seilstück

angesehen, das zwischen einer festen Rolle (bzw. einem Wandhaken) und einer losen Rolle verläuft.² Bei n tragenden Seilstücken ergibt sich folgende Kraftreduzierung:

$$F_{\text{Zug}} = \frac{1}{n} \cdot F_G \quad (26)$$

Entsprechend muss jedoch das Zugseil um eine n -fache Länge gegenüber der Hubhöhe h angezogen werden:

$$s_{\text{Zug}} = n \cdot h$$

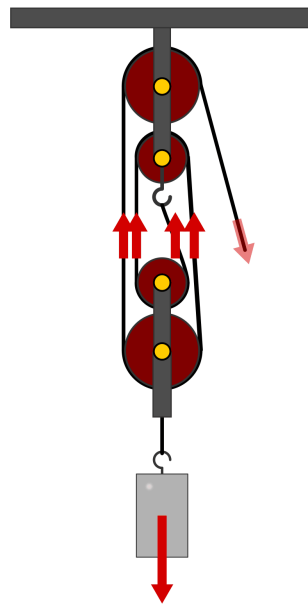


Abb. 43: Ein Flaschenzug mit vier tragenden Seilstücken. Der Betrag der Zugkraft entspricht einem Viertel der Gewichtskraft.

Die geometrische Anordnung der Rollen (übereinander oder hintereinander) ist für die Wirkungsweise eines Flaschenzugs ohne Bedeutung.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Schiefe Ebenen

Wird ein Körper auf eine schiefe Ebene gestellt, so wird er aufgrund seiner Gewichtskraft F_G entlang der schiefen Ebene hangabwärts beschleunigt. Dies lässt sich erklären, wenn man die Gewichtskraft in zwei Teilkräfte (entlang der schiefen Ebene und senkrecht zu ihr) zerlegt denkt:

² Wirkt die Zugkraft am losen Seilende nach unten, so darf dieses Seilstück nicht mitgezählt werden, da es mit dem letzten „tragenden“ Seilstück identisch ist (die letzte feste Rolle bewirkt lediglich eine Umlenkung der Zugkraft nach unten).

- Die Kraft senkrecht zur schiefen Ebene wird Normalkraft F_N genannt. Dieser Kraftanteil würde ein Einsinken des Körpers in die schiefe Ebene bewirken, jedoch wirkt bei einem festen Untergrund der Boden aufgrund seiner Starrheit dagegen.
- Die Kraft parallel zur schiefen Ebene wird Hangabtriebskraft F_{HA} genannt. Dieser Kraftanteil bewirkt eine Beschleunigung des Körpers entlang der schiefen Ebene.

Ist die Hangabtriebskraft groß genug, um die zwischen Körper und schiefer Ebene wirkende Reibungskraft zu überwinden, so beginnt der Körper zu gleiten.

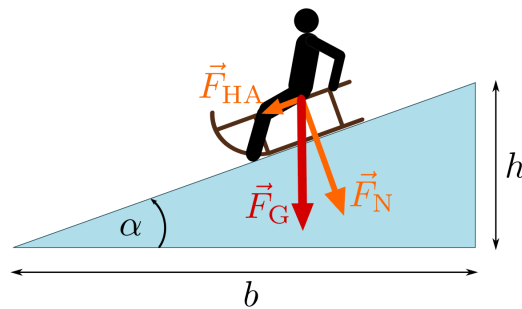


Abb. 44: Schlittenfahren auf einer schiefen Ebene.

Auf einer waagrechten Ebene ist die Gewichtskraft \vec{F}_G gleich der Normalkraft \vec{F}_N , der Betrag der Hangabtriebskraft ist gleich Null. Umgekehrt ist entlang einer vertikalen Wand die Hangabtriebskraft gleich der Gewichtskraft, und die (anpressende) Normalkraft ist gleich Null. Bei einem beliebigen Winkel α der schiefen Ebene gelten für die Beträge der Normal- und Hangabtriebskraft folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} F_{HA} &= F_G \cdot \sin \alpha \\ F_N &= F_G \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (27)$$

Hierbei wurde die genutzt, dass der Winkel zwischen der Gewichtskraft F_G und Normalkraft F_N gleich dem Winkel α der schiefen Ebene ist, da es sich um zwei **senkrecht zueinander stehende Winkel** handelt. Bezeichnet man zusätzlich mit l die Länge der schiefen Ebene, so ergibt sich aufgrund der Ähnlichkeit der beiden Kraftdreiecke und des Dreiecks der Schiefen Ebene folgender Zusammenhang zwischen der Hangabtriebskraft und der Gewichtskraft des Schlittens:

$$\frac{F_H}{G} = \frac{h}{l} \quad (28)$$

Je länger also die schiefe Ebene ist, desto kleiner ist die entlang der Ebene wirkende Hangabtriebskraft. Aus diesem Grund werden in Gebirgen Straßen und Wege in Serpentin angelegt.

Die Größe des Winkels α lässt sich anhand des Verhältnis der Höhe h zur (horizontalen) Breite b der schiefen Ebene berechnen. Hierbei gilt für den Winkel α :

$$\tan \alpha = \frac{h}{b} \Leftrightarrow \alpha = \text{atan} \left(\frac{h}{b} \right) \quad (29)$$

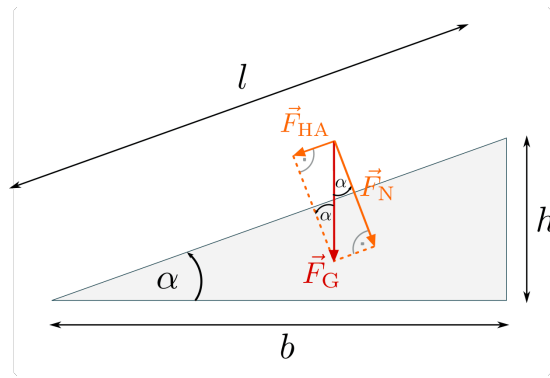


Abb. 45: Kraftzerlegung bei einer schiefen Ebene.

Je kleiner also der Winkel α ist, desto länger ist bei einer bestimmten Steighöhe h die horizontale Breite b beziehungsweise wegen $l = \sqrt{b^2 + h^2}$ auch die Länge l der schiefen Ebene.

Schiefe Ebenen mit Reibung

Wird ein Gegenstand auf eine schiefe Ebene gelegt, so wird er durch die Hangabtriebskraft F_{HA} entlang der schiefen Ebene nach unten beschleunigt. Kann die entgegengesetzt wirkende Reibungskraft zwischen dem Objekt und der schiefen Ebene nicht vernachlässigt werden, so muss sie folgendermaßen berücksichtigt werden:

$$F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G \cdot \cos \alpha$$

Hierbei bezeichnet μ die *Reibungszahl* für Haft- beziehungsweise Gleitreibung; zudem wurde für die wirkende Normalkraft F_N die obige Formel (27) verwendet.

Befindet sich das Objekt auf der schiefen Ebene zunächst in Ruhe, so beginnt es dann zu gleiten, wenn die Hangabtriebskraft die maximale Haftreibungskraft übersteigt. Für den Grenzfall gilt:

$$\begin{aligned} F_{HA} &= F_{R,\max} \\ F_G \cdot \sin \alpha &= \mu_H \cdot F_G \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Bei dieser Gleichung kann auf beiden Seiten F_G gekürzt werden; man erhält somit:

$$\mu_H = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \quad (30)$$

Ist die Haftreibungszahl für das Materialien-Paar (Objekt – Schiefe Ebene) bekannt, so kann man also unmittelbar angeben, ab welchem Winkel α das Objekt anfangen wird zu rutschen:

$$\alpha_{\max} = \text{atan}(\alpha)$$

Der Winkel α_{\max} wird auch „maximaler Böschungswinkel“ genannt. Mit ihm kann beispielsweise ausgedrückt werden, bis zu welcher Steigung ein pulverartiges Schüttgut aufgehäuft werden kann, bevor ein Nachrutschen des Materials einsetzt.

Tab. 7: Maximale Böschungswinkel (Quelle: Wikipedia)

Material	Winkel in Grad
Asche	40°
Erde	30° bis 45°
Holzrinde (klein gestückelt)	45°
Kleie	30° bis 45°
Kies	45°
Sand (trocken)	34°
Sand (nass)	45°
Schnee	38°

Bewegt sich ein Objekt mit einer konstanten Geschwindigkeit eine schiefe Ebene hinab, so ist die Hangabtriebskraft gleich der Gleitreibungskraft. Durch eine experimentelle Bestimmung des zugehörigen Winkels α kann somit die Gleitreibungszahl μ_G zwischen dem Material des Objekts und dem Material der schiefen Ebene bestimmt werden.

Keilwirkung

Ein Keil, auf dessen Rückseite eine Kraft F ausgeübt wird, kann das umliegende Material auseinander treiben. Diese spaltende Wirkung, die beispielsweise bei Äxten oder Meißeln genutzt wird, lässt sich ebenfalls mittels der Kraftaufteilung an einer schiefen Ebene erklären, wenn man sich den Keil in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt denkt.

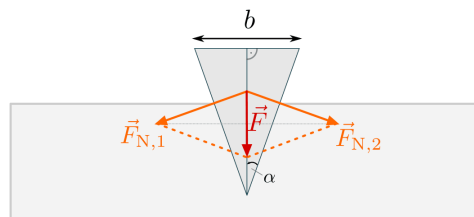


Abb. 46: Keilwirkung als Normalkraft bei einer schiefen Ebene.

Die Kraft F , die auf den Keil ausgeübt wird, kann in zwei Normalkräfte $F_{N,1}$ und $F_{N,2}$ senkrecht zu den Keilflächen zerlegt werden. Bezeichnet man die Breite des Keilrückens mit h , die Länge einer schrägen Keilflächen mit l und den halben Keilwinkel als α , so gilt:

$$\frac{F_N}{F} = \frac{s}{b} \quad \Leftrightarrow \quad F_N = \frac{s}{b} \cdot F$$

Da die Länge s der schrägen Flächen üblicherweise länger ist als die Breite b des Keils, sind die spaltenden Normalkräfte größer als die auf den Keil wirkende Kraft F .

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Zahnräder und Getriebe

Zahnrad und Zahnstange

Ein Zahnrad ist ein Rad, entlang dessen Umfang Zahnungen eingearbeitet sind. Mittels dieser Zahnungen kann ein Zahnrad ein wirkendes *Drehmoment* beispielsweise auf eine Kette oder ein anderes Zahnrad übertragen.

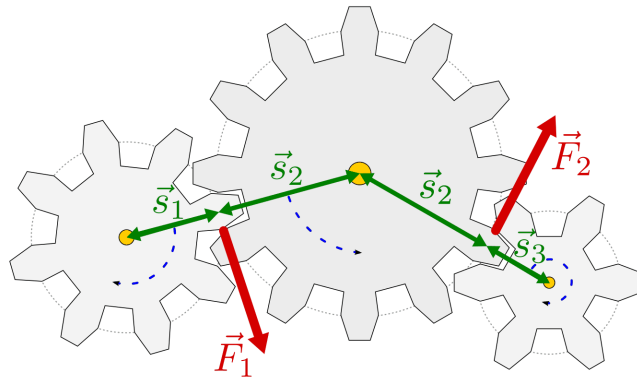


Abb. 47: Kraftübertragung und Drehmomentwandlung bei einem Zahnradgetriebe.

Werden mehrere Zahnräder miteinander kombiniert, so bezeichnet man die Konstruktion als Getriebe. Zwei Räder wirken dabei stets mit gleich großer Kraft F aufeinander ein. Sind allerdings die Radien r_1 und r_2 der Zahnräder unterschiedlich groß, so sind jeweils auch die wirkenden Drehmomente $M_1 = r_1 \cdot F$ und $M_2 = r_2 \cdot F$ verschieden.

Übersetzungs- und Größenverhältnisse

Für das so genannte „Übersetzungsverhältnis“ eines Getriebes, d.h. das Verhältnis der wirkenden Drehmomente, gilt die folgende Formel:¹

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (31)$$

¹ Die Formel für das Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder kann anhand der Formeln für die wirkenden Drehmomente M_1 und M_2 hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot F &= M_1 \\ r_2 \cdot F &= M_2 \end{aligned}$$

Da an zwei Zahnrädern paarweise stets die gleiche Kraft wirkt, können die beiden obigen Gleichungen jeweils nach F aufgelöst und anschließend gleichgesetzt werden. Es folgt:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{M_1}{r_1} \\ F &= \frac{M_2}{r_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2}$$

Stellt man diese Gleichung mittels Multiplikation mit r_1 und Division durch M_2 um, so erhält man die Formel (31) für das Übersetzungsverhältnis zweier aufeinander folgender Zahnräder.

Die wirkenden Drehmomente stehen somit im gleichen Größenverhältnis zueinander wie die Radien der aufeinander einwirkenden Zahnräder.

Aufgrund der Zahnungen kann bei Zahnrädern kein Durchrutschen („Schlupf“) auftreten, die aufeinander einwirkenden Oberflächen legen also stets den gleichen Weg zurück. Dies hat zweierlei Konsequenzen:

- Die Zahnungen von zueinander passenden Zahnrädern müssen stets gleich groß sein. Bei einem Zahnrad mit einem Vielfachen an Zahnungen muss somit auch der Radius um ein entsprechendes Vielfaches größer sein.² Sind z_1 und z_2 die Anzahl an Zahnungen zweier Zahnräder aufeinander folgender Zahnräder und r_1 und r_2 die zugehörigen Radien, so gilt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (32)$$

Die Anzahl der Zahnungen ist somit direkt proportional zum Radius der Zahnräder.

- Kleine Zahnräder müssen sich in einem Getriebe entsprechend „schneller“, also mit einer höheren Winkelgeschwindigkeit ω drehen als große Zahnräder. Sind ω_1 und ω_2 die Winkelgeschwindigkeiten zweier aufeinander folgender Zahnräder und r_1 und r_2 die zugehörigen Radien, so gilt:³

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (33)$$

Die Winkelgeschwindigkeiten sind somit umgekehrt proportional zu den Radien der Zahnräder.

Wirken zwei Zahnräder direkt aufeinander ein, so kehrt sich die Drehrichtung um (in Abbildung *Zahnrad-Getriebe* ist dies anhand der gestrichelten blauen Pfeile zu erkennen). Ist eine Umkehrung der Drehrichtung nicht beabsichtigt, so kann ein drittes Zahnrad mit beliebiger Größe dazwischen angeordnet werden.

² Allgemein muss der Umfang eines Zahnrads stets einem Vielfachen der Länge l einer einzelnen Zahnung entsprechen. Es gilt also:

$$2 \cdot \pi \cdot r = n \cdot l$$

Hierbei ist n die Anzahl der Zahnungen eines Zahnrads.

³ Die aufeinander einwirkenden Zahnungen haben zwar eine gleiche Bahngeschwindigkeit v . Bei unterschiedlichen Radien r_1 und r_2 der Zahnräder sind jedoch die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der beiden Zahnräder verschieden groß. Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} v = \omega_1 \cdot r_1 \\ v = \omega_2 \cdot r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

Stellt man diese Gleichung mittels Division durch r_1 und ω_2 um, so erhält man die Formel (33) für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zweier aufeinander folgender Zahnräder.

Zahnstangen

Zahnräder werden in Getrieben häufig auch in Kombination mit so genannten Zahnstangen eingesetzt. Hierdurch kann die rotierende Bewegung eines Zahnrads in eine geradlinige Bewegung der Zahnstange umgesetzt werden. Ist die Zahnstange fest und das Zahnrad beweglich, wie es beispielsweise bei einer Zahnradbahn der Fall ist, so ist auch ein schlupffreier Antrieb des Zahnrads gegenüber der Zahnstange möglich.

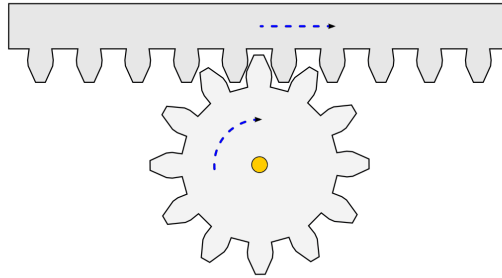


Abb. 48: Kraftübertragung mit Hilfe eines Zahnrads und einer Zahnstange.

Riemen- und Kettengetriebe

Mittels eines Riemen kann der Angriffspunkt einer (Zug-)Kraft in Richtung des Riemen verschoben werden. Wird ein Riemen über zwei Riemenscheiben mit unterschiedlichem Durchmesser geführt, so lässt sich bei ausreichender Spannung des Riemen eine Kraft von der einen Riemenscheibe auf die andere übertragen.

Die übertragene Kraft F ist an allen Stellen des Riemen und auch an den Angriffspunkten der Riemenscheiben gleich groß; bei unterschiedlichen Radien r_1 und r_2 der Scheiben sind jedoch die wirkenden Drehmomente M_1 und M_2 verschieden groß.

Erfolgt die Kraftübertragung von der kleineren Riemenscheibe auf die größere, so erfährt diese aufgrund ihres größeren Durchmessers auch ein entsprechend größeres Drehmoment. Im gleichen „Übersetzungsverhältnis“ nimmt die Rotationsfrequenz bei der größeren Riemenscheibe ab.

Wird in einem Riemengetriebe die Spannung des Riemen gelockert, üblicherweise durch ein leichtes Verschieben der angetriebenen Riemenscheibe, so dreht die antreibende Riemenscheibe „leer“ durch, und es kann keine Kraftübertragung erfolgen. Dieser Effekt wird beispielsweise in Rasenmähern in Form einer Kupplung genutzt, die bei Bedarf auf Leerlauf geschaltet werden kann. Gleichmaßen kann die antreibende Riemenscheibe allerdings auch durchdrehen, wenn die anzutreibende Riemenscheibe einen zu großen Drehwiderstand entgegensetzt, der Riemen sich also nicht bewegen lässt. Eine derartig starke (unbeabsichtigte) Reibung hat in der Regel auch einen starken Verschleiß des Riemen zur Folge.

Sind (zu) hohe Belastungen im normalen Betrieb nicht auszuschließen, können anstelle von Riemen auch Riemen mit Zahnungen („Zahnriemen“) oder, als stabilste Variante,

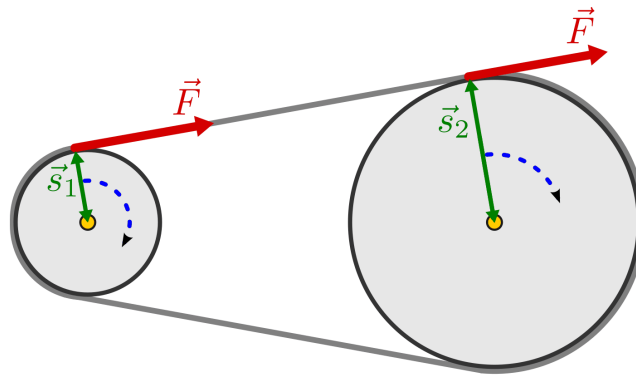


Abb. 49: Kraftübertragung und Drehmomentwandlung bei einem Riemen- bzw. Kettengetriebe.

Ketten mit passenden Zahnrädern zur Kraftübertragung verwendet werden. Durch die so genannte „Formschlüssigkeit“ können höhere Kräfte übertragen werden, ohne dass ein Schlupf der Kette auftreten kann.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Arbeit, Leistung und Energie

Mechanische Arbeit

Wirkt eine Kraft auf einen Körper ein und bewirkt dabei eine Verformung, eine Beschleunigung oder ein Anheben des Körpers, so wird physikalische Arbeit verrichtet. Um die Größe der verrichteten Arbeit zu bestimmen, müssen der Betrag der Kraft und die Länge des Weges, entlang dessen die Kraft wirkt, bekannt sein.

Definition:

Die Arbeit W ist das Produkt aus der in Richtung des Weges wirkenden Kraft F und der zurückgelegten Wegstrecke Δs :¹

$$W = F \cdot \Delta s_{\parallel} \quad (34)$$

Einheit:

¹ Die Arbeits-Formel $W = F \cdot s$ gilt streng genommen nur, wenn die wirkende Kraft F konstant ist. Ist die Kraft nur innerhalb einzelner Zeitabschnitte konstant, so muss man die Formel für jeden dieser Zeitabschnitte einzeln anwenden und die jeweiligen Teilbeträge summieren.

$$W = \sum_i F_i \cdot \Delta s_i$$

Im Fall einer sich kontinuierlich ändernden Kraft wird aus der Summe (\sum) ein Integral (\int).

Die Einheit der Arbeit ist nach Gleichung (34) das Produkt der Einheiten von Kraft und Weg. Sie wird nach James Prescott Joule kurzerhand Joule (J) genannt.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$$

Beispiele:

- Die Gewichtskraft F_G einer Tafel Schokolade ($m = 100 \text{ g}$) entspricht in guter Näherung 1 N . Hebt man eine Tafel Schokolade einen Meter weit an (egal von welcher Position aus), so verrichtet man dabei eine Arbeit von $W = F_G \cdot s = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ J}$.
- Hebt man 2, 3, 4, ... Tafeln Schokolade einen Meter weit an, so verrichtet man entsprechend eine Arbeit von 2, 3, 4, ... J. Mit der gleichen Arbeit könnte man jeweils auch *eine* Tafel Schokolade um 2, 3, 4, ... m anheben.
- Um zwei Tafeln Schokolade zwei Meter weit anzuheben, muss man eine Arbeit von $2 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 4 \text{ N} \cdot \text{m} = 4 \text{ J}$ verrichten.

Unter der Bedingung, dass die Kraft konstant ist und in beliebiger, aber fester Richtung wirkt, gilt:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

Hierbei bezeichnet α den Winkel zwischen der wirkenden Kraft und der zurückgelegten Wegstrecke.

Arten mechanischer Arbeit

Bei mechanischen Prozessen sind die folgenden Arten mechanischer Arbeit von entscheidender Bedeutung:

Hubarbeit

Erfahrungsgemäß ist es einfacher, einen leichten Körper hoch zu heben als einen schweren. Doch auch beim Heben zweier gleich schwerer Körper gibt es Unterschiede: Je weiter man einen Körper hoch heben muss, desto mehr Arbeit ist dafür nötig.

Definition:

Die Hubarbeit W_{Hub} ist proportional zur *Gewichtskraft* F_G eines angehobenen Körpers und zur Hubhöhe h :

$$W_{\text{Hub}} = F_G \cdot h \quad (35)$$

Die Hubarbeit kann mit Hilfe der Formel für die Gewichtskraft ($F_G = m \cdot g$) auch als $W_{\text{Hub}} = m \cdot g \cdot h$ geschrieben werden.

Reibungsarbeit

Um einen Körper auf einer waagrechten Ebene gleichförmig zu bewegen, muss der Reibungskraft eine gleich große Gegenkraft entgegenwirken.

Definition:

Die Reibungsarbeit W_{Reib} ist proportional zur *Reibungskraft* F_{R} und zur zurückgelegten Wegstrecke Δs :

$$W_{\text{Reib}} = F_{\text{R}} \cdot \Delta s \quad (36)$$

Beim gleichzeitigen Auftreten mehrerer Reibungskräfte (beispielsweise Rollreibung und Luftwiderstand) entspricht F_{R} der Summe aller auftretenden Reibungskräfte.

Spannarbeit

Die Spannkraft, die ein elastischer Körper (beispielsweise eine Schraubenfeder) einer Stauchung oder Streckung entgegensetzt, ist nicht konstant, sondern nimmt gleichmäßig mit der Auslenkung zu:

- Die anfängliche Spannkraft der Feder in der Ruhelage ist Null.
- Wird die Feder um eine Wegstrecke Δs ausgelenkt, so beträgt die *Spannkraft* der Feder $\Delta F_{\text{S}} = -D \cdot \Delta s$.

Entlang der Strecke Δs muss im Durchschnitt nur die Hälfte der (maximalen) Spannkraft F_{S} am Auslenkungspunkt aufgewendet werden. Für die durchschnittlich nötige Kraft \bar{F}_{S} gilt also:

$$\bar{F}_{\text{S}} = \frac{1}{2} \cdot F_{\text{S}}$$

Dies gilt allgemein für elastische Verformungen.

Definition:

Die zur Verformung eines elastischen Körpers (beispielsweise einer Schraubenfeder) nötige Spannarbeit W_{Spann} ist proportional zur durchschnittlichen Spannkraft $\bar{F}_{\text{S}} = \frac{1}{2} \cdot F_{\text{S}}$ und der dazugehörigen Auslenkung s :

$$W_{\text{Spann}} = \bar{F}_{\text{S}} \cdot s = \frac{1}{2} \cdot F_{\text{S}} \cdot s \quad (37)$$

Die Spannarbeit kann mit Hilfe der Formel für die Spannkraft ($|F_{\text{S}}| = D \cdot s$) auch als $W_{\text{Spann}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$ geschrieben werden, wobei D die (oftmals experimentell zu bestimmende) Federkonstante des Körpers angibt.

Beschleunigungsarbeit

Zur Überwindung der Trägheit ist eine Kraft notwendig. Die zugehörige Arbeit, die bei einer Beschleunigung entlang einer Strecke s auftritt, heißt Beschleunigungsarbeit.

Definition:

Die Beschleunigungsarbeit W_B eines zunächst ruhenden Körpers der Masse m ist proportional zum Quadrat der Endgeschwindigkeit v , die dieser erreicht:²

$$W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (38)$$

Besitzt der Körper bereits eine Anfangsgeschwindigkeit v_1 und wird auf eine Endgeschwindigkeit v_2 beschleunigt, so beträgt die Beschleunigungsarbeit $W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)$.

Rotationsarbeit

Zur Überwindung der Trägheit ist für eine Rotation ein Drehmoment notwendig. Die zugehörige Arbeit heißt Rotationsarbeit.

Definition:

Die Rotationsarbeit W_{rot} eines zunächst ruhenden Körpers mit *Trägheitsmoment* J ist proportional zum Quadrat der *Winkelgeschwindigkeit* ω , die dieser erreicht:

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \quad (39)$$

Besitzt der Körper bereits eine Anfangsgeschwindigkeit ω_1 und wird auf eine Endgeschwindigkeit ω_2 beschleunigt, so muss in Gleichung (39) anstelle ω die Differenz $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ beider Winkelgeschwindigkeiten eingesetzt werden.

Goldene Regel der Mechanik

Während Kräfte durch entsprechende Hilfsmittel in ihrer Richtung oder ihrem Betrag geändert werden können, kann die für einen mechanischen Prozess nötige Arbeit nicht verringert werden; die Menge an Arbeit bleibt erhalten.

Bei Verwendung eines Kraftwandlers ist die aufgenommene Arbeit stets gleich der abgegebenen Arbeit (Reibung wird vernachlässigt):

$$F_1 \cdot \Delta s_1 = F_2 \cdot \Delta s_2$$

$$W_1 = W_2$$

Abgesehen von Reibungsverlusten bleibt das Produkt aus Weg und Kraft (entlang des Weges) stets konstant. Eine umgangssprachliche Formulierung für das Prinzip der Kraftwandlung („die goldene Regel der Mechanik“) lautet daher:

² Um die Formel für die Beschleunigungsarbeit W_B herzuleiten, geht man von der allgemeinen Definition der Arbeit $W = F \cdot s$ aus. Für die Kraft F kann man das allgemeine Kraftgesetz $F = m \cdot a$ einsetzen. Für die Wegstrecke kann man die *Bremsformel* $v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s$ nach s auflösen. Erfolgt die Beschleunigung aus dem Stillstand ($v_0 = 0$), so ist $s = \frac{v^2}{2 \cdot a}$. Setzt man auch diesen Ausdruck in die allgemeine Definition der Arbeit ein, so erhält man:

$$W_B = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot \frac{v^2}{2 \cdot a} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

„Was an Kraft eingespart wird, muss an Weg zugesetzt werden.“

Beispiele:

- Bei einer *festen Rolle* ist die zum Heben aufgewendete Kraft F_1 gleich der wirksamen Kraft F_2 . Der Weg der Kraft F_1 ist gleich dem Weg der Kraft F_2 . Somit gilt:

$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

- Bei einer *losen Rolle* ist die zum Heben aufgewendete Kraft F_1 gleich der Hälfte der wirksamen Kraft F_2 . Der Weg der Kraft F_1 ist allerdings doppelt so groß wie der Weg der Kraft F_2 . Insgesamt gilt:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot F_2$$

$$s_1 = 2 \cdot s_2$$

$$\Rightarrow F_1 \cdot s_1 = \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot 2 \cdot s_2 = F_2 \cdot s_2$$

- Um einen Körper mit einer Gewichtskraft F_G auf eine Höhe h zu heben, ist die Hubarbeit $W_{\text{Hub}} = F_G \cdot h$ nötig. Verschiebt man ihn hingegen entlang des längeren Weges l einer *schiefen Ebene* nach oben, so ist die nötige Kraft F um das Verhältnis $\frac{h}{l}$ geringer. Es gilt:

$$F \cdot l = F_G \cdot h$$

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Wirkungsgrad

Sofern bei einem mechanischen Prozess die stets auftretende Reibung sehr klein gehalten werden kann, so ist es möglich, sie bei der Formulierung von physikalischen Gesetzen unberücksichtigt zu lassen. Bei genauer Betrachtung zeigt sich allerdings, dass die von einer mechanischen Einrichtung aufgenommene Arbeit stets größer ist als die von ihr abgegebene Arbeit. Es scheint also Arbeit verloren gegangen zu sein, der Satz von der Erhaltung der mechanischen Arbeit scheint somit seine Geltung zu verlieren.

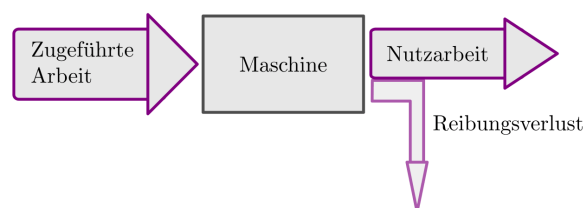


Abb. 50: Wirkungsgrad eines mechanischen Prozesses („Energiefluss-Diagramm“).

Tatsächlich verschwindet die verrichtete Arbeit allerdings nicht, sondern es wird stets eine entsprechend große Menge an Reibungsarbeit verrichtet. Das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Arbeit kann – unter Berücksichtigung der Reibung – somit folgendermaßen formuliert werden:¹

$$\text{Aufgenommene Arbeit} = \text{Abgegebene Arbeit} + \text{Reibungsarbeit}$$

Definition:

Das Verhältnis aus der abgegebenen Arbeit W_{out} und der aufgenommenen Arbeit W_{in} wird Wirkungsgrad η einer mechanischen Einrichtung genannt:

$$\eta = \frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} \quad (40)$$

Einheit:

Als Verhältniszahl hat der Wirkungsgrad keine Einheit. Er ist umso größer, je geringer die Reibungsarbeit ist. Ist überhaupt keine Reibung vorhanden, so ergibt sich der Wert $\eta = 1$, da in diesem Fall der Zähler und der Nenner auf der rechten Seite der Gleichung übereinstimmen.

Da sich – abgesehen von in Vakuum stattfindenden Prozessen – Reibung niemals komplett beseitigen lässt, gibt es keine mechanische Einrichtung mit einem Wirkungsgrad $\eta = 1$. Durch gutes Ölen und Schmieren ist es allerdings möglich, diesen Wert zumindest annähernd zu erreichen. Ein hoher Wirkungsgrad, der nur geringfügig kleiner als 1 ist, bedeutet, dass der größte Teil der aufgenommenen Arbeit als abgegebene mechanische Arbeit wirksam ist.

Besteht eine mechanische Einrichtung aus mehreren Komponenten, die jeweils die Wirkungsgrade η_1, η_2, \dots haben, so ergibt sich für den Gesamt-Wirkungsgrad η_{Ges} der Anlage:

$$\eta_{\text{Ges}} = \frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots$$

Der Gesamt-Wirkungsgrad einer mechanischen Einrichtung ist wegen $\eta \leq 1$ somit kleiner als der Wirkungsgrad der am wenigsten effizienten Komponente.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Mechanische Leistung

Mechanische Arbeit kann unterschiedlich schnell verrichtet werden. Die mechanische Leistung (umgangssprachlich auch „Arbeitstempo“ genannt) gibt an, wie schnell mechanische Arbeit verrichtet wird.

Definition:

¹ Eine noch allgemeinere Formulierung dieser Aussage stellen die so genannten *Hauptsätze der Wärmelehre* dar.

Die Leistung P ist gleich dem Verhältnis aus der Arbeit W und der Zeit t , in der sie verrichtet wird.¹

$$P = \frac{W}{t} \quad (41)$$

Einheit:

Die Leistung wird (zu Ehren des Ingenieurs **James Watt**) in Watt (W) angegeben. Eine Leistung von einem Watt entspricht einer in einer Sekunde geleisteten Arbeit von einem Joule:

$$1 \text{ W} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}}$$

Beispiel:

- Zwei Kräne ziehen jeweils eine Palette mit Steinen, die einer Gewichtskraft $F_G = 4\,000 \text{ N}$ entspricht, auf ein 5 m hohes Gerüst. Der eine Kran braucht für diese Arbeit eine Zeit von $t_1 = 10 \text{ s}$, der andere Kran benötigt hingegen $t_2 = 20 \text{ s}$. Damit können die Leistungen P_1 und P_2 der beiden Kräne berechnet werden:

$$P_1 = \frac{W_{\text{Hub}}}{t_1} = \frac{F_G \cdot h}{t_1} = \frac{4\,000 \text{ N} \cdot 5 \text{ m}}{10 \text{ s}} = \frac{20\,000 \text{ J}}{10 \text{ s}} = 2\,000 \text{ W}$$

$$P_2 = \frac{W_{\text{Hub}}}{t_2} = \frac{F_G \cdot h}{t_2} = \frac{4\,000 \text{ N} \cdot 5 \text{ m}}{20 \text{ s}} = \frac{20\,000 \text{ J}}{20 \text{ s}} = 1\,000 \text{ W}$$

Da der erste Kran die Arbeit in der halben Zeit verrichtet, ist seine Leistung (sein „Arbeitstempo“) doppelt so hoch wie die des zweiten Kranes.

Tab. 8: Beispiele für Leistungen in Natur und Technik

Spielzeugmotor	3 bis 12 W
Mensch (Dauerleistung)	75 bis 100 W
Bohrmaschine	300 bis 1 000 W
Motorrad	Ca. 15 000 W
PKW	Ca. 55 000 W
LKW	Ca. 250 000 W
Elektro-Lokomotive	Ca. 5 000 000 W
Verkehrsflugzeug	Ca. 35 000 000 W
Passagierschiff	Ca. 40 000 000 W
Weltraum-Rakete	Ca. 75 000 000 000 W
Blitz	Ca. 500 000 000 000 W

Die mechanische Leistung, die ein Mensch über einen langen Zeitraum aufrecht erhalten kann, liegt bei etwa 100 W. Kurzzeitig kann ein gut trainierter Mensch auch eine Leistung in der Größenordnung von 1 000 W erreichen. Große Leistungsmengen werden nach wie vor häufig in Pferdestärken (PS) anstelle in Kilowatt (kW) angegeben.

$$1 \text{ kW} = 1\,000 \text{ W}$$

$$1 \text{ PS} \approx 735,5 \text{ W}$$

¹ Das Symbol P für die Leistung leitet sich vom englischen Wort „Power“ ab.

Eine weitere nützliche Formel erhält man, wenn man in der Definition (41) für die Arbeit $W = F \cdot s$ schreibt. Für die Leistung P gilt damit:

$$P = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \frac{s}{t} = F \cdot v \quad (42)$$

Gemäß dieser Gleichung ist zum Beispiel eine höhere Leistung nötig, um einen Gegenstand bei einer konstant wirkenden Reibung mit höherer Geschwindigkeit zu ziehen.

Leistung von rotierenden Objekten

Vorgänge, bei denen Verschiebungen (Translationen) oder Drehungen (Rotationen) von Objekten stattfinden, lassen sich durch mathematisch ähnliche Gleichungen beschreiben. Das Äquivalent zur Kraft F ist bei Rotationen das *Drehmoment* M , das Äquivalent zur Geschwindigkeit v ist die *Winkelgeschwindigkeit* ω . Ersetzt man in der obigen Formel (42) die jeweiligen Größen, so erhält man folgende Formel:

$$P = M \cdot \omega \quad (43)$$

Ein Motor kann somit eine bestimmte Leistung entweder durch eine große Drehzahl oder ein großes Drehmoment erreichen; ist die Winkelgeschwindigkeit ω gleich Null, so ist auch die mechanische Leistung des Motors gleich Null, egal wie hoch sein Drehmoment ist.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Mechanische Energie

Zum Heben oder Beschleunigen eines beliebigen Körpers oder zum Verformen eines elastischen Körpers – beispielsweise zum Spannen einer Feder – muss stets *mechanische Arbeit* verrichtet werden. Der Körper wird dadurch in einen neuen Zustand versetzt und ist dabei in der Lage seinerseits Arbeit verrichten zu können. Dieser Zustand wird durch die physikalische Größe „Energie“ beschrieben.

Definition:

Unter Energie versteht man die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten. Energie ist damit mit „gespeicherter Arbeit“ identisch.

Einheit:

Die Energie wird in der gleichen Einheit wie die Arbeit, also in Joule (J) angegeben.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$$

Zur Beschreibung großer Energiemengen werden häufig die Einheiten Kilojoule ($1 \text{ kJ} = 1000 \text{ J}$) und Megajoule ($1 \text{ MJ} = 1000000 \text{ J}$) genutzt. Darüber hinaus werden Energiemengen anhand des Zusammenhangs „Energie ist Leistung mal Zeit“ oftmals auch in (Kilo-)Wattstunden angegeben.

$$1 \text{ Wh} = 1 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3600 \text{ W} \cdot \text{s} = 3600 \text{ J}$$

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ Wh}$$

Arten mechanischer Energie

Bei mechanischen Prozessen treten folgende Arten mechanischer Energie auf:¹

Die potentielle Energie („Höhenenergie“)

Um einen Körper entgegen der Schwerkraft anzuheben, muss *Hubarbeit* verrichtet werden. Diese ist dann in Form von „Höhenenergie“ im Körper gespeichert. Die Höhenenergie wird häufig auch als potentielle Energie bezeichnet, da sie durch den freien Fall des angehobenen Körpers wiedergewonnen werden kann.

Definition:

Die potentielle Energie E_{pot} ist gleich dem Produkt aus der Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ eines Körpers mit Masse m sowie der Höhe h , die dieser angehoben wird:

$$E_{\text{pot}} = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h \quad (44)$$

Hierbei steht g für den *Ortsfaktor*. Auf der Erdoberfläche gilt $g \approx 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$.

Die potentielle Energie eines Körpers als Resultat einer verrichteten Hubarbeit lässt sich schwerlich als Absolutwert angeben. Steht beispielsweise ein Gegenstand auf einem Tisch, so hat er gegenüber dem Boden meist eine andere Höhenenergie als gegenüber der Meereshöhe. Bei Rechnungen legt man daher ein Null-Niveau fest, auf das man dann die einzelnen potentiellen Energien bezieht.²

Die Spannenergie

Beim Verformen eines elastischen Körpers wird die verrichtete *Spannarbeit* als Spannenergie im Körper gespeichert und bei einer Rückverformung wieder freigesetzt. Bekannte Beispiele hierfür sind das Spannen einer Schraubenfeder, das Zusammendrücken einer Druckfeder, das Hüpfenlassen eines Flummis, usw.

Definition:

¹ Weitere Energieformen sind *elektrische Energie*, magnetische Energie, thermische Energie (Wärme), Strahlungsenergie (beispielsweise Licht), Kernenergie und chemische Energie.

² Arbeit kann in diesem Sinn als Energiemenge aufgefasst werden, die zum Anheben eines Gegenstands auf ein anderes Energie-Niveau nötig ist.

Die Spannenergie E_{Spann} eines verformten Körpers mit der Federkonstanten D ist gleich dem Produkt aus der während der Verformung durchschnittlich wirkenden Spannkraft $\bar{F}_S = \frac{1}{2} \cdot F_S = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s$ und der Ausdehnung s aus der Ruhelage:

$$E_{\text{Spann}} = \bar{F}_S \cdot s = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 \quad (45)$$

Die gespeicherte Spannenergie nimmt somit, solange es sich um einen elastischen Prozess handelt, quadratisch mit der Verformung des Körpers zu.

Die kinetische Energie („Bewegungsenergie“)

Um einen Körper zu beschleunigen, also ihn auf eine bestimmte Geschwindigkeit v zu bringen, muss die *Beschleunigungsarbeit* W_B verrichtet werden. Diese ist dann in Form von Bewegungsenergie (häufig auch „kinetische Energie“ genannt) im Körper gespeichert.

Definition:

Die kinetische Energie E_{Kin} ist gleich dem Produkt aus der Masse m eines Körpers und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit v :

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (46)$$

Die Bewegungsenergie eines Körpers nimmt somit quadratisch mit seiner Geschwindigkeit zu.

Die Rotationsenergie

Um einen Körper auf eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit ω zu bringen, muss die *Rotationsarbeit* W_{rot} verrichtet werden. Diese ist dann in Form von Rotationsenergie im Körper gespeichert.

Definition:

Die Rotationsenergie E_{rot} ist gleich dem Produkt aus dem *Trägheitsmoment* J eines Körpers und dem Quadrat seiner Winkelgeschwindigkeit ω :

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \quad (47)$$

Die kinetische Gesamtenergie eines rollenden Körpers ist gleich der Summe seiner Bewegungsenergie und seiner Rotationsenergie:

$$E_{\text{kin,ges}} = E_B + E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

Der Energie-Erhaltungssatz

Bei rein mechanischen Vorgängen bleibt die Summe der mechanischen Energien (Höhenenergie, Bewegungsenergie und Spannenergie) konstant.

„Energie kann weder erzeugt noch vernichtet,
sondern stets nur von einer Form in andere
umgewandelt werden.“

Beispiel:

- Bei einem schwingenden Pendel findet auf dem Weg von der maximalen Auslenkung zur Ruhelage eine kontinuierliche Umwandlung von Höhenenergie in Bewegungsenergie und umgekehrt statt; umgekehrt findet eine kontinuierliche Umwandlung von Bewegungsenergie in Höhenenergie statt, wenn sich der Pendelkörper vom Durchgang durch die Ruhelage in Richtung der maximalen Auslenkung bewegt. Ohne Luftwiderstand und Reibung setzen sich diese Energie-Umwandlungen beliebig oft fort.

In der Praxis treten allerdings in der Regel nicht zu vernachlässigende Reibungseffekte auf, die mechanische Energie in *Wärme* umwandeln; diese Energieform zählt allerdings nicht zu den mechanischen Energieformen.³

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Impuls und Drehimpuls

Neben der Energie gibt es zwei weitere Größen, die innerhalb eines abgeschlossenen Systems stets konstant bleiben; sie werden als Impuls und Drehimpuls bezeichnet. Die Impulsgesetze werden insbesondere bei mathematischer Beschreibung von Stoßprozessen genutzt, Drehimpulse sind bei Kreisbewegungen und Rotationen von Bedeutung.

Der Impuls

Der Bewegungszustand eines Körpers ist neben seiner Geschwindigkeit auch durch seine Masse gekennzeichnet. Der Impuls eines Körpers kennzeichnet die Wucht, die dieser Körper bei einer *Translationsbewegung* hat.

Definition:

Der Impuls \vec{p} eines Körpers ist gleich dem Produkt aus seiner Masse m und seiner Geschwindigkeit \vec{v} :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (48)$$

³ Diese für den weiteren mechanischen Prozess „verloren gegangene“ Energie ist dann gleich der verrichteten *Reibungsarbeit* $W_R = F_R \cdot s$.

Einheit:

Die Einheit des Impulses ist gemäß der Definition $1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Der Impuls \vec{p} ist eine vektorielle Größe und zeigt in die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit \vec{v} . Der Impuls eines Körpers ändert sich, wenn sich entweder seine Geschwindigkeit ändert (in Betrag oder Richtung), oder wenn sich – beispielsweise bei einem Raketenstart – seine Masse ändert.

Mathematisch lässt sich die betragliche Änderung des Impulses somit folgendermaßen ausdrücken:

$$\Delta p = m \cdot \Delta v + \Delta m \cdot v$$

Diese Änderung des Impulses kann in Relation zur Zeit Δt gesetzt werden, in der die Änderung stattfindet. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta t} &= \frac{m \cdot \Delta v + \Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} \\ &= m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v \end{aligned}$$

Der Term $m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$ im ersten Teil dieser Summe kann aufgrund des Zusammenhangs $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ auch als $m \cdot a$ geschrieben werden. Dieser Term entspricht der üblichen Definition der Kraft ($F = m \cdot a$) und ist mit der Änderung des Impulses identisch, sofern die Änderung der Masse gleich Null ist. Andernfalls muss das *2. Newtonsche Gesetz* („Kraftgesetz“) allgemeiner formuliert werden. Newton selbst hat es in folgender Form angegeben:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \cdot \vec{a} + \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \vec{v} \quad (49)$$

Eine Kraft kann somit als zeitliche Änderung des Impulses aufgefasst werden. Umgekehrt kann man sich eine Impulsänderung $\Delta \vec{p}$ als „Kraftstoß“ vorstellen, der sich ergibt, wenn eine Kraft \vec{F} über einen Zeitraum Δt auf einen Körper einwirkt. Es gilt also:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Der Impulserhaltungssatz

Ein System aus mehreren miteinander wechselwirkenden Körpern hat einen Gesamtimpuls, der der Summe aller Einzelimpulse entspricht:

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{v}_n \quad (50)$$

Wenn keine äußeren Kräfte auf das System wirken, dann ist der Gesamtimpuls konstant. Dieser empirisch gefundene Sachverhalt wird Impulserhaltung genannt und stellt neben der *Erhaltung der Energie* einen der wichtigsten Erhaltungssätze in der Physik dar.

Beispiel 1: Elastischer Stoß zweier Kugeln

Besteht ein System beispielsweise aus zwei Kugeln, die frontal und elastisch zusammenstoßen, so ist sowohl die Summe der Impulse wie auch die Summe der Bewegungsenergien vor und nach der Wechselwirkung gleich. Bezeichnet man mit v eine Geschwindigkeit *vor* und mit u eine Geschwindigkeit *nach* dem Stoß, so ergibt sich nach dem Impuls- und Energieerhaltungssatz folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \\ \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2\end{aligned}$$

Da in der zweiten Gleichung alle Terme den Faktor $\frac{1}{2}$ enthalten, kann dieser ausgeklammert und gekürzt werden. Durch Umstellen der Terme können beide Gleichungen auf folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}m_1 \cdot (v_1 - u_1) &= m_2 \cdot (v_2 - u_2) \\ m_1 \cdot (v_1^2 - u_1^2) &= m_2 \cdot (v_2^2 - u_2^2)\end{aligned}$$

Da m_1 und m_2 ungleich Null sind und – als Bedingung für einen Stoß – zusätzlich $v \neq u$ ist, kann zur Lösung des Gleichungssystems die zweite Gleichung (nach Anwendung der binomischen Formel) durch die erste geteilt werden.¹ Das Ergebnis lautet:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2$$

Diese Gleichung wurde durch Anwendung äquivalenter Umformungen aus der ursprünglichen Energieerhaltungs-Gleichung gebildet. Gemeinsam mit der ursprünglichen Impulserhaltungs-Gleichung stellt sie ein nun ein *lineares* Gleichungssystem dar:

$$\begin{aligned}m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \\ v_1 - v_2 &= -u_1 + u_2\end{aligned}$$

Die beiden gesuchten Größen u_1 und u_2 stehen dabei jeweils auf der rechten Seite. Löst man die beispielsweise die zweite Gleichung nach u_2 auf und setzt das Ergebnis $u_2 = u_1 + v_1 - v_2$ in die erste Gleichung ein, so erhält man:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot (u_1 + v_1 - v_2)$$

Dies ergibt, wenn man die rechte Seite ausmultipliziert und die Gleichung nach u_1 auflöst:

$$u_1 = \frac{2 \cdot m_2 \cdot v_2 + (m_1 - m_2) \cdot v_1}{m_1 + m_2} \quad (51)$$

Entsprechend ergibt sich für die Geschwindigkeit u_2 :

$$u_2 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 + (m_2 - m_1) \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (52)$$

Diese beiden Ergebnisse gelten für beliebige Kugelmassen und Anfangsgeschwindigkeiten. Betrachtet man einige Sonderfälle, so erhält man folgende vereinfachte Ergebnisse:

¹ Nach der binomischen Formel ist $v_1^2 - u_1^2 = (v_1 + u_1) \cdot (v_1 - u_1)$. Der letzte Term kann dabei gekürzt werden.

- Sind beide Kugeln gleich schwer ($m_1 = m_2$) und ist die zweite anfangs in Ruhe ($v_2 = 0$), so überträgt die erste Kugel beim Stoß ihren gesamten Impuls auf die zweite Kugel. Es gilt nämlich in diesem Fall:

$$u_1 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot 0 + 0 \cdot v_1}{2 \cdot m_1} = 0$$

$$u_2 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2}{2 \cdot m_1} = v_1$$

- Ist die erste Kugel sehr viel leichter als die zweite Kugel und ruht diese ($m_1 \ll m_2$ und $v_2 = 0$), so prallt die erste Kugel mit einer (nahezu) gleich großen, jedoch entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeit zurück. Es gilt in diesem Fall näherungsweise:

$$u_1 \approx \frac{2 \cdot m_2 \cdot 0 - m_2 \cdot v_1}{m_2} = -v_1$$

$$u_2 \approx \frac{0 \cdot v_2}{m_2} = 0$$

- Ist die erste Kugel sehr viel schwerer als die zweite Kugel und ruht diese ($m_1 \gg m_2$ und $v_2 = 0$), so bewegt sich die erste Kugel mit nahezu gleicher Geschwindigkeit weiter; die zweite Kugel wird auf die doppelte Geschwindigkeit der ersten Kugel beschleunigt. Es gilt in diesem Fall näherungsweise:

$$u_1 \approx \frac{2 \cdot m_2 \cdot 0 + m_1 \cdot v_1}{m_1} = +v_1$$

$$u_2 \approx \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot 0}{m_1} \approx 2 \cdot v_1$$

Stoßen die Kugeln nicht frontal, sondern schräg aufeinander, so muss das obige Rechen-schema komponentenweise für die drei Raumrichtungen komponentenweise angewendet werden.

Beispiel 2: Unelastischer Stoß zweier Kugeln

Stoßen zwei Kugeln unelastisch aufeinander, so bewegen sich beide nach dem Stoß mit der gleichen Geschwindigkeit u entlang einer gemeinsamen Richtung hin fort. Die Richtung und der Betrag der Geschwindigkeit u kann anhand des Impulserhaltungs-Gleichung direkt berechnet werden:

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

Der Energie-Erhaltungssatz gilt hingegen in diesem Fall nicht – durch die unelastische Verformung wird mechanische Energie in Wärme umgewandelt.²

² Wie groß der Verlust an mechanischer Energie ist, kann aus der Differenz der *Bewegungsenergien* beider Kugeln vor und nach dem Stoß berechnet werden:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 - (m_1 + m_2) \cdot u^2)$$

Experimentell lässt sich ein unelastischer Stoß beispielsweise dadurch erreichen, dass an dem Berührungspunkt der Kugeln ein kleines Stück Kaugummi aufgeklebt wird.

Teilelastische Stoßprozesse

In vielen Fällen handelt es sich bei Stößen weder um einen komplett elastischen noch um einen komplett unelastischen Vorgang, sondern vielmehr um einen teilelastischen Prozess: Es wird dabei nur ein Teil der Verformungsarbeit wieder zurück in kinetische Energie gewandelt. Die Geschwindigkeiten der beteiligten Gegenstände sind nach einem teilelastischen Stoß folglich kleiner als bei einem elastischen Stoß.

Für die Bewegungsenergien E_v und E_n vor und nach dem Stoß gilt:

$$\Delta E = (E_v - E_n) \cdot (1 - k^2)$$

Die Zahl k wird hierbei als Stoßzahl bezeichnet; sie kann mittels folgender Formel experimentell bestimmt werden:

$$k = \left| \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} \right|$$

Die Stoßzahl k ist gleich Null für komplett unelastische Prozesse und gleich Eins für komplett elastische Prozesse. Für teilelastische Prozesse ergibt sich eine Zahl zwischen Null und Eins, die den Elastizitätsgrad des Prozesses angibt.

Der Drehimpuls

In ähnlicher Weise, wie sich bei der Definition des Impulses der Beschreibung von Translationsbewegungen als hilfreich herausgestellt hat, so hat sich auch bei der Beschreibung von Rotationsbewegungen die Einführung eines so genannten Drehimpulses als nützlich erwiesen.

Der Drehimpuls eines Körpers ist von seinem *Trägheitsmoment* und von seiner *Winkelgeschwindigkeit* abhängig und kennzeichnet die Wucht, die dieser Körper bei einer Rotationsbewegung aufweist.

Definition:

Der Drehimpuls \vec{L} eines Körpers ist gleich dem Produkt aus seinem Trägheitsmoment J und seiner Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \tag{53}$$

Der Drehimpuls ist eine vektorielle Größe und zeigt in die gleiche Richtung wie die Winkelgeschwindigkeit, also senkrecht zur Drehebene. Der Betrag des Drehimpuls eines rotierenden Körpers ändert sich, wenn sich entweder der Betrag seiner Winkelgeschwindigkeit oder seine Massenverteilung und somit sein Trägheitsmoment ändert.

Mathematisch lässt sich die betragliche Änderung des Drehimpulses folgendermaßen ausdrücken:

$$\Delta L = J \cdot \Delta\omega + \Delta J \cdot \omega$$

Diese Änderung des Impulses kann in Relation zur Zeit Δt gesetzt werden, in der die Änderung stattfindet. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta L}{\Delta t} &= \frac{J \cdot \Delta\omega + \Delta J \cdot \omega}{\Delta t} = \frac{J \cdot \Delta\omega}{\Delta t} + \frac{\Delta J \cdot \omega}{\Delta t} \\ &= J \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{\Delta J}{\Delta t} \cdot \omega\end{aligned}$$

Der Term $J \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ im ersten Teil dieser Summe lässt sich aufgrund des Zusammenhangs $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ auch als $J \cdot \alpha$ schreiben. Dieser Term kann als *Drehmoment* aufgefasst werden ($M = J \cdot \alpha$) und ist mit der Änderung des Drehimpulses identisch, sofern die Änderung des Trägheitsmoments gleich Null ist. Andernfalls muss diese zusätzlich berücksichtigt werden:³

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = J \cdot \vec{\alpha} + \frac{\Delta J}{\Delta t} \cdot \vec{\omega} \quad (54)$$

Eine Drehmoment kann somit allgemein als zeitliche Änderung des Drehimpulses aufgefasst werden.

Der Drehimpulserhaltungssatz

Ein System aus mehreren miteinander wechselwirkenden Körpern hat einen Gesamt-Drehimpuls, welcher der Summe aller einzelnen Drehimpulse entspricht:

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n J_i \cdot \vec{\omega}_i = J_1 \cdot \vec{\omega}_1 + J_2 \cdot \vec{\omega}_2 + \dots + J_n \cdot \vec{\omega}_n \quad (55)$$

Wenn keine äußeren Drehmomente auf das System wirken, dann ist der Gesamt-Drehimpuls konstant. Dieser empirisch gefundene Sachverhalt wird Drehimpulserhaltung genannt und stellt gemeinsam mit der Impulserhaltung und der Erhaltung der Energie einen der wichtigsten Erhaltungssätze der Mechanik dar.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Mechanik der Festkörper, Flüssigkeiten und Gase

Mechanik der Festkörper

Als Festkörper werden alle Körper bezeichnet, die im festen Aggregatzustand, also in einer kristallinen Struktur vorliegen. Hierzu gehören beispielsweise Metalle, Salze, Eis

³ Beispielsweise verringern Eiskunstläufer(innen) bei Pirouetten durch ein Einziehen der zunächst ausgestreckten Arme bewusst ihr Trägheitsmoment, um damit – ohne zusätzliche Energiezufuhr – eine deutlich höhere Winkelgeschwindigkeit zu erreichen.

und zahlreiche organische Verbindungen. Bei Metallen und Salzen bestehen die einzelnen Bausteine des Kristallgitters aus Atomen, bei Eis und organischen Verbindungen aus Molekülen.

Die Festigkeit eines Kristalls hängt sowohl von den Bindungskräften zwischen den Atomen beziehungsweise Molekülen als auch von der räumlichen Anordnung ab:

- Diamant besteht beispielsweise ebenso wie Graphit aus reinem Kohlenstoff; die Kohlenstoffatome sind allerdings im Diamantkristall anders angeordnet.
- Salze bestehen aus positiv und negativ geladenen Ionen. Die starken Bindungskräfte des Ionengitters haben eine große Härte und Festigkeit der Salzkristalle zur Folge.
- In Metallen sind die einzelnen Kristalle mikroskopisch klein und unregelmäßig angeordnet; sie sind jedoch bei mikroskopischer Betrachtung der Bruchflächen eines Metallstücks deutlich erkennbar.

Bei polykristallinen Materialien, wie beispielsweise Metallen, sind die Größen und Strukturen der einzelnen Teilkristalle unterschiedlich; das Material im Ganzen besitzt daher üblicherweise in alle Raumrichtungen gleiche Eigenschaften. Im Vergleich dazu bestehen monokristalline Stoffe aus einer einzelnen Kristallstruktur, so dass sich die mechanischen, thermischen und elektrischen Eigenschaften in den verschiedenen Raumrichtungen unterscheiden.

Für alle Festkörper mit kristalliner Struktur gilt, dass sie bei einer ganz bestimmten Temperatur (der „Schmelztemperatur“) in den flüssigen Aggregatzustand übergehen. Bei manchen Stoffen, die umgangssprachlich ebenfalls als feste Stoffe bezeichnet werden, ist eine strikte Trennung zwischen festem und flüssigem Aggregatzustand nicht möglich. Diese Materialien – beispielsweise Glas, Wachs, Teer und viele Kunststoffe – haben keinen kristallinen Aufbau und werden daher als „amorphe“ Stoffe bezeichnet.¹

Dehnung und Stauchung

In Festkörpern sind die Abstände zwischen den einzelnen Atomen sehr gering; sie haben daher ein bestimmtes Volumen und lassen sich kaum komprimieren. Allerdings lässt sich die Gestalt eines Festkörpers ändern, beispielsweise kann ein Metalldraht unter Verwendung durch Einwirken einer Zugkraft gedehnt werden. Ob die Gestalt des Festkörpers in ihre alte Form zurück geht, wenn die einwirkende Kraft nachlässt („elastische Verfor-

¹ Ist der Elastizitätsmodul eines Materials hoch, so sagt man, dass das Material eine hohe „Steifigkeit“ besitzt. Diese ist formal definiert als Verhältnis der aufzubringenden Kraft F zur Längenänderung Δl des Gegenstands:

$$\text{Steifigkeit} = \frac{F}{\Delta l}$$

Zwischen dem Elastizitätsmodul E und der Steifigkeit besteht nach Gleichung (56) somit folgender Zusammenhang:

$$\text{Steifigkeit} = E \cdot \frac{A}{l}$$

Die Steifigkeit hängt somit nicht nur vom Material eines Gegenstands, sondern auch von seiner Form ab.

mung“) oder ob sie bestehen bleibt („plastische Verformung“), ist vom Material und der Größe der verformenden Kraft abhängig.²

Dehnung von Festkörpern

Im Allgemeinen kann jeder Festkörper zu einem gewissen Grad elastisch gedehnt werden; dabei vergrößert sich seine Länge l um ein bestimmtes Stück Δl . Wird der Festkörper weiter gedehnt, so bildet sich die Verformung bei einem Nachlassen der Zugkraft nur noch teilweise oder sogar überhaupt nicht mehr zurück; die Verformung bleibt also bestehen („plastische Verformung“).



Abb. 51: Richtungen der einwirkenden Kräfte bei einer Dehnung.

Im elastischen Bereich ist die relative Längenänderung $\frac{\Delta l}{l}$ häufig proportional zur einwirkenden Kraft F . In diesem Fall kann das *Hookesche Gesetz* in einer allgemeinen Form dargestellt werden:

Formel:

Eine elastische Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ist proportional zur einwirkenden Zugspannung σ :

$$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (56)$$

Hierbei bezeichnet F die Größe der (senkrecht) einwirkenden Kraft und A die Fläche, auf welche die Kraft einwirkt. Der Proportionalitätsfaktor E wird als „Elastizitätsmodul“ bezeichnet und ist eine Materialkonstante. Die Zugspannung σ sowie das Elastizitätsmodul E werden in der Einheit Pascal angegeben.³

Stellt man die von der Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ abhängige Zugspannung σ in einem Diagramm dar, so verläuft die Kurve im Hookeschen Bereich linear. Die Steigung dieser Kurve ist $\tan(\alpha) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, was nach Gleichung (56) gerade dem Elastizitätsmodul E entspricht.

In der Praxis wird die Grenze des elastischen Bereichs üblicherweise bestimmt, indem geprüft wird, ab welcher Zugspannung eine 0,01%-ige Dehnung bestehen bleibt. Viele Materialien, beispielsweise Metalldrähte, beginnen schließlich bei einer ausreichend großen

² Streng genommen handelt es sich bei amorphen Stoffen um Flüssigkeiten mit einer sehr hohen inneren Reibung („Viskosität“).

³ Neben den elastischen und plastischen Verformungen sind auch so genannte viskoelastische Verformungen möglich, bei denen die elastische Verformung mit einer gewissen zeitlichen Verzögerung eintritt. In diesem Fall bildet sich die Verformung beim Nachlassen der Kraft erst nach einer gewissen Zeit zurück. Beispiele für solche viskoelastischen Stoffe sind hochpolymere Kunststoffe und die menschliche Haut.

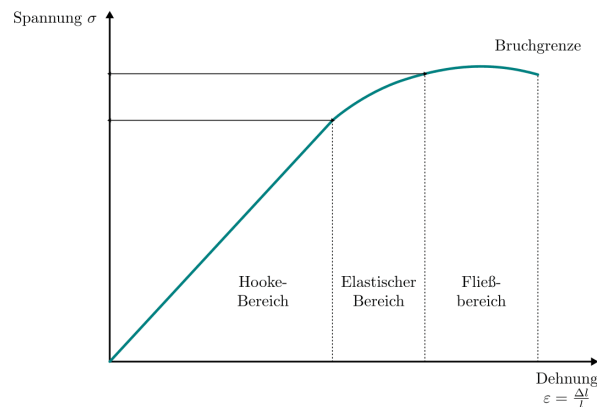


Abb. 52: Diagramm der Dehnung eines metallischen Festkörpers in Abhängigkeit von der einwirkenden Zugspannung.

Krafteinwirkung zu „fließen“, bis sie bei der so genannten Bruchspannung zerreißen. Spröde Materialien wie Glas hingegen brechen bereits nach Überschreiten ihrer Elastizitätsgrenze.

Material	Elastizitätsmodul in GPa = $\frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$
Aluminium	70 bis 75
Beton	25
Diamant	800
Eisen	200
Gusseisen	75
Glas	40 bis 90
Gummi	0,5
Holz	10 bis 15
Knochen	15
Kupfer	100 bis 130
Stahl	180 bis 220
Ziegel	30

Wird ein Zugversuch sehr schnell durchgeführt, die Belastung also eher schlagartig erfolgt, so zeigt die Kurve im $\sigma(\epsilon)$ -Diagramm sich oftmals erhebliche Abweichungen. Auch die Temperatur hat einen Einfluss auf die Elastizität eines Materials: Beispielsweise ähneln die Eigenschaften eines weichen Stahl unter tiefen Temperaturen denen eines härteren Stahls. Üblicherweise wird der Elastizitätsmodul daher durch langsame Zugversuche bei 20° ermittelt.

Querkontraktion

Mikroskopisch betrachtet sind die Veränderungen der Kristallstruktur bei einer Dehnung meist kompliziert; die Gitterstruktur von Festkörpern ist nicht perfekt, sondern weist immer einige Fehl- und Leerstellen auf. Diese Leerstellen können bei Krafteinwirkungen von

benachbarten Gitteratomen aufgefüllt werden, wodurch an anderer Stelle neue Lücken entstehen. Aus makroskopischer Sicht kann man bei einer Dehnung mit der Längenzunahme in den meisten Fällen auch eine Verringerung des Querschnitts feststellen; das Volumen des Festkörpers nimmt dabei geringfügig zu.

Diese so genannte Querkontraktion kann mittels der Querkontraktionszahl („Poisson-Zahl“) ν beschrieben werden, welche das Verhältnis der Längenänderung in Querrichtung $\frac{\Delta d}{d}$ im Verhältnis zur Längenänderung in Zugrichtung $\frac{\Delta l}{l}$ angibt:

$$\nu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} \quad (57)$$

Die Querkontraktionszahl ist dimensionslos. Für die Volumenänderung bei einer Zugspannung in Längsrichtung gilt damit näherungsweise:

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Die Werte der Querkontraktionszahl ν liegen üblicherweise zwischen 0 und 0,5. Ist $\nu < 0,5$, so nimmt bei einer wirkenden Zugspannung das Volumen zu, denn in diesem Fall ist $(1 - 2 \cdot \nu) > 0$, und ΔV sowie Δl haben das gleiche Vorzeichen. Im Fall $\nu = 0,5$ bleibt das Volumen bei einer Zugspannung unverändert.

Material	Querkontraktionszahl ν
Aluminium	0,34
Beton	0,20
Glas	0,18 bis 0,30
Gummi	0,50
Holz	0,04 bis 0,59
Kupfer	0,35
Schaumstoff	0,10 bis 0,40
Stahl	0,27 bis 0,30

Bei manchen Materialien, beispielsweise bei Holz, sind die Werte des Elastizitätsmoduls E sowie der Querkontraktionszahl ν davon abhängig, ob die Zugspannung in Faserrichtung oder quer zur Faserrichtung wirkt. Bei Werten von $\nu > 0,5$ tritt bei einer Zugspannung eine Abnahme des Volumens auf; dies ist bei diversen porösen Materialien der Fall.

Stauchung von Festkörpern

Bei einer Stauchung wirken Kräfte senkrecht auf die Oberflächen eines Körpers ein. Dabei verkürzt sich die Länge des Materials, auf die der Druck einwirkt; bei ausreichend großen Drücken lässt sich auch eine geringfügige Abnahme des Volumens feststellen. Der Probekörper kann sich bei einer Stauchung – je nach Form und Festigkeit – auch verbiegen oder umknicken, wenn die maximale Belastbarkeit überschritten wird. Typische Beispiele für Stauchungen sind das Zusammenpressen einer Schuhsohle oder eines Brückenpfeilers unter der einwirkenden Gewichtskraft.



Abb. 53: Richtungen der einwirkenden Kräfte bei einer Stauchung.

Auch bei einer Stauchung wird die Formänderung des Materials durch eine (Druck-)Spannung beschrieben. Die Druckspannung ist ebenso wie die Zugspannung definiert als Verhältnis der einwirkenden Kraft F zur Querschnittsfläche A des Materials. Das Symbol für die stauchende Spannung ist wiederum σ , die Einheit ist ebenfalls Pascal. Für eine elastische Stauchung gilt:

$$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (58)$$

Die Druckspannung entspricht formal der Zugspannung, hat jedoch aufgrund der entgegengesetzten Richtung der Kraft ein negatives Vorzeichen; ebenso ist in diesem Fall die „Stauchung“ $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ negativ. In einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm verläuft die Kurve einer Stauchung somit im dritten Quadranten.

Bei einer elastischen Stauchung ist der Proportionalitätsfaktor E im Hookeschen Bereich mit dem *Elastizitätsmodul* E einer elastischen Dehnung identisch. Bei stärkeren Belastungen weicht die Form der Stauchungs-Kurve meist deutlich von der Dehnungs-Kurve ab. Bei manchen Materialien, beispielsweise Stein, Beton, Keramik oder Gusseisen sind die maximalen Belastungen gegenüber Druckspannungen zudem wesentlich größer als die gegenüber Zugspannungen.

Biegung

Eine Biegung, beispielsweise eines Balkens, entsteht durch eine Krafteinwirkung auf das eine Ende des Gegenstands, während das andere Ende fest eingespannt ist. Das Produkt aus der Länge l des Gegenstands und der Kraft F entspricht dem wirkenden Drehmoment M .

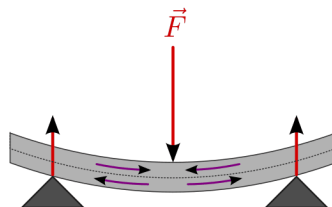


Abb. 54: Richtungen der im Material entstehenden Spannungen bei einer Biegung.

Kennzeichnend für eine Biegung ist eine „neutrale Faser“ in der Mitte des Gegenstands. Oberhalb dieser neutralen Faser steht der Gegenstand unter Zugspannung und wird gedehnt, unterhalb der neutralen Faser steht der Gegenstand unter Druckspannung und wird gestaucht.

Auf Höhe der neutralen Faser wechselt die Spannung und Dehnung das Vorzeichen von positiv (Zugspannung) zu negativ (Druckspannung). Wird die Elastizitätsgrenze des Materials auf der Zug- oder Druckseite überschritten, so geht die Biegung in eine Knickung über.

Scherung und Torsion

Bei Scherungen und Torsionen werden parallel zueinander liegende Oberflächen gegeneinander verschoben oder verdreht. Die Länge des Gegenstands sowie sein Querschnitt bleiben dabei unverändert.

Scherung von Festkörpern

Bei einer Scherung wird durch Krafteinwirkung eine Seite eines Materials gegenüber einer gegenüber liegenden Seite verschoben; die scherenen Kräfte wirken dabei stets tangential zur Materialoberfläche. Ein typisches Beispiel für Scherungs-Beanspruchungen sind Kräfte, die auf Schrauben in Regalträgern einwirken. Ebenso können Zugkräfte auf Platten, die durch Nieten zusammengehalten werden, Scherspannungen hervorrufen. Auch die Schneidekanten von Scheren bewirken Scherungen im zu zerschneidenden Material.

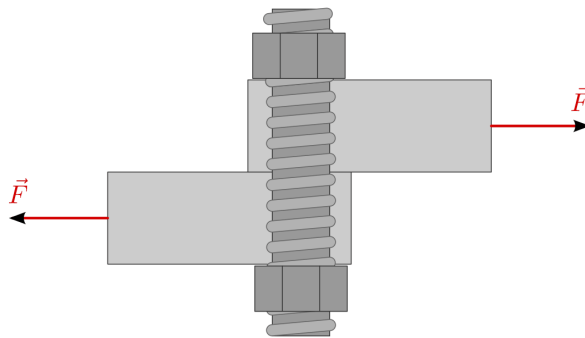


Abb. 55: Beispiel von scherenen Kräften auf eine Gewindestange.

Das Symbol für die Scherspannung ist τ , die Einheit ebenfalls Pascal. Die Scherspannung ist wiederum definiert als Verhältnis der einwirkenden Kraft F zur Querschnittsfläche A des Materials. Für eine elastische Scherung gilt:

$$\tau = \frac{F}{A} = G \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (59)$$

Der Proportionalitätsfaktor G wird Gleit- oder Schubmodul genannt und ist eine Materialkonstante. Die Einheit von G ist wiederum Pascal; je größer der Wert des Schubmodul eines Materials ist, desto größer ist seine auch Steifigkeit. Allgemein ist der Schubmodul eines Materials kleiner als der Elastizitätsmodul, es gilt also $G < E$; bei vielen Metallen beträgt der Schubmodul etwa ein Drittel ihres Elastizitätsmoduls. Scherspannungen führen somit schneller zu Brüchen als gleich große Zug- oder Druckspannungen.

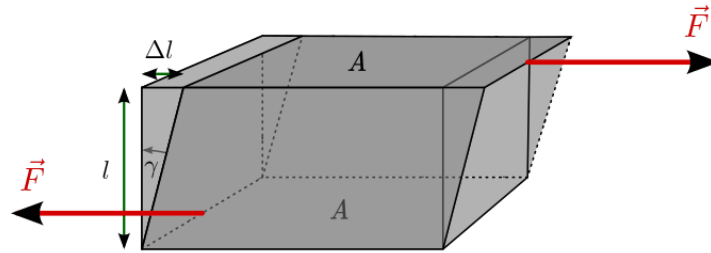


Abb. 56: Richtungen der einwirkenden Kräfte bei einer Scherung.

Die Scherung $\frac{\Delta l}{l}$ kann auch durch den Scherwinkel γ ausgedrückt werden, denn es gilt:

$$\tan(\gamma) = \frac{\Delta l}{l}$$

Ist der Scherwinkel klein ($< 5^\circ$), so kann näherungsweise $\gamma \approx \tan(\gamma)$ gesetzt werden.

Torsion von Festkörpern

Als Torsion wird eine Verdrillung eines Körpers, beispielsweise eines zylindrischen Stabes, bezeichnet. Bei dieser Art von Deformation handelt es sich prinzipiell ebenfalls um eine Scherung. Auch bei Torsionen gibt es einen elastischen Bereich, in dem die Verdrillung proportional zur Schubspannung τ ist. Für eine elastische Torsion eines Stabes mit Radius r gilt:

$$\frac{\tau}{r} = \frac{G}{l} \cdot \tan(\gamma) \quad (60)$$

Hierbei bezeichnet l die Länge des Stabs und γ den Torsionswinkel. Der Proportionalitätsfaktor G steht wiederum für der *Schubmodul* des Materials.

Kompression

Wird auf einen Körper zunehmend ein allseitiger Druck ausgeübt, beispielsweise durch den *hydrostatischen Druck* in einer Flüssigkeit, so verkleinert sich entsprechend sein Volumen. Der Zusammenhang zwischen der auftretenden Druckänderung Δp und der resultierenden relativen Volumenänderung $\frac{\Delta V}{V}$ kann mittels des so genannten Kompressionsmoduls K beschrieben werden:

$$\Delta p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V} \quad (61)$$

Die Einheit des Kompressionsmoduls K ist Pascal, wie auch die Einheit des Drucks. Das negative Vorzeichen in der obigen Gleichung ergibt sich daraus, dass bei einem von außen

einwirkenden, positiven Druck das Volumen kleiner wird, also in diesem Fall ΔV negativ ist.

Eine Abnahme des Volumens V bei einer Kompression ist gleichbedeutend mit einer Zunahme der Dichte ρ des Gegenstands. Dies kann man folgendermaßen herleiten:

1. Die Masse m des Objekts ändert sich während der Kompression nicht. Somit ist die Änderung Δm gleich Null:

$$m = \text{konstant} \iff \Delta m = 0$$

2. Für die Masse kann man $m = \rho \cdot V$ schreiben. Für die zeitliche Änderung der Masse ergibt sich nach der **Produktregel**:

$$\begin{aligned} \Delta(\rho \cdot V) &= \rho \cdot \Delta + V \cdot \Delta\rho = 0 \\ \Rightarrow \rho \cdot \Delta V &= -V \cdot \Delta\rho \end{aligned}$$

3. Die obige Gleichung kann folgendermaßen umgestellt werden:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V}$$

Man kann für die obige Gleichung (61) folglich auch schreiben:

$$\Delta p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V} = K \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Während also das Volumen bei einer Kompression abnimmt (negatives Vorzeichen), nimmt die Dichte zu.

Je größer der Wert des Kompressionsmoduls K ist, desto größer ist der nötige Druck, um eine bestimmte relative Volumenänderung zu erreichen. Die Werte von K von Festkörpern und Flüssigkeiten sind üblicherweise um mehrere Größenordnungen höher als die von Gasen.

Material	Kompressionsmodul K in Pa
Diamant	$4,4 \cdot 10^{11}$
Glas	$3,5 \cdot 10^{10}$ bis $5,5 \cdot 10^{10}$
Luft	$1,0 \cdot 10^5$ (isotherm) bis $1,4 \cdot 10^5$ (adiabatisch)
Öl	$1,0 \cdot 10^9$ bis $1,6 \cdot 10^9$
Stahl	$1,6 \cdot 10^{11}$
Wasser	$2,1 \cdot 10^9$

Ist der Kompressionsmodul eines Materials hoch, so bedeutet dies, dass das Material einer Kompression einen hohen Widerstand entgegensetzt, sich also nur schwer komprimieren lässt. Beispielsweise bei Gasen wird hingegen häufig der Kehrwert des Kompressionsmoduls, die so genannte Kompressibilität $\kappa = \frac{1}{K}$ verwendet. Ein Material mit einer hohen Kompressibilität κ ist also leicht zu komprimieren.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Mechanik der Flüssigkeiten

In der Hydrodynamik werden die mechanischen Eigenschaften von Flüssigkeiten, insbesondere von Wasser, untersucht.

Druck in Flüssigkeiten

Flüssigkeiten lassen sich durch mechanische Belastung (fast) nicht zusammenpressen („komprimieren“). Dies gilt sowohl für von außen wirkende Kräfte wie auch für den so genannten „Schweredruck“, der sich aus dem Eigengewicht der Flüssigkeit ergibt.

Kolbendruck

Übt man mit einem Kolben eine Kraft auf eine Flüssigkeit aus, die sich in einem geschlossenen Behälter befindet, so bleibt das Volumen der Flüssigkeit unverändert; allerdings baut sich im Inneren der Flüssigkeit ein „Gegendruck“ auf, der die von außen einwirkende Kraft ausgleicht.

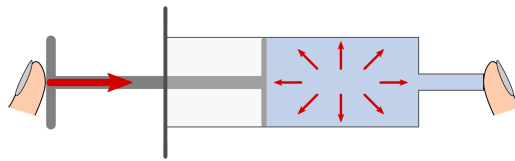


Abb. 57: Druck in Flüssigkeiten am Beispiel des Kolbendrucks in einer Spritze.

In einer Flüssigkeit oder in einem Gas wirkt der Kolbendruck stets in alle Raumrichtungen gleich stark („Pascalsches Prinzip“). Wird beispielsweise von links Druck auf Wasser ausgeübt, das sich in einem durchlöchernten Schlauch oder einem so genannten „Druckfortpflanzungs-Apparat“ befindet, so tritt das Wasser an den allen Öffnungen senkrecht zur Oberfläche aus.¹

Definition:

Als Druck bezeichnet man allgemein das Verhältnis einer Kraft F zu einer Fläche A , auf welche die Kraft senkrecht einwirkt.²

$$p = \frac{F}{A} \quad (62)$$

Beim Kolbendruck p_k wird die Kraft F auf einen Kolben mit der Fläche A ausgeübt.

¹ Das Wasser kann gegebenenfalls sogar „nach hinten losgehen“. Eine derartige Erfahrung hat vermutlich jedes Kind schon einmal gemacht, wenn es versucht hat, mit einem Finger die Öffnung eines Gartenschlauchs abzudichten. . . ;-)

² Da der (Kolben-)Druck in einer ruhenden Flüssigkeit in alle Richtungen gleich groß ist, wird er durch eine skalare Größe angegeben. In Festkörpern wird ein mechanischer Druck stets senkrecht zu einer der Oberflächen angegeben. Die mechanischen Spannungen im Inneren des Festkörpers können in unterschiedlichen Richtungen verschieden groß sein.

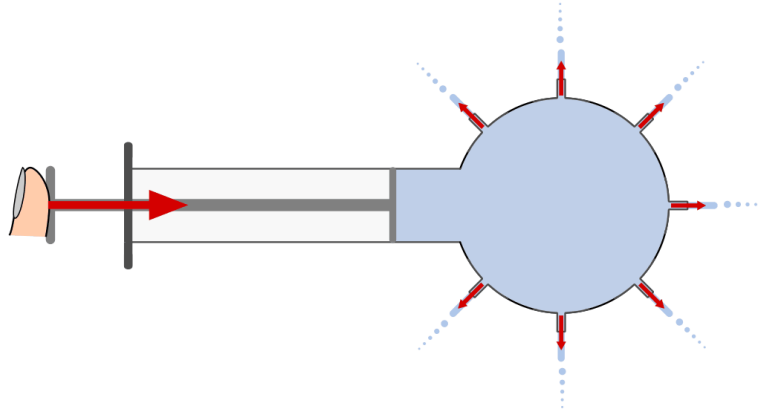


Abb. 58: Druckausbreitung am Beispiel eines Druckfortpflanzungs-Apparates.

Einheit:

Die Grundeinheit des Drucks, die sich aus der obigen Formel ergibt, ist nach Blaise Pascal benannt. Für ein Pascal (1 Pa) gilt folgender Zusammenhang:

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Größere Drücke, wie sie in der alltäglichen Praxis des öfteren anzutreffen sind, werden häufig in der Einheit „Bar“ (bar) angegeben. Dabei gilt:

$$1 \text{ bar} = 100\,000 \text{ Pa}$$

Ein Bar entspricht auf der Erde in etwa der Größe des Luftdrucks in Bodennähe.

Der gegebenenfalls auf ein Fluid einwirkende Kolbendruck sowie der im nächsten Abschnitt behandelte Schweredruck werden in Summe auch als *statischer* Druck p_{stat} bezeichnet. Diese Druckformen treten sowohl in ruhenden wie auch in sich bewegenden Fluiden auf und wirken an einer gegebenen Stelle stets in alle Raumrichtungen gleichermaßen.

Schweredruck

Durch das Eigengewicht der Flüssigkeit wird innerhalb der Flüssigkeit ein mit zunehmender Tiefe immer größer werdender Schweredruck hervorgerufen; dieser wirkt in einer bestimmten Tiefe in alle Raumrichtungen gleich stark.

Die Größe p_s des Schweredrucks lässt sich berechnen, wenn man das Volumen einer Flüssigkeitssäule mit einer Grundfläche A und einer Gewichtskraft $F_G = m_{\text{Fl}} \cdot g$ betrachtet.

Am Boden der Flüssigkeitssäule gilt:

$$p_s = \frac{F_{G,\text{fl}}}{A} = \frac{m_{\text{Fl}} \cdot g}{A}$$

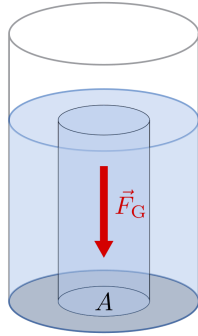


Abb. 59: Schweredruck einer Flüssigkeitssäule.

Die Masse m der Flüssigkeit kann auch als Produkt aus ihrer *Dichte* ρ und ihrem Volumen V geschrieben werden. Das Volumen V der Flüssigkeit wiederum entspricht dem Produkt aus der Grundfläche A und der Höhe h des betrachteten Quaders. Es gilt also:

$$m_{\text{Fl}} = \rho_{\text{Fl}} \cdot V \quad \text{und} \quad V = A \cdot h$$

Setzt man $m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h$ in die obere Gleichung ein, so kann die Fläche A im Zähler und Nenner gekürzt werden. Es ergibt sich damit folgende Formel:

$$p_s = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot h \quad (63)$$

Der Schweredruck in einer Flüssigkeit hängt, da der Ortsfaktor g konstant ist, nur von der Dichte der Flüssigkeit und der Höhe der Flüssigkeitssäule ab.

Beispiel:

- Wie hoch ist der Schweredruck des Wassers in $h = 10$ m unterhalb der Wasseroberfläche?

Für den Schweredruck gilt mit $\rho_{\text{Wasser}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$:

$$p_s = \rho \cdot g \cdot h = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 10 \text{ m} = 98\,100 \text{ Pa}$$

Der Schweredruck des Wassers in $h = 10$ m beträgt somit knapp 100 000 Pa, also rund 1 bar.

Um Verwechslungen zu vermeiden, wird die Angabe des Schweredrucks in einer Flüssigkeit häufig um die Angabe (man.) ergänzt. Dieses Kürzel steht für „Manometer-Druck“ und soll darauf hindeuten, dass sich die Druckangabe relativ zum Luftdruck bezieht. Addiert man beispielsweise zu dem Schweredruck von $p_s = 1$ bar (man.) noch den Luftdruck dazu, der ebenfalls $p_{\text{Luft}} = 1$ bar groß ist, so erhält man $p = 2$ bar (abs.) als „absoluten“ Druck, der in dieser Tiefe vorherrscht.

Die Zunahme des Schweredrucks mit der Tiefe ist unabhängig von der Form der darüber liegenden Wassersäule. Dieses als „hydrostatisches Paradoxon“ bekannte Prinzip kann man beispielsweise mittels einer Anordnung von unterschiedlich geformten Glasgefäßen zeigen, die untereinander durch Wasserleitungen verbunden sind („kommunizierende Gefäße“).

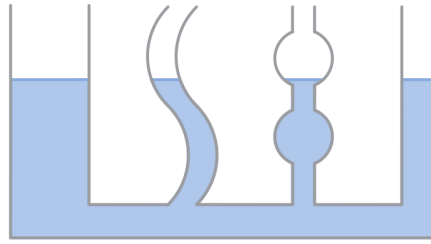


Abb. 60: Gleiche Wasserniveaus bei verbundenen Gefäßen unterschiedlicher Form (hydrostatisches Paradoxon).

Bei einer solchen Anordnung ist das Wasserniveau in allen Gefäßen gleich hoch – ein höheres Wasserniveau in einem der Gefäße hätte einen höheren Wasserdruck auf die unteren Wasserschichten in diesem Gefäß zur Folge, wodurch wiederum Wasser von dort in die übrigen Gefäße gepresst würde. Dieses Prinzip wird nicht nur zur Konstruktion von Siphons als „Geruchstopper“ verwendet (beispielsweise an Waschbecken), sondern ebenso, um mittels so genannter „Schlauchwaagen“ – ähnlich wie mit Wasserwaagen – über sehr große Entfernungen hinweg eine waagrechte Ausrichtung von Gegenständen zu erreichen.

Druckmessung

Die Zunahme des Schweredruckes mit der Höhe der Wassersäule wird bei so genannten „U-Rohr-Manometern“ zur Druckmessung genutzt. Als „Manometer“ bezeichnet man allgemein Druckmessgeräte, die einen externen, relativ zum Luftdruck vorherrschenden Druck p_{ext} messen.

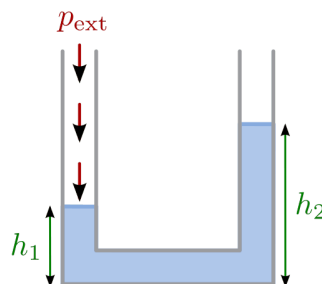


Abb. 61: Messung eines externen Drucks p_{ext} mit Hilfe eines U-Rohr-Manometers.

Wird auf ein Ende eines mit einer Flüssigkeit gefüllten U-Rohrs ein externer Druck p_{ext} ausgeübt, so wird durch diesen die Flüssigkeit in die andere Hälfte des U-Rohrs verdrängt. Dies erfolgt so lange, bis sich in der anderen Hälfte durch die höhere Wassersäule ein hinreichend großer Schweredruck aufgebaut hat, der dem externen Druck p_{ext} entgegenwirkt.

Im Gleichgewichtsfall gilt:

$$\begin{aligned}
p_{\text{links}} &= p_{\text{rechts}} \\
p_{\text{ext}} + p_{s,1} &= p_{s,2} \\
p_{\text{ext}} + \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot h_1 &= \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot h_2
\end{aligned} \tag{64}$$

Durch diesen Zusammenhang kann unmittelbar die gesuchte Größe p_{ext} bestimmt werden. Schreibt man $\Delta h = h_2 - h_1$, so folgt:

$$p_{\text{ext}} = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot \Delta h \tag{65}$$

Zur Messung des externen Drucks p_{ext} muss somit lediglich der sich einstellende Unterschied der Füllhöhen, also eine Länge gemessen werden. Da der Zusammenhang direkt proportional beziehungsweise linear ist, kann durch eine Kalibrierung auf eine bestimmte Flüssigkeit auch eine entsprechende Skala mit Druckwerten angebracht werden. Für kleine zu messende Druckwerte verwendet man eine Flüssigkeit mit geringer Dichte, für hohe Drücke eine Flüssigkeit mit hoher Dichte, damit ein entsprechend großer Gegendruck durch die Schwere des Fluids zustande kommt.

Genau genommen muss bei der Herleitung des Druck-Gleichgewichts in einem U-Rohr (Gleichung (64)) auch noch der Luftdruck berücksichtigt werden. Dieser wirkt allerdings gleichermaßen auf beide Seiten des U-Rohrs ein und hat daher keinen Einfluss auf das Gleichgewicht. Wäre allerdings das rechte Ende des U-Rohrs oben abgeschlossen und luftleer, so müsste man den dann nur auf die linke Seite einwirkenden Luftdruck berücksichtigen; in diesem Fall spricht man von einem Barometer, das üblicherweise zur Messung des Luftdrucks verwendet wird.

Hydraulische Anlagen und Druckwandler

Eine wichtige technische Anwendung der Inkompressibilität und gleichmäßigen Druckausbreitung in Flüssigkeiten sind hydraulische Anlagen. Hierbei wird auf der einen Seite eine (verhältnismäßig) schwache Kraft auf einen Kolben mit möglichst geringem Durchmesser ausgeübt. Der durch den Kolben ausgeübte Druck $p = \frac{F_1}{A_1}$, also das Verhältnis aus der ausgeübten Kraft F_1 und der Querschnittsfläche A_1 des Kolbens, entspricht in guter Näherung dem insgesamt in der Flüssigkeit wirkenden Druck, da gegenüber ihm der Schweredruck meist vernachlässigbar klein ist.

Auf der anderen Seite der hydraulischen Anlage befindet sich ein zweiter Kolben mit (verhältnismäßig) großer Querschnittsfläche A_2 . Da innerhalb der Flüssigkeit der Kolbendruck $p = \frac{F}{A}$ an allen Stellen gleich groß ist, wird beim Hineinpresse des kleinen Kolbens eine Kraft auf den großen Kolben ausgeübt, die um das Verhältnis der Kolbenflächen verstärkt ist:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \\
\Leftrightarrow F_1 &= \frac{A_1}{A_2} \cdot F_2
\end{aligned} \tag{66}$$

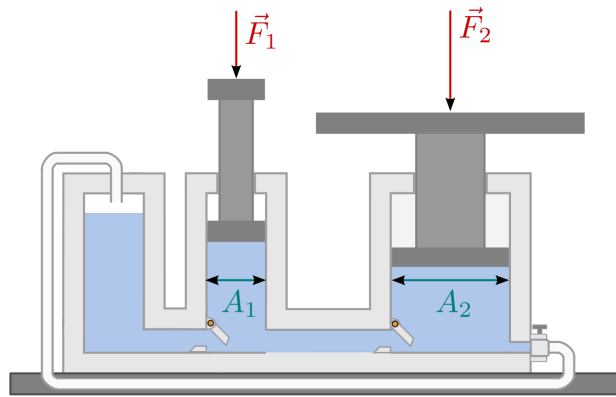


Abb. 62: „Gleichgewicht“ an einer hydraulischen Anlage.

Diese zunächst unerwartete Tatsache, dass eine kleine schwache Kraft auf den kleinen Kolben eine große Kraft am großen Kolben bewirkt, kann man sich anschaulich damit erklären, dass am großen Kolben wesentlich mehr Flüssigkeits-Teilchen „anstoßen“ als am kleinen; die unter Druck gesetzte Flüssigkeit kann daher in Richtung des großen Kolbens auch leichter zusätzlichen Raum einnehmen. Vergleichsweise kann man sich als Merkhilfe auch vorstellen, dass man zum Abdichten eines kleinen Lochs in einer Wasserleitung weniger Kraft braucht als bei einem großen Loch, obwohl der Wasserdruck in beiden Fällen gleich ist.

Eine hydraulische Anlage stellt somit ebenfalls einen *Kraftwandler* dar. Die *goldene Regel der Mechanik* gilt unverändert: Um den großen Kolben um eine Höhe s_2 anzuheben, muss man den kleinen Kolben um eine entsprechend längere Wegstrecke s_1 bewegen. Es gilt mit der obigen Gleichung (66):

$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

$$\Leftrightarrow F_1 \cdot s_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1 \cdot s_2$$

Hierbei kann man die Kraft F_1 , die als gemeinsamer Faktor auf beiden Seiten der Gleichung auftritt, kürzen. Für das Verhältnis der zurückgelegten Wegstrecken folgt damit:

$$s_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot s_2 \quad (67)$$

Um den großen Kolben nennenswert nach oben zu bringen, müsste der kleine Kolben wesentlich länger sein. Als Alternative hierzu kann ein Ventil-System und ein Reservoir mit Hydraulik-Flüssigkeit verwendet werden. Während des „Hochpumpens“ der Last wird aus dem Reservoir nachgetankt; zum Herablassen der Last muss hingegen ein Verschluss-Mechanismus geöffnet werden, so dass die Hydraulik-Flüssigkeit durch das Gewicht der Last wieder zurück in das Reservoir gedrückt wird. Hydraulische Anlagen werden in der Praxis unter anderem in Lastenhebern, in Münzpressen sowie in Bremsanlagen von Fahrzeugen eingesetzt.

Ein zweites wichtiges Prinzip bei der technischen Verwendung von Fluiden sind so genannte Druckwandler. Diese bestehen im Wesentlichen aus zwei Rohren mit unterschiedlichem Durchmesser und einer sich zwischen den beiden Rohren befindenden Kolbenstange.

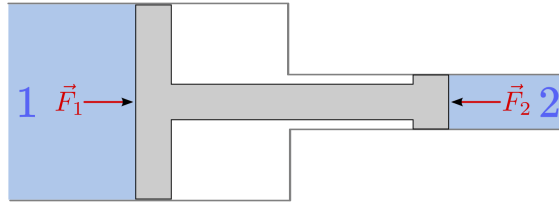


Abb. 63: Schematischer Aufbau eines Druckwandlers.

Von den beiden Fluiden 1 und 2 wird jeweils aufgrund der darin vorherrschenden Drücke eine Kraft auf den Kolben ausgeübt. Im Gleichgewichtsfall müssen diese beiden Kräfte F_1 und F_2 gleich groß sein:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ \Rightarrow p_1 \cdot A_1 &= p_2 \cdot A_2 \end{aligned}$$

Die in den beiden Fluiden vorherrschenden Drücke sind im Gleichgewichtsfall somit umgekehrt proportional zu den Querschnittsflächen A_1 und A_2 des Kolbens:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{A_2}{A_1} \quad (68)$$

In der praktischen Anwendung wird dieses Prinzip beispielsweise folgendermaßen verwendet: Auf der linken Seite wird die Druckluft eines Kompressors als Fluid verwendet; der Druck p_1 liegt dabei bei etwa 10 bar. Durch den Druckwandler wird damit auf das Fluid der rechten Seite, beispielsweise Hydraulik-Öl, ein wesentlich höherer Druck p_2 ausgeübt; mit diesem Druck kann wiederum eine hydraulische Anlage betrieben werden. Dieses Prinzip wird unter anderem in industriellen Einspann-Vorrichtung verwendet.

Statischer Auftrieb in Flüssigkeiten

Ist ein Körper mit einem Volumen V von einer Flüssigkeit umgeben, so erfährt er durch diese eine Auftriebskraft F_A . Diese resultiert aus der Tatsache, dass der Schweredruck innerhalb einer Flüssigkeit mit der Tiefe zunimmt.

Die horizontalen Kräfte, die durch den Druck der umgebenden Flüssigkeit auf den Körper einwirken, sind jeweils paarweise gleich groß und heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf (sofern der Körper nicht komprimierbar ist). Die nach unten beziehungsweise oben gerichteten Kräfte F_1 und F_2 hingegen sind aufgrund der Druckdifferenz unterschiedlich groß.

Bezeichnet man mit $A_1 = A_2 = A$ die Grund- beziehungsweise Deckfläche des Körpers, so gilt:

$$\Delta F = F_2 - F_1 = p_2 \cdot A - p_1 \cdot A = A \cdot (p_2 - p_1)$$

Die Auftriebskraft F_A ist mit der Kraftdifferenz $\Delta F = F_2 - F_1$ identisch. Zur Berechnung ihres Betrags kann nach Gleichung (63) für den Schweredruck p_1 beziehungsweise p_2 wie-

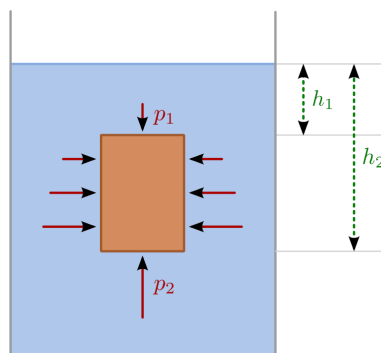


Abb. 64: Die Auftriebskraft in Flüssigkeiten.

derum $p_1 = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot h_1$ beziehungsweise $p_2 = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot h_2$ eingesetzt werden, wobei ρ die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet:

$$\begin{aligned} F_A = \Delta F &= A \cdot (p_2 - p_1) \\ &= A \cdot (\rho \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot g \cdot h_1) \\ &= A \cdot \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen h_1 und h_2 die Eintauchtiefen der Ober- beziehungsweise Unterseite des Körpers, ihre Differenz $\Delta h = h_2 - h_1$ entspricht der Höhe h_k des Körpers. Mit $V_k = A \cdot h_k$ ergibt sich für die Auftriebskraft folgende Formel:

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V_k \quad (69)$$

Der Betrag der Auftriebskraft hängt somit ausschließlich von der Dichte $\rho = \rho_{\text{Fl}}$ der Flüssigkeit und dem Volumen V_k des eintauchenden Körpers ab.

Archimedisches Prinzip und Dichtemessung

Jeder Festkörper verdrängt beim Eintauchen ebenso viel Volumen an Flüssigkeit wie er selbst an Volumen besitzt; dieser empirisch gefundene Sachverhalt wird nach seinem Entdecker **Archimedes** auch als „Archimedisches Prinzip“ bezeichnet. Da folglich $V_{\text{fl}} = V_k$ gilt, kann man auf den Index verzichten und einfach V für das Volumen des eintauchenden Körpers beziehungsweise der verdrängten Flüssigkeit schreiben. Die Auftriebskraft F_A ist also gleich der Gewichtskraft $\rho \cdot V \cdot g = m \cdot g$ der verdrängten Flüssigkeit:

$$\frac{F_A}{F_G} = \frac{\rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V}{\rho_K \cdot g \cdot V} = \frac{\rho_{\text{Fl}}}{\rho_K}$$

Dieser Zusammenhang kann genutzt werden, um mittels einer Messung der Gewichtskraft F_G eines Körpers in Luft und der verringerten Gewichtskraft $F_G^* = F_G - F_A$ in Wasser einerseits die Auftriebskraft F_A und gleichzeitig, da die Dichte $\rho_{\text{Wasser}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ bekannt ist, auch die Dichte ρ_K des Körpers zu berechnen:

$$\rho_K = \frac{F_G}{F_G - F_G^*} \cdot \rho_{\text{Fl}} = \frac{F_G}{F_A} \cdot \rho_{\text{Fl}}$$

Eine andere Methode zur Bestimmung der Dichte von Festkörpern besteht darin, die Masse des jeweiligen Gegenstands mit Hilfe einer Waage zu ermitteln und mittels eines Messzylinders oder eines Überlaufgefäßes die scheinbare Volumenzunahme der Flüssigkeit beim Eintauchen des Festkörpers zu messen.

Schwimmen, Sinken und Schweben

Die Dichte ρ_K des Körpers hat keine Auswirkung auf die Auftriebskraft, entscheidet aber darüber, ob er in der Flüssigkeit aufsteigt (schwimmt), unverändert an gleicher Stelle bleibt (schwebt) oder sich nach unten bewegt (sinkt).

- Ist $\rho_K > \rho_{F1}$, so ist die Gewichtskraft $F_G = \rho_K \cdot g \cdot V$ des Körpers größer als die Auftriebskraft F_A , die der Körper durch das Eintauchen in die Flüssigkeit erfährt.

In diesem Fall sinkt der Körper nach unten. Die resultierende Kraft (seine „scheinbare“ Gewichtskraft F_G^*) ist gleich der Differenz aus Gewichts- und Auftriebskraft, also:

$$F_G^* = |F_G - F_A| = |\rho_K - \rho_{F1}| \cdot g \cdot V$$

- Ist $\rho_K = \rho_{F1}$, so ist die Gewichtskraft $F_G = \rho_K \cdot g \cdot V$ des Körpers gleich der Auftriebskraft F_A .

In diesem Fall „schwebt“ der Körper, behält also seine Position bei.

- Ist $\rho_K < \rho_{F1}$, so ist die Gewichtskraft $F_G = \rho_K \cdot g \cdot V$ des Körpers kleiner als die Auftriebskraft $F_A = \rho_{F1} \cdot g \cdot V$.

In diesem Fall schwimmt der Körper an der Oberfläche beziehungsweise steigt nach oben. Auch in diesem Fall ist die resultierende Kraft gleich der Differenz aus Gewichts- und Auftriebskraft. Taucht der Körper vollständig ein, so ist sie nach oben (zur Oberfläche der Flüssigkeit hin) gerichtet:

$$F_G^* = |F_G - F_A| = |\rho_{F1} - \rho_K| \cdot g \cdot V$$

Ein schwimmender Körper befindet sich zum Teil über, zum Teil in der Flüssigkeit. Er taucht soweit ein, bis sich ein Gleichgewicht zwischen seiner Gewichtskraft F_G und der Auftriebskraft F_A einstellt:

$$F_G = F_A \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_K \cdot g \cdot V_{K,ges} = \rho_{F1} \cdot g \cdot V_{K,nass}$$

Hierbei kann man den Ortsfaktor g , der auf beiden Seiten der Gleichung auftritt, kürzen. Löst man die verbleibende Gleichung nach dem eintauchenden Volumen-Anteil $V_{K,nass}$ des Körpers auf, so folgt:

$$\frac{V_{K,nass}}{V_K} = \frac{\rho_K}{\rho_{F1}}$$

Der eintauchende Anteil des Körpervolumens $V_{K,nass}$ entspricht also dem Verhältnis $\frac{\rho_K}{\rho_{F1}}$ der Dichten des schwimmenden Körpers und der Flüssigkeit.³

³ Beispielsweise taucht Eis, das eine Dichte von $\rho_{Eis} \approx 910 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ hat, zu 91% in Wasser (Dichte $\rho_{F1} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) ein, nur die „Spitze des Eisbergs“ (9%) bleibt über Wasser sichtbar. Styropor hingegen hat eine

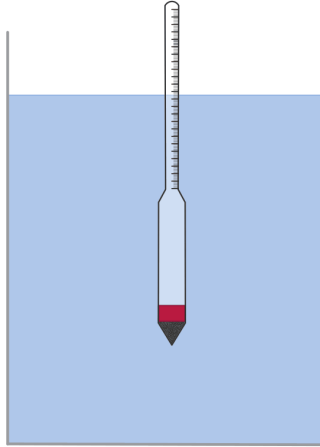


Abb. 65: Dichtemessung einer Flüssigkeit mit Hilfe eines Aräometers.

Dieses Prinzip wird beispielsweise bei so genannten Senkwaagen („Aräometer“) genutzt. Diese bestehen aus einem hohlen Glaskörper mit einem Volumen V_K , der am unteren Ende mit Bleischrot gefüllt ist und am oberen Ende eine Skala zum unmittelbaren Ablesen der Flüssigkeitsdichte enthält. Je geringer die Dichte der Flüssigkeit ist, desto tiefer taucht das Aräometer in die Flüssigkeit ein.

Die genannte Form des Auftriebs wird „statischer“ Auftrieb genannt. Es gilt sowohl, wenn sich der eintauchende Körper und die Flüssigkeit relativ zueinander bewegen als auch wenn sich Körper und Flüssigkeit in der Ruhelage befinden.

Kontinuitäts- und Bernoulli-Gleichung

Fließt eine Flüssigkeit kontinuierlich durch ein Rohrleitungssystem ohne Speichermöglichkeiten, so strömt in jedes beliebige Volumenelement immer genauso viel Masse hinein wie auch wieder heraus strömt („Kontinuitätsbedingung“). Kann die Reibung vernachlässigt werden und ist die Flüssigkeit inkompressibel, so muss damit an engen Stellen des Rohrsystems eine höhere Strömungsgeschwindigkeit auftreten als an Bereichen mit weitem Rohrquerschnitt.

Die Kontinuitätsgleichung

Dieser Effekt lässt sich durch eine Formel auch quantitativ bestimmen. Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ist ihre Dichte ρ an allen Stellen gleich. Wegen $m = \rho \cdot V$ gilt für den fließenden Masse-Strom $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$; soll der Masse-Strom konstant bleiben, so muss

Dichte von etwa $\rho \approx 50 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; es taucht somit nur zu $\frac{\rho_K}{\rho_{F1}} = \frac{50 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0,05 = 5\%$ in Wasser ein; 95% des Styropors schwimmen oberhalb der Wasseroberfläche.

Wird die Dichte in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ angegeben, so hat Wasser eine Dichte von $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. In diesem Fall kann man bei Materialien mit $\rho < \rho_{\text{Wasser}}$ unmittelbar am Dichtewert den Prozentsatz ablesen, der sich beim Schwimmen unterhalb der Wasseroberfläche befindet.

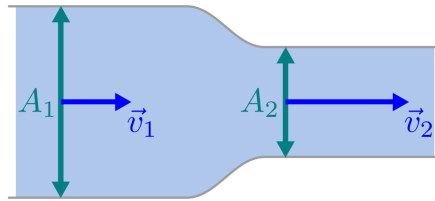


Abb. 66: Strömungsgeschwindigkeiten bei unterschiedlichen Rohrquerschnitten (Kontinuitätsbedingung).

aufgrund der konstanten Dichte folglich auch der Volumen-Strom $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ an allen Stellen gleich sein:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \text{konst} \quad \xrightarrow{\rho=\text{konst}} \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{konst}$$

Das Volumen V der Flüssigkeit wiederum lässt sich als Produkt der Querschnittsfläche A des betrachteten Rohrstücks und der durchlaufenen Strecke s beschreiben. Somit gilt:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = A \cdot v$$

Durch zwei benachbarte Rohrstücke mit den Querschnitten A_1 und A_2 fließt aufgrund der Kontinuitätsbedingung stets ein gleicher Massen- beziehungsweise Volumenstrom. Für die Strömungsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 in den Rohrstücken gilt also:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot v_1 &= A_2 \cdot v_2 \\ \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} &= \frac{A_2}{A_1} \end{aligned}$$

Bei einer reibungslosen Flüssigkeit verhalten sich die Strömungsgeschwindigkeiten somit umgekehrt proportional zum Rohrquerschnitt.

Die Bernoulli-Gleichung

Überprüft man mit einem Manometer an verschiedenen Stellen der Rohrleitung den statischen Druck p_{st} der Flüssigkeit, so zeigt sich, dass an den engen Stellen mit größeren Geschwindigkeiten *geringere* statische Druckwerte gemessen werden. Diese zunächst etwas verblüffend wirkende Tatsache wird als „hydrodynamisches Paradoxon“ bezeichnet.

Man kann dieses Phänomen dadurch erklärt, dass an allen Stellen der Flüssigkeit ein gleich großer Gesamtdruck p_{ges} vorliegt. Dieser Gesamtdruck wiederum ist gleich der Summe des statischen Drucks $p_{\text{st}} = \rho \cdot g \cdot h$ und des dynamischen Drucks („Staudruck“) $p_{\text{dyn}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$ der Flüssigkeit:⁴

⁴ Der umgangssprachliche Begriff „Staudruck“ sollte nicht verwendet werden, da er irreführend ist. Beispielsweise müssen die Mauern von Staudämmen aufgrund des (in alle Richtungen wirkenden) Schwerkdrucks p_s unten dicker sein als oben. Dies gilt auch, wenn sich das gestaute Wasser nicht bewegt, also kein dynamischer Druck vorliegt.

$$p_{\text{ges}} = p_{\text{st}} + p_{\text{dyn}} = \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{konst} \quad (70)$$

Dieser Zusammenhang wird als Bernoulli-Gleichung bezeichnet: Nimmt in einem geschlossenen Rohrsystem der dynamische Druck aufgrund einer zunehmenden Strömungsgeschwindigkeit zu, so muss gleichzeitig der statische Druck abnehmen.

Während der statische Druck p_{st} gleichmäßig in alle Richtungen wirkt, wirkt der dynamische Druck p_{dyn} ausschließlich auf Flächen, die senkrecht zur Strömungsrichtung stehen.

Formal hat die Bernoulli-Gleichung eine große Verwandtschaft mit dem Energieerhaltungssatz der Mechanik: Dieser besagt, dass in einem isolierten System ohne Reibungseffekte die Summe aus potentieller und kinetischer Energie erhalten bleibt:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \text{konst}$$

Tatsächlich erhält man die Bernoulli-Gleichung, wenn man in der obigen Gleichung zunächst $m = \rho \cdot V$ schreibt und anschließend die Gleichung durch V dividiert. Der Gesamtdruck in einem geschlossenen Rohrsystem entspricht somit einer Energiedichte.

Die Bernoulli-Gleichung wird in zahlreichen technischen Bereichen genutzt:

- Bei einer Wasserstrahlpumpe lässt man Wasser durch eine sich verengendes Rohrstück strömen. Mit der zunehmenden Wassergeschwindigkeit an der offenen Engstelle nimmt der ausschließlich in Strömungsrichtung wirkende dynamische Druck p_{dyn} zu, der allseitig wirkende statische Druck p_{st} hingegen ab. Als Folge davon wird Luft (oder ein anderes Fluid) durch den Seitenstutzen „angesaugt“.
- Zerstäuber in Sprayflaschen funktionieren auf ähnliche Weise: Vor der Düse sorgt eine schnelle Luftströmung für eine Reduzierung des statischen Luftdrucks und damit für ein „Ansaugen“ der Flüssigkeit in dem Zerstäuberrohr.
- Mit einer so genannten Messblende kann die Strömungsgeschwindigkeit eines Fluids in einer Röhre bestimmt werden.

Das obige Bernoulli-Prinzip gilt nicht nur für Flüssigkeiten, sondern auch für Gase, wobei es für die Flugfähigkeit von Körpern von entscheidender Bedeutung ist („dynamischer Auftrieb“). In beiden Fällen müssen allerdings bei kleinen Rohrdurchmessern und/oder hohen Strömungsgeschwindigkeiten Reibungseffekte und Turbulenzen berücksichtigt werden.

Viskosität (innere Reibung)

Ist die Reibung innerhalb einer Flüssigkeit nicht vernachlässigbar, so ist eine Kraft beziehungsweise ein Druck nötig, um eine Flüssigkeit gegenüber einem Rohrsystem gleichmäßig zu bewegen. Wie groß die nötige Schubkraft ist, hängt von der Viskosität („Zähigkeit“) der Flüssigkeit ab.

Legt man beispielsweise ein Deckglas auf einen Flüssigkeitstropfen und verschiebt es auf der dünnen Flüssigkeitsschicht langsam und gleichmäßig entlang der Grundfläche, so ist zum Aufrechterhalten der Bewegung eine Kraft F erforderlich. Diese Kraft ist proportional zur Fläche A des Glases, zur Geschwindigkeit v der Bewegung und zur Viskosität η

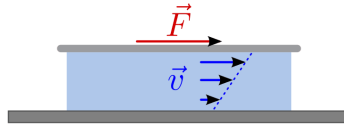


Abb. 67: Geschwindigkeitsprofil zweier aneinander gleitender Platten mit einer dünnen, viskosen Flüssigkeitsschicht.

der Flüssigkeit; zudem ist die Kraft umgekehrt proportional zur Dicke s der Flüssigkeitsschicht. Insgesamt gilt also für diese zur Überwindung der Reibung nötige Kraft F :

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{s}$$

Die obige Gleichung kann auch umgeformt werden, um ein Maß für die Viskosität einer Flüssigkeit zu erhalten:

$$\eta = \frac{F \cdot s}{A \cdot v} \quad (71)$$

Die Einheit der Viskosität kann nach der obigen Formel als „Pascalsekunde“ ausgedrückt werden:

$$[\eta] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Viskositäten von Flüssigkeiten werden üblicherweise bei einer Temperatur von 20°C angegeben, da sie stark temperaturabhängig sind. Bei den meisten Flüssigkeiten nimmt die Viskosität mit zunehmender Temperatur stark ab, bei Gasen ist es umgekehrt.⁵

Wasser hat bei 20°C eine Viskosität von nahezu exakt $\frac{1}{1000} \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$. Da viele weitere Flüssigkeiten ähnliche Viskositätswerte aufweisen, wird die Viskosität in Tabellen allgemein oft in Millipaskalsekunden angegeben.⁶

⁵ Beispielsweise beträgt die Viskosität von Glycerin $12\,100 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ bei einer Temperatur von 0°C . Bei 20°C beträgt die Viskosität nur noch $1\,480 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, und bei 30°C nur noch $624 \text{ mPa} \cdot \text{s}$.

Ein mathematisches Modell für die Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität ist folgendes:

$$\eta(T) = c \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

Hierbei sind b und c experimentell zu bestimmende Konstanten. Die Gleichung kann dann genutzt werden, um Viskositätswerte bei anderen Temperaturen zu interpolieren.

⁶ Manchmal wird in Formelsammlungen und Tabellenwerken auch die so genannte Fluidität φ einer Flüssigkeit oder eines Gases angegeben. Diese ist gleich dem Kehrwert der Viskosität, es gilt also $\varphi = \frac{1}{\eta}$.

Bisweilen wird auch zwischen der obigen „dynamischen“ Viskosität η und der so genannten „kinematischen“ Viskosität ν unterschieden. Letztere erhält man, indem man die dynamische Viskosität durch die Dichte ρ der Substanz teilt.

Tab. 9: Viskositätswerte verschiedener Flüssigkeiten (bei 20 °C)

Substanz	Viskosität η in mPa · s
Aceton	0,32
Benzol	0,65
Blut	≈ 4
Ethanol	1,20
Glycerin	1480
Olivenöl	≈ 80
Sirup	$\approx 1\,000$ bis $10\,000$
Wasser (10 °C)	1,30
Wasser (20 °C)	1,00
Wasser (30 °C)	0,80

Messung der Viskosität einer Flüssigkeit

Experimentell kann die Viskosität einer Flüssigkeit mit folgenden Methoden bestimmt werden:

- Bei Kugelfall-Viskosimetern lässt man eine Kugel mit einem Radius r_K und einer Dichte ρ_K in einem Behälter absinken, der mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist.

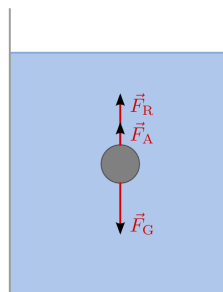


Abb. 68: Prinzip eines Kugelfall-Viskosimeters: Die Kugel sinkt aufgrund des Kräftegleichgewichts mit konstanter Geschwindigkeit

Die Kugel erfährt in diesem Fall eine von ihrer Geschwindigkeit v abhängige Reibungskraft, für die George Stokes folgende Formel fand:

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

Mit einer zunehmenden Sink-Geschwindigkeit der Kugel wird auch die wirkende Reibungskraft größer, bis sich ein Kräfte-Gleichgewicht zwischen der Stokeschen Reibungskraft, der Gewichtskraft F_G der Kugel und der Auftriebskraft F_A einstellt:

$$F_R = F_G - F_A$$

$$6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r_K \cdot v = (\rho_K - \rho_{F1}) \cdot V_K \cdot g$$

$$\eta = \frac{(\rho_K - \rho_{F1}) \cdot V_K \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot r_K \cdot v}$$

Die Viskosität der Flüssigkeit kann also unmittelbar berechnet werden, wenn die Dichten der Flüssigkeit und der Kugel sowie der Kugelradius bekannt sind und die Geschwindigkeit der konstant sinkenden Kugel gemessen wird.

- Bei Rotationsviskosimetern wird ein Zylinder in ein ebenfalls zylindrisches Messgefäß mit einem etwas größeren Durchmesser getaucht. Zwischen beide Zylinderoberflächen wird die zu prüfende Flüssigkeit gefüllt; dann wird mit einem Motor üblicherweise der innere Zylinder gleichmäßig gegen den äußeren gedreht und das dafür nötige Drehmoment als Maß für die wirkende Reibungskraft und somit – da die Zylindermasse bekannt sind – für die Viskosität gemessen. Bei professionellen Laborgeräten erfolgt die Auswertung automatisch über einen Mikroprozessor, der den berechneten Viskositätswert zugleich über ein Display ausgibt.
- Bei Kapillarviskosimetern lässt man ein bestimmtes Volumen der zu prüfenden Flüssigkeit durch ein dünnes, senkrecht aufgehängtes Glasrohr fließen. Die Viskosität der Flüssigkeit kann durch Messung der Durchlaufzeit t berechnet werden, indem man diese mit der Dichte ρ der Flüssigkeit und einer für den Apparat angegebenen Konstanten K multipliziert.

Laminare und turbulente Strömungen

Bei geringen Geschwindigkeiten treten häufig so genannte laminare Strömungen auf. Dabei bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen, als würden sie sich in übereinander geschichteten Lamellen befinden. Das Geschwindigkeitsprofil in einem zylindrischen Rohr ist dabei parabelförmig und nimmt zur Mitte des Rohres hin zu.

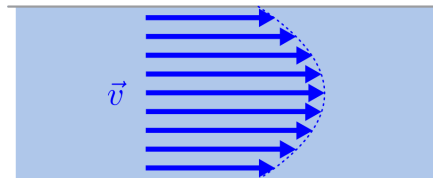


Abb. 69: Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Strömung in einer Rohrleitung.

Das Hagen-Poiseuillesche Gesetz

Für laminare Strömungen eines Fluids durch ein Rohr mit einem Radius r und einer Länge l haben [Gotthilf Hagen](#) und [Jean Poiseuille](#) folgende Formel entdeckt, die auch die Viskosität η der Flüssigkeit berücksichtigt:

$$\Delta p = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot r^4} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (72)$$

Berücksichtigt man die Viskosität η und somit Reibungseffekte zwischen der Flüssigkeit und den Gefäßwänden, so bleibt der Gesamtdruck in einem geschlossenen Rohrsystem nicht konstant, sondern sinkt mit zunehmender zur Länge l des Rohrsystems ab. Die obige Formel beschreibt den zusätzlichen Druck Δp zwischen dem Anfang und dem Ende des Rohrsystems, der zum Aufrechterhalten des Volumenstroms $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ notwendig ist.

Das Hagen-Poiseuillesche Gesetz wurde unter Annahme der folgenden Bedingungen formuliert:

1. Der Rohrdurchmesser r ist konstant.
2. Es wirken keine äußeren Kräfte durch die Rohrwand hindurch.
3. Es treten ausschließlich Reibungskräfte, jedoch keine *Trägheitskräfte* auf. Dies ist der Fall, wenn die Flüssigkeit während der Bewegung im Rohr nicht beschleunigt wird. Man spricht in diesem Fall von einer „stationären“, also einer sich zeitlich nicht ändernden, Strömung.
4. Die Flüssigkeitsteilchen an der Rohrwand sind in Ruhe, für sie gilt also $v = 0$. Haftet die Flüssigkeit nicht an der Rohrwand, so wird dies vom Hagen-Poiseuilleschen Gesetz nicht berücksichtigt.
5. Die Dichte ρ_{Fl} der Flüssigkeit ist konstant, sie ändert sich also mit zunehmendem Druck nicht. Eine solche Inkompressibilität gilt in sehr guter Näherung für Flüssigkeiten, bei Gasen nur bei nicht zu hohen Strömungsgeschwindigkeiten.

In der Praxis wird das Hagen-Poiseuillesche üblicherweise für die Beschreibung von zähflüssigen Fluiden in engen Rohrsystemen genutzt, in denen die obigen Bedingungen zumindest näherungsweise erfüllt sind. Von besonderer Bedeutung ist, dass der zum Aufrechterhalten des Volumenstroms benötigte Druck mit indirekt proportional zur vierten Potenz des Gefäß-Radius zunimmt; dies bedeutet beispielsweise für den menschlichen Körper, dass eine zunehmende Verengung der Blutgefäße – insbesondere durch zu viel [Cholesterin](#) bei der Nahrungsaufnahme – mit Bluthochdruck und der Gefahr von Herzkrankheiten einher geht.

Newtonsche Flüssigkeiten

Sind die Bedingungen für das Hagen-Poiseuillesche Gesetz erfüllt, so ist für eine Vergrößerung des Volumenstroms \dot{V} eine proportionale größere Druckdifferenz Δp nötig. Trägt man die Volumenstromstärke als Funktion der Druckdifferenz aus, so ergibt sich eine Gerade. Fluide, auf die dieses Verhalten zutrifft, bezeichnet man als „Newtonsche Flüssigkeiten“.

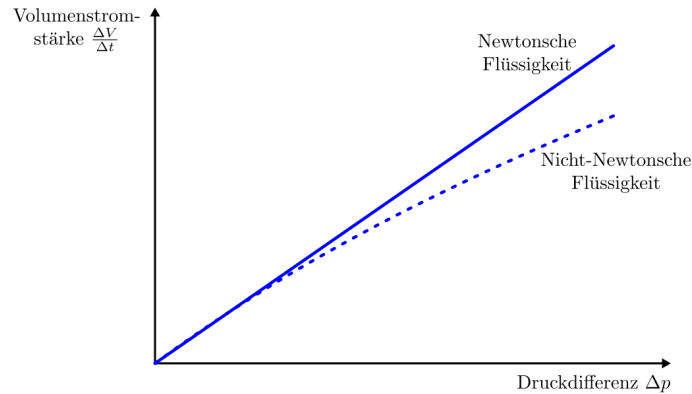


Abb. 70: Volumenstromstärke-Druckdifferenz-Diagramm einer Newtonschen und einer Nicht-Newtonschen Flüssigkeit.

Da im Hagen-Poiseuilles Gesetz alle Größen bis auf η direkt messbar sind, kann es auch zur experimentellen Bestimmung der Zähigkeit eines Fluids genutzt werden.

Strömungswiderstand

Setzt man die Druckdifferenz Δp zwischen Anfang und Ende einer Rohrleitung in Relation zum Volumenstrom $\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, so erhält man den so genannten Strömungswiderstand R_s . Es gilt also:

$$R_s = \frac{\Delta p}{\dot{V}} \quad (73)$$

Der Strömungswiderstand ist nicht nur abhängig von der Geometrie des Rohres, sondern auch noch von der Zähigkeit der durchströmenden Flüssigkeit; er wird in der Einheit $\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^5}$ angegeben. Der Kehrwert des Strömungswiderstands wird „Leitwert“ einer Kapillare genannt:

$$L = \frac{1}{R_s} \quad (74)$$

Setzt man das Hagen-Poiseuillesche Gesetz (72) in die Definition des Strömungswiderstand ein, so ergibt sich mit $A = \pi \cdot r^2$ beziehungsweise $A^2 = \pi^2 \cdot r^4$ folgende Formel für den Strömungswiderstand in einem Rohr mit runder Querschnittsfläche:

$$R_s = \frac{8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot l}{A^2}$$

Je geringer der Strömungswiderstand einer Newtonschen Flüssigkeit in einem Gefäß ist, desto steiler verläuft die Gerade im obigen Volumenstromstärke-Druckdifferenz-Diagramm. Da der Strömungswiderstand sowohl proportional zur Druckdifferenz Δp als auch proportional zur Länge l des Rohres ist, ergibt sich auch ein direkt proportionaler Zusammenhang zwischen Δp und ρ : Bei konstantem Durchmesser nimmt der Druck linear mit der Länge l des Rohres ab.

Muss eine Flüssigkeit mehrere Gefäße mit den Strömungswiderständen R_1, R_2, \dots nacheinander durchlaufen, so ist der insgesamt auftretende Strömungswiderstand R_{Ges} gleich der Summe aller Teilwiderstände.

Für eine „Reihenschaltung“ mehrerer Strömungswiderstände gilt also:

$$R_{\text{Ges}} = R_1 + R_2 + \dots$$

Können im umgekehrten Fall mehrere Kapillaren parallel durchlaufen werden, so addieren sich die Kehrwerte der Strömungswiderstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstands. Da der Kehrwert des $\frac{1}{R}$ eines Strömungswiderstands mit dem Leitwert L identisch ist, können in diesem Fall also auch die Leitwerte addiert werden.

Für eine „Parallelschaltung“ mehrerer Strömungswiderstände gilt somit:

$$\frac{1}{R_{\text{Ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \quad \text{bzw.}$$

$$L_{\text{Ges}} = L_1 + L_2 + \dots$$

Bei einer Reihenschaltung ist der Gesamt-Strömungswiderstand somit größer als der größte Teilwiderstand, bei einer Parallelschaltung geringer als der kleinste Teilwiderstand.

Die Reynolds-Zahl

Bei höheren Geschwindigkeiten und ungleichen Wandformen (z.B. Ecken, vorstehende Teile) können Wirbel entstehen, die von der Strömung mit transportiert werden; der Strömungswiderstand steigt dabei erheblich an. Eine mathematische Berechnung von derartigen „turbulenten“ Strömungen ist sehr aufwendig; mit Hilfe der von Osborne Reynolds beschriebenen und nach ihm benannten „Reynolds-Zahl“ kann jedoch grob abgeschätzt werden, ob bei einer Strömung laminares oder turbulentes Verhalten zu erwarten ist. Die Reynolds-Zahl Re berechnet sich wie folgt:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot r}{\eta} \quad (75)$$

Dabei bezeichnet ρ die Dichte des Fluids, v seine Strömungsgeschwindigkeit, η seine Viskosität und r den Radius des Rohres, durch den das Fluid strömt. Die Reynolds-Zahl selbst ist ein reiner Zahlenwert ohne Einheit. Ist ihr Wert für eine Strömung kleiner als 1100, so kann von einer laminaren Strömung ausgegangen werden, bei größeren Werten ist mit Wirbelbildungen zu rechnen.

Im menschlichen Blutkreislauf tritt turbulente Strömung normalerweise nur in der herznahen Aorta bei einer Strömungsgeschwindigkeit von 50 bis 70 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ auf. Rauhe Stellen, beispielsweise bei Venenentzündungen, können allerdings ebenfalls Wirbelbildungen begünstigen und zur Entstehung von Thrombosen führen.

Oberflächenspannung und Kapillarität

Kräfte, die zwischen den Molekülen einer einzelnen Substanz wirken, bezeichnet man als Kohäsionskräfte.⁷ Im Inneren einer Flüssigkeit heben sich durch das *Zusammenwirken mehrerer Kräfte* die einzelnen auf jedes Molekül wirkenden Kohäsionskräfte gegenseitig (weitgehend) auf. An der Oberfläche jedoch erfahren die Moleküle eine nach innen gerichtete resultierende Kraft, welche beispielsweise die Moleküle einer Flüssigkeit in einem Tropfen zusammenhält.

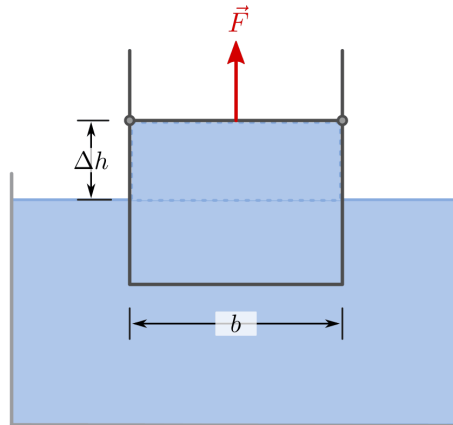


Abb. 71: Kohäsionskräfte und resultierende Oberflächenspannung einer Flüssigkeit.

Durch die an der Oberfläche nach innen gerichteten Kohäsionskräfte ist die Oberfläche einer freien Flüssigkeit stets minimal. Einzelne Flüssigkeitstropfen besitzen eine Kugelform, da bei einem bestimmten Volumen die Kugel derjenige geometrische Körper mit der geringsten Oberfläche ist.

Möchte man ein Molekül von der Oberfläche einer Flüssigkeit „anheben“ oder herauslösen, so muss Arbeit gegen die Kohäsionskräfte verrichtet werden. Das Verhältnis aus der nötigen Arbeit W und der dadurch resultierenden Vergrößerung ΔA der Oberfläche wird spezifische Oberflächenenergie oder kurz Oberflächenspannung σ genannt:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} \quad (76)$$

Die Einheit der Oberflächenspannung ist $\frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$; die Oberflächenspannung ist also eigentlich eine Energiemenge je Fläche.

⁷ Kohäsionskräfte sind im Wesentlichen in Festkörpern und Flüssigkeiten von Bedeutung. In Gasen lassen sich Kohäsionskräfte nur bei sehr hohem Druck oder sehr tiefen Temperaturen beobachten, da die Abstände der Moleküle ansonsten zu groß und ihre Geschwindigkeiten zu hoch sind.

Tab. 10: Oberflächenspannungen verschiedener Substanzen bei 20 °C

Substanz	Oberflächenspannung σ in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$
Aceton	0,023
Ethanol	0,023
Glycerin	0,063
Quecksilber	0,47
Seifenlösung	0,03
Wasser	0,072

Die Oberflächenspannung eines Materials ist allgemein temperaturabhängig; am Gefrierpunkt ist sie am größten, mit zunehmender (absoluter) Temperatur wird sie geringer. Gelöste Stoffe oder Verunreinigungen können ebenfalls eine starke Verringerung der Oberflächenspannung bewirken, beispielsweise hat eine Seifenlösung eine deutlich geringere Oberflächenspannung als reines Wasser.

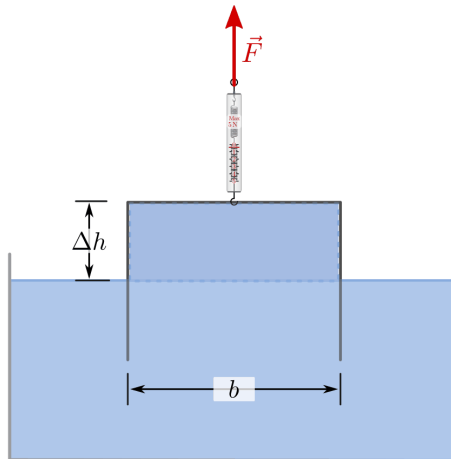


Abb. 72: Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung durch Herausziehen einer „Wasserhaut“ mittels eines Drahtbügels.

Um die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit experimentell zu bestimmen, kann man beispielsweise – ähnlich wie beim Seifenblasen-Machen – mittels eines Drahtbügels eine dünne Schicht aus der Flüssigkeitsoberfläche „herausziehen“. Hat der Drahtbügel die Breite b und wird dieser um eine Höhe Δh angehoben, so gilt für die verrichtete mechanische Arbeit:

$$\Delta W = F_\sigma \cdot \Delta h$$

Mit F_σ wird dabei die zum Herausziehen des Drahtes notwendige Kraft bezeichnet. Für die Vergrößerung der Flüssigkeits-Oberfläche A gilt:

$$\Delta A = 2 \cdot b \cdot \Delta h$$

Der Faktor 2 ergibt sich daraus, dass sowohl auf der Vorder- wie auch auf der Hinterseite des Bügels eine zusätzliche Oberfläche mit einer Größe von $b \cdot \Delta h$ hinzukommt. Für die Oberflächenspannung σ ergibt sich damit:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F_\sigma \cdot \Delta h}{2 \cdot b \cdot \Delta h} = \frac{F_\sigma}{2 \cdot b}$$

Anders als bei einer Schraubenfeder ist die zum Herausziehen des Drahtes benötigte Zugkraft F_σ , wie man an der oberen Formel erkennen kann, unabhängig von dem Betrag der „Dehnung“ Δh :

$$F_\sigma = 2 \cdot \sigma \cdot b$$

Ein wichtiger Sonderfall dieser Gleichung ergibt sich, wenn der Draht zu einem Ring gebogen wird. Die Bogenlänge b entspricht dann einem ganzen Kreisumfang, also $2 \cdot \pi \cdot r$. Damit ergibt sich in diesem Fall:

$$F_\sigma = 2 \cdot \sigma \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) \tag{77}$$

Anhand dieser Formel kann einerseits der „Binnendruck“ in Seifenblasen oder Flüssigkeitstropfen erklärt werden, andererseits lässt sich daraus ebenso eine Formel zur Bestimmung von Tropfengrößen herleiten.

Binnendruck

Betrachtet man eine Seifenblase im Querschnitt, so erkennt man, dass diese aus einer kreisförmigen und sehr dünnen Flüssigkeitsschicht besteht. Sowohl nach außen wie auch nach innen hin wird die Flüssigkeit durch eine Oberfläche begrenzt. Im Querschnitt kann der Umfang dieser beiden kreisförmigen Oberflächen jeweils mit $2 \cdot \pi \cdot r$ angegeben werden, da die Dicke der Seifenblasen-Haut gegenüber dem Radius r der Seifenblase selbst vernachlässigbar gering ist.

Die Oberflächenspannung wirkt kontraktiv, sie versucht also die Größe der Oberfläche zu minimieren; ohne eine weitere Kraft würde die Seifenblase kollabieren. Tatsächlich ist allerdings Luft in der Seifenblase enthalten, deren Druck p_i sich bei einer Kompression erhöht. Da dieser Druck nach außen hin auf die Oberfläche der Seifenblase einwirkt, stellt sich ein Gleichgewicht zwischen der durch den Druck auf die Oberfläche ausgeübten Kraft $F_p = p_i \cdot A$ und der durch die Oberflächenspannung hervorgerufenen kontraktiven Kraft F_σ ein:

$$\begin{aligned} p_i \cdot A &= 2 \cdot \sigma \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) \\ p_i &= \frac{2 \cdot \sigma \cdot (2 \cdot \pi \cdot r)}{A} \\ &= \frac{4 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot r}{\pi \cdot r^2} \\ &= \frac{4 \cdot \sigma}{r} \end{aligned}$$

Der Druck p_i wird als „Binnendruck“ der Seifenblase bezeichnet; er gibt an, um wie viel größer der Druck der eingeschlossenen Luft gegenüber der Umgebungsluft ist. Der Binnendruck nimmt, wie sich aus der obigen Formel erkennen lässt, mit zunehmendem Radius ab. In großen Seifenblasen herrscht folglich ein kleinerer Binnendruck als in kleinen; treffen zwei Seifenblasen so aufeinander, dass ein Druckausgleich zwischen den eingeschlossenen Gasen möglich ist, so strömt die eingeschlossene Luft von der kleineren zur größeren Blase.

Für Flüssigkeitstropfen oder Luftblasen in einer Flüssigkeit gilt das gleiche Prinzip; da diese jedoch nur *eine* Oberfläche haben, ist der Binnendruck eines Tropfens nur halb so groß.

Beispiel:

- Wie groß ist der Binnendruck p_i in einem Wassertropfen mit einem Radius von 1 mm?

Für den Binnendruck im Wassertropfen gilt mit $\sigma_{\text{Wasser}} \approx 0,072 \text{ N/m}$:

$$p_i = \frac{2 \cdot \sigma}{r} = \frac{2 \cdot 0,072 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0,001 \text{ m}} = 144 \text{ Pa}$$

Der Binnendruck im Tropfen beträgt somit etwa $144 \text{ Pa} = 1,44 \text{ mbar}$.

Arzneitropfen-Formel

Bei Tropf-Pipetten wird ebenfalls die durch die Oberflächenspannung bedingte Haltekraft ausgenutzt. Der untere, runde Glasrand der Pipette übernimmt dabei die Rolle des runden „Bügels“, mit dessen Hilfe die Oberfläche eines runden Tropfens vergrößert werden soll – allerdings wird hierbei nicht der Bügel gegen den Tropfen bewegt, sondern der am Pipettenrand hängende Tropfen bewegt sich aufgrund seiner während des Ausfließ-Vorgangs zunehmenden Gewichtskraft nach unten.

Im Grenzfall ist die durch die Oberflächenspannung bedingte Haltekraft F_σ exakt gleich groß wie die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ des Tropfens. Als Formel für die Haltekraft kann auf Gleichung (77) zurückgegriffen werden; da der Tropfen allerdings nur eine Oberfläche hat, entfällt der Faktor 2. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} m_{\text{Tropfen}} \cdot g &= \sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \\ \Rightarrow m_{\text{Tropfen}} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot r}{g} \end{aligned}$$

Die Tropfenmasse ist somit nur durch die Oberflächenspannung σ sowie den Radius r der Tropf-Pipette festgelegt. Da die Oberflächenspannung temperaturabhängig ist, muss allerdings mit geringfügigen Abweichungen vom Sollwert gerechnet werden.

Adhäsionskräfte und Benetzbarkeit

Kräfte, die zwischen den Molekülen einer flüssigen und einer festen oder zweier flüssiger beziehungsweise fester Substanzen wirken, bezeichnet man als Adhäsionskräfte. In

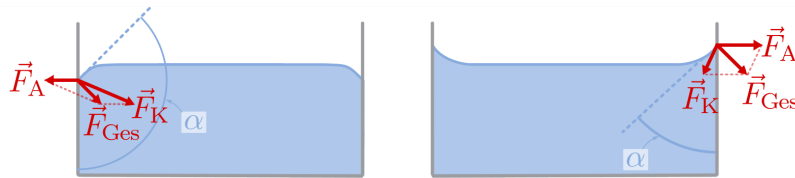


Abb. 73: Kohäsionskraft F_K und Adhäsionskraft F_A bei einer schlecht und einer gut benetzenden Flüssigkeit.

Flüssigkeiten sind Adhäsionskräfte insbesondere an den Rändern des jeweiligen Gefäßes wirksam.

Je nachdem, ob die Kohäsions- oder die Adhäsionskräfte überwiegen, stellt sich zwischen der Gefäßwand und der Oberfläche der Flüssigkeit ein so genannter „Randwinkel“ ein:

- Ist der Randwinkel α größer als 90° , so überwiegen die Kohäsionskräfte; die Flüssigkeit ist schlecht benetzend.
- Ist der Randwinkel α kleiner als 90° , so überwiegen die Adhäsionskräfte, und man bezeichnet die Flüssigkeit als benetzend.
- Bei einer ideal benetzenden Flüssigkeit ist $\alpha = 0^\circ$.

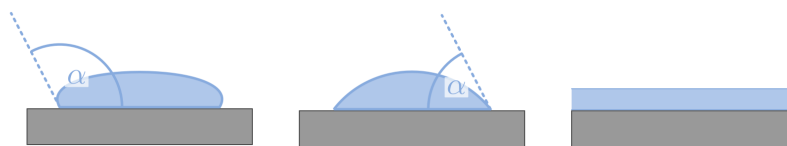


Abb. 74: „Tropfenform“ bei einer schlecht benetzenden, einer gut benetzenden und einer ideal benetzenden Flüssigkeit.

Kapillarität

Je enger ein Gefäß ist, desto deutlicher lassen sich Adhäsionskräfte beobachten. In sehr engen Röhren („Kapillaren“) kann der Effekt so stark sein, dass das Flüssigkeitsniveau je nach Benetzbarkeit höher oder niedriger sein kann als es bei miteinander verbundenen Gefäßen normalerweise der Fall wäre. Beispielsweise kann Wasser in einer Glasröhre mit einem Radius von 1,0 mm bis zu 15 mm nach oben gezogen werden, bei einem Radius von nur 0,5 mm sind sogar Steighöhen von bis zu 30 mm möglich.

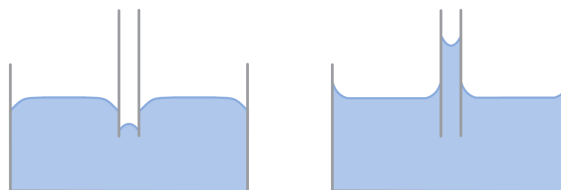


Abb. 75: Kapillardepresseion und Kapillaraszension bei nicht benetzenden beziehungsweise benetzenden Flüssigkeiten.

Bei dieser so genannten „Kapillarität“ herrscht nach der Benetzung der Randfläche durch die aufsteigende Flüssigkeit – ähnlich wie bei der Arznetropfen-Formel – ein Gleichgewicht zwischen der Haltekraft F_σ durch die Oberflächenspannung und der Gewichtskraft F_G der zusätzlichen, zylinderförmigen Flüssigkeitssäule:

$$F_\sigma = \sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$F_G = \rho_{\text{Fl}} \cdot V_{\text{Fl}} \cdot g = \rho_{\text{Fl}} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g$$

Setzt man die Terme für diese beiden Kräfte gleich, so erhält man für die kapillare Steighöhe h :

$$\sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \rho_{\text{Fl}} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g$$

$$\Rightarrow h = \frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot r}$$

Bei dieser Herleitung wurde eine ideale Benetzung der Kapillarwand vorausgesetzt. Eine realistischere Formel für die kapillare Steighöhe erhält man, wenn man im Zähler des Bruchs durch einen zusätzlichen Faktor $\cos(\alpha) \leq 1$ eine gegebenenfalls nicht ideale Benetzbarkeit berücksichtigt:

$$h = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos(\alpha)}{\rho \cdot g \cdot r} \quad (78)$$

Die maximale Steighöhe ergibt sich genau dann, wenn $\cos(\alpha) = 1$ beziehungsweise $\alpha = 0^\circ$ ist. Die Flüssigkeit ist in diesem Grenzfall ideal benetzend und wird somit quasi senkrecht an der Gefäßwand empor gezogen. Ist bei einer schlechten Benetzung der Randwinkel α hingegen größer als 90° , so ist $\cos(\alpha) < 0$; man erhält in diesem Fall folglich keine Kapillaraszension, sondern eine Kapillardepression.

Die kapillare Steighöhe ist neben der Oberflächenspannung und der Dichte als Materialkonstanten nur vom Radius der Gefäßröhre abhängig. Die obige Formel kann auch genutzt werden, um aus einer Messung der Steighöhe, des Röhrenradius und des Randwinkels die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit zu bestimmen.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Mechanik der Gase

In der Ärodynamik werden die mechanischen Eigenschaften von Gasen, insbesondere von Luft, untersucht.

Druck und Volumen

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Gasen und Flüssigkeiten besteht darin, dass Gase verhältnismäßig leicht komprimierbar sind; ihr Volumen V nimmt also ab, wenn von außen

ein erhöhter Druck p auf einen verformbaren Gasbehälter (beispielsweise einen Luftballon) ausgeübt wird. Lässt der Druck wieder nach, so nimmt entsprechend auch das Volumen des Gases wieder zu.

Bleibt die Temperatur des Gases während eines Kompressions- beziehungsweise Expansionsvorgangs konstant, so gilt:¹

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad (79)$$

Wichtig: Für p_1 und p_2 müssen bei Verwendung dieser Formel stets **absolute** Druckwerte eingesetzt werden; zu einem mittels eines Manometers gemessenen Druckwert muss also stets der Luftdruck (rund 1 bar) hinzu addiert werden.

Die Volumina eines Gases verhalten sich also indirekt proportional zu den jeweils vorherrschenden Druckwerten. Grafisch kann dieser Zusammenhang mittels eines $p(V)$ -Diagramms dargestellt werden:

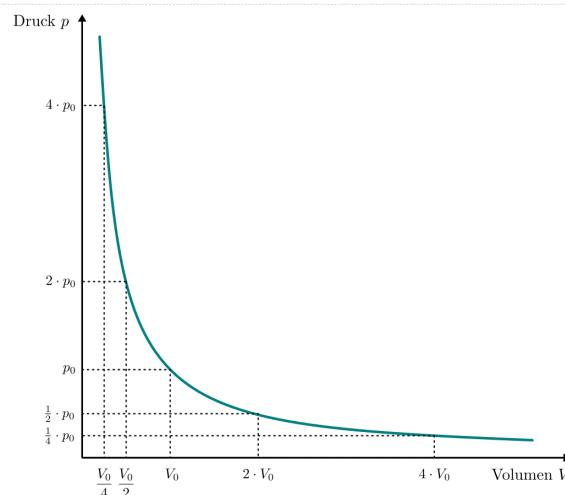


Abb. 76: Das Boyle-Mariottesche Gesetz: Indirekte Proportionalität zwischen Druck und Volumen.

Die Kurve im $p(V)$ -Diagramm entspricht wegen $p \propto \frac{1}{V}$ einer **Hyperbel**; man kann erkennen, dass das Volumen des Gases auch bei sehr hohem Druck nicht gleich Null werden kann, und umgekehrt durch eine zunehmende „Verdünnung“ der Luft ebenso immer ein Restdruck verbleibt. Mittels so genannten Vakuumpumpen, die im Gegensatz zu Kompressoren die Luft lediglich immer weiter verdünnen, kann somit kein echtes Vakuum erzeugt werden, sondern nur ein sich asymptotisch an $p = 0$ Pa annähernder Druckwert.

Luftdruck und Barometrische Höhenformel

Gase haben – im Verhältnis zu Flüssigkeiten – eine nur sehr geringe Masse. Während ein Liter Wasser ein Kilogramm schwer ist, wiegt ein Liter Luft unter Normalbedingungen

¹ Die Gleichung (79) wird nach ihren Entdeckern **Robert Boyle** und **Edme Mariotte** „Gesetz von Boyle-Mariotte“ genannt und ist ein Sonderform der *Zustandsgleichung für ideale Gase*.

gerade einmal knapp 1,3 Gramm. Dennoch bewirkt auf unserem Planeten das Gewicht der Luft, ähnlich wie beim *Schweredruck in Flüssigkeiten*, einen so genannten Luftdruck, der umso größer ist, je weiter unten man sich in dem die Erde umgebenden „Luftmeer“ befindet.

Der „normale“ Luftdruck $p_0 \approx 1,0$ bar in Bodennähe resultiert aus dem Gewicht der darüber liegenden Luftsichten. Da für $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ gilt, entspricht der durch die Luft ausgeübte Druck in Bodennähe rund einem Gewicht von 10 t je Quadratmeter beziehungsweise 1 kg je Quadrat-Zentimeter.²

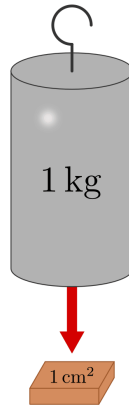


Abb. 77: Veranschaulichung der Größe des „normalen“ Luftdrucks (1 bar).

Bei Standardbedingungen, das heißt einem Luftdruck von $p_0 = 1,01325$ bar und einer Temperatur von $T_0 = 0^\circ\text{C}$ nimmt ein Mol eines beliebigen Gases ein Volumen von $V_0 = 22,41$ ein („Normalvolumen“). Da die Masse eines Gases in einem geschlossenen System gleich bleibt, bewirkt eine Veränderung des Gasvolumens V neben einer Veränderung des Drucks auch eine Veränderung der Gasdichte ρ . Es gilt:³

² Nach der *Zustandsgleichung für ideale Gase* gilt $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, wobei n die (konstante) Stoffmenge in Mol und $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ die allgemeine Gaskonstante ist. Die Stoffmenge n ist über die Beziehung $n = \frac{m}{m_{\text{Mol}}}$ mit der Masse m des Gases verknüpft, wobei m_{Mol} die stoffspezifische molare Masse des Gases angibt. Es gilt also:

$$p \cdot V = \frac{m}{m_{\text{Mol}}} \cdot R \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{m}{V} \cdot \frac{R \cdot T}{m_{\text{Mol}}}$$

Der Term $\frac{m}{V}$ auf der rechten Gleichungsseite gibt die Dichte des Gases an. Da R und m_{Mol} konstante Werte sind, gilt bei konstanter Temperatur $\frac{p}{\rho} = \text{konstant}$, also $\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2}$.

³ Bei der Herleitung der barometrischen Höhenformel wird vom *Schweredruck in Flüssigkeiten* ausgegangen; für den Druckunterschied Δp bei einem Höhenunterschied Δh gilt:

$$\Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta h$$

Hierbei steht ρ für die Dichte und g für den Ortsfaktor. Das Minuszeichen ergibt sich daraus, dass der Druck mit zunehmender Höhe geringer wird (da bei Flüssigkeiten h für die Eintauchtiefe steht, wird der Druck in diesem Fall größer, wenn h größer wird.)

Bei konstanter Temperatur hängt bei Gasen die Dichte ρ und der Druck p in der Höhe h über $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$ mit der Dichte ρ_0 und dem Druck p_0 in der Ausgangshöhe $h = 0$ m zusammen. Umgeformt gilt also:

$$\rho = \frac{p}{p_0} \cdot \rho_0$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (80)$$

Bei einem niedrigem Gasdruck nimmt das Volumen eines Gases zu, seine Dichte hingegen ab; in höheren Luftschichten ist daher die Luft „dünnere“. Für den Luftdruck p gilt in Abhängigkeit von der Höhe h die so genannte „barometrische Höhenformel“:⁴

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{h_s}} \quad (81)$$

Hierbei ist p_0 der Luftdruck auf Meereshöhe und h_s eine so genannte „Skalenhöhe“, die angibt, ab wie vielen Metern der Druck auf $1/e \approx 36,8\%$ des ursprünglichen Werts p_0 abfällt. Auf der Erde ist $h_s \approx 8,0$ km. Die Höhe, bei welcher der Luftdruck bzw. die Luftdichte nur noch halb so groß ist, liegt damit etwa bei 5,5 km.

Technisch wird der Zusammenhang zwischen Druck und Dichte beispielsweise in Vakuumpumpen genutzt, mit deren Hilfe das zu evakuierende Luftvolumen schrittweise verdünnt

Setzt man diesen Ausdruck für ρ in die vorherige Gleichung ein, erhält man folgenden Ausdruck:

$$\Delta p = -\frac{p}{p_0} \cdot \rho_0 \cdot g \cdot \Delta h$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch p , so folgt:

$$\frac{\Delta p}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot \Delta h$$

Wertet man die relative Druckänderung für eine jeweils nur kleine Höhenänderung aus, so kann man alle Änderungen von 0 bis h aufsummieren; dies entspricht im mathematischen Sinn einem **Integral**:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \int_0^h -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$$

Auf der linken Seite wurden die Integralgrenzen gemäß einer **Integration durch Substitution** umgerechnet. Auf der rechten Seite ist der Term $-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g$ nicht von der Höhe h abhängig und kann somit als konstanter Faktor vor das Integral gezogen werden:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot \int_0^h dh$$

Das Integral auf der linken Seite kann ebenfalls unmittelbar berechnet werden, wenn man $p(h)$ als Funktion der Höhe auffasst. Auf der linken Gleichungsseite steht damit eine zusammengesetzte Funktion, deren Zähler der Ableitung des Nenners entspricht. Mit der entsprechenden **Integrationsmethode** folgt:

$$\ln(p) - \ln(p_0) = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h$$

Mit Hilfe der **Rechenregeln für Logarithmen** kann der Term auf der linken Seite als $\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$ geschrieben werden. Um die resultierende **Logarithmus-Gleichung** aufzulösen, kann man auf beiden Seiten der Gleichung e mit den jeweiligen Termen potenzieren. Wegen $e^{\ln(x)} = x$ folgt schließlich:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

⁴ Dieser Druck ist erheblich, wird aber von uns Menschen kaum wahrgenommen, da wir einen gleich großen Druck auch in unseren Lungen haben und daher nicht zusammengedrückt werden.

wird; im umgekehrten Fall kann mittels Kompressoren oder Luftpumpen das Luftvolumen kontinuierlich verkleinert werden. Das Luftvolumen kann jedoch nicht unendlich vergrößert oder verkleinert werden. Die Grenzen für elektrische Vakuumpumpen liegen daher bei etwa 10^{-2} mbar; mit mehrstufigen Hochvakuum-Pumpen können Drücke von rund 10^{-3} mbar) erreicht werden, mit Ultrahochvakuum-Pumpen sind sogar Drücke von 10^{-7} mbar möglich.⁵ Im umgekehrten Anwendungsfall kann man mit Luftpumpen bis zu 5 bar, mit Kompressoren oder guten Stand-Luftpumpen bis zu 12 bar erreichen.

Auftrieb in Gasen

Für die (statische) Auftriebskraft F_A in Gasen gilt die gleiche Formel wie für die *Auftriebskraft in Flüssigkeiten*:

$$F_A = \rho_G \cdot g \cdot V_K \quad (82)$$

Hierbei bezeichnet V_K das Volumen des Körpers, $g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ die Erdbeschleunigung und ρ_G die Dichte des Gases. Da die Dichte von Luft $\rho_{\text{Luft}} \approx 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ unter Normalbedingungen rund 1000-mal kleiner ist als die Dichte von Wasser ($\rho_{\text{Wasser}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$), können in Luft nur Körper mit einer sehr geringen (durchschnittlichen) Dichte aufsteigen. Die Steighöhe beispielsweise von Ballonen wird zudem dadurch begrenzt, dass die Dichte der Luft mit zunehmender Höhe abnimmt.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Schwingungen und Wellen

In der Natur und in technischen Anwendungen treten häufig zeitlich periodische Vorgänge auf.

Mechanische Schwingungen

Eine Schwingung entspricht allgemein einer zeitlich periodischen Änderung einer physikalischen Größe. Mechanische Schwingungen im Speziellen beschreiben Vorgänge, bei denen sich ein Körper regelmäßig um eine Gleichgewichtslage („Ruhelage“) bewegt.

Bei jedem Durchlauf ändern sich dabei der Abstand von der Gleichgewichtslage beziehungsweise der Auslenkwinkel φ , die Beschleunigung a , die Geschwindigkeit v und die damit verbundene Lage- und Bewegungsenergie E_{pot} und E_{kin} in regelmäßiger Weise.

⁵ Mit einfachen Wasserstrahlpumpen lässt sich ein Druck von rund 10 hPa erreichen. Für viele prinzipielle Versuche, beispielsweise Magdeburger Halbkugeln oder Fallröhren reicht dieser Druck bereits aus.

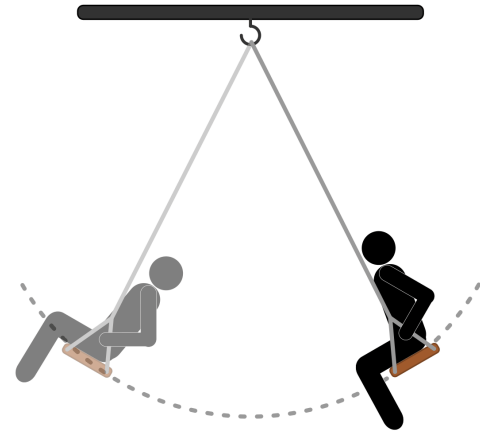


Abb. 78: Das Schaukeln als mechanische Schwingung.

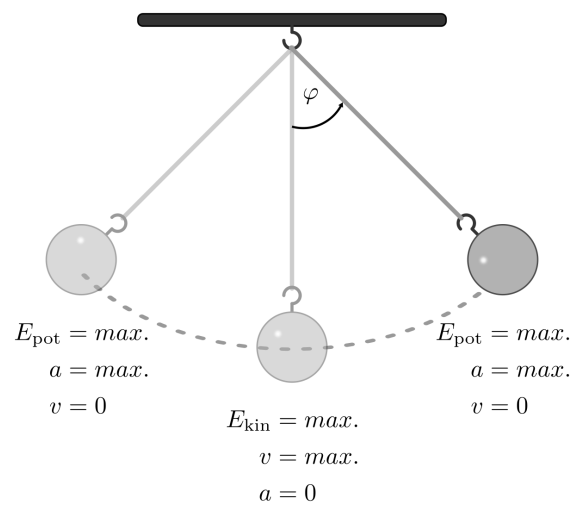


Abb. 79: Periodische Veränderung physikalischer Größen beim Pendel.

Schwingungen treten auf, wenn ein schwingungsfähiger Körper (auch „Schwinger“ oder „Oszillator“ genannt) durch Energiezufuhr aus der Gleichgewichtslage („Ruhelage“) ausgelenkt wird. Zusätzlich ist stets eine zur Ruhelage rücktreibende Kraft vorhanden, die den schwingenden Körper daran hindert die Bahn zu verlassen.

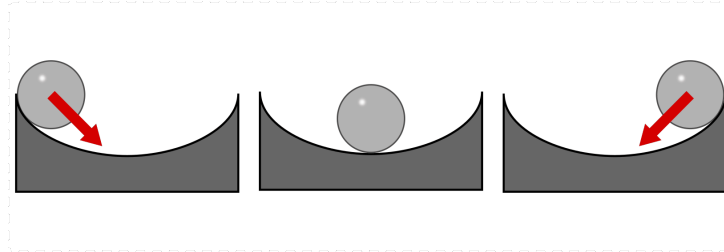


Abb. 80: Eine Kugel in einer „Half-Pipe“ erfährt bei Auslenkung eine zur Gleichgewichtslage rückwirkende Kraft.

Ohne wirkende Reibungskräfte wiederholt sich der Schwingungsvorgang (theoretisch) unendlich oft.

Amplitude, Schwingungsdauer und Frequenz

Der zeitliche Verlauf der Auslenkung eines schwingenden Körpers kann mittels eines Weg-Zeit-Diagramms dargestellt werden. Dabei ergibt sich ein für den jeweiligen Schwinger charakteristischer, periodischer Kurvenverlauf.

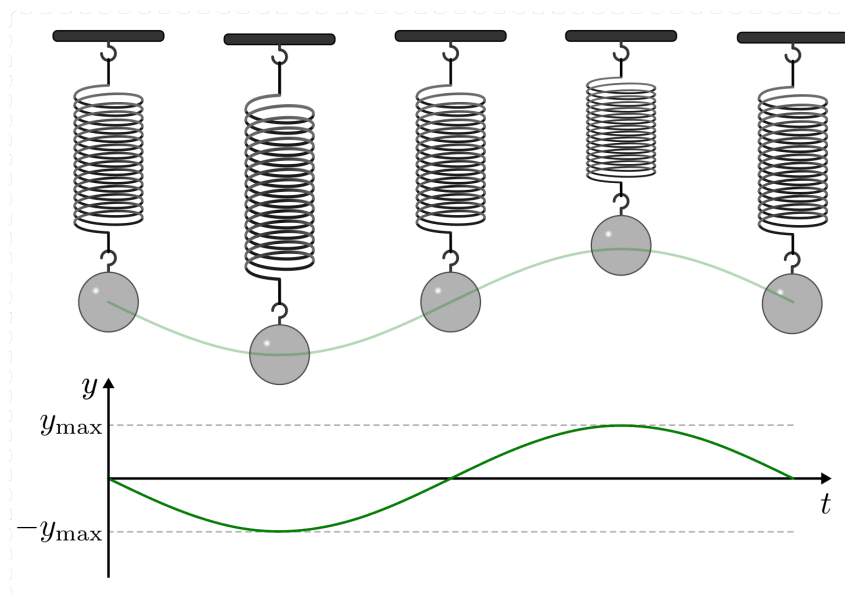


Abb. 81: Vertikale Schwingung eines an einer Schraubenfeder aufgehängten Gewichts.

Hat die Weg-Zeit-Funktion einer Schwingung die Form einer **Sinus-Funktion**, so bezeichnet man die Schwingung als harmonisch; andernfalls nennt man sie anharmonisch.

Jede Schwingung kann durch folgende Größen beschrieben werden:

- Die Auslenkung y (auch „Elongation“ genannt) gibt den momentanen Abstand des schwingenden Körpers von der Gleichgewichtslage an. Die maximale Auslenkung y_{\max} wird als Amplitude bezeichnet.
- Die Schwingungsdauer T gibt an, wie viel Zeit der schwingende Körper für eine vollständige Hin- und Herbewegung („Periode“) benötigt.

Anstelle der Schwingungsdauer wird häufig auch mit der Frequenz f einer Schwingung gerechnet. Sie gibt die Anzahl an Schwingungen n an, die ein Körper in einer bestimmten Zeit t ausführt. Für einen einzigen Schwingungsvorgang ($n = 1$) benötigt ein schwingender Körper genau die Zeitdauer $t = T$. Somit gilt:

$$f = \frac{n}{t} = \frac{1}{T} \quad (83)$$

Frequenzen werden in der nach [Heinrich Hertz](#) benannten Einheit „Hertz“ (Hz) angegeben. Eine Frequenz von $1 \text{ Hz} = \frac{1}{\text{s}}$ bedeutet, dass in einer Sekunde genau ein Schwingungsvorgang stattfindet.

Gedämpfte Schwingungen

Mechanische Schwingungen setzen sich, falls keine Reibungskräfte wirken, ungedämpft fort; ihre Amplitude bleibt also zeitlich konstant. Reale Schwingungen hingegen kommen, sofern ihnen nicht regelmäßig Energie zugeführt wird, nach einer gewissen Zeit zum Erliegen. Einen Vorgang, bei denen die Amplitude stetig abnimmt, bezeichnet man als gedämpfte Schwingung.

Ist die Dämpfung abhängig von der Geschwindigkeit, was beispielsweise bei Luftreibung der Fall ist, so nimmt die anfängliche Amplitude y_0 exponentiell mit der Zeit ab. Für die Amplitude y zum Zeitpunkt t gilt dabei in Abhängigkeit vom Dämpfungsgrad δ :

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

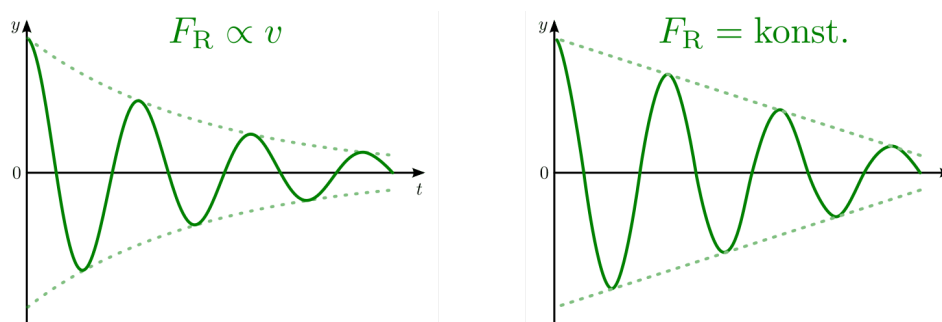


Abb. 82: Zeitlicher Verlauf einer Schwingung mit geschwindigkeitsabhängiger beziehungsweise konstanter Dämpfung.

Ebenfalls möglich ist eine konstante dämpfende Kraft, beispielsweise infolge von (Gleit-)Reibung. In diesem Fall ist die Differenz zweier benachbarter Amplituden konstant, die Amplitude der Schwingung nimmt somit linear ab.

Jede Dämpfung bewirkt bei Schwingungen eine Verkleinerung der Frequenz beziehungsweise eine Vergrößerung der Schwingungsdauer.

Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Wird ein schwingendes System einmalig angeregt und dann sich selbst überlassen, so führt es Schwingungen mit seiner Eigenfrequenz f_0 aus. Wird die Energie jedoch über einen längeren Zeitraum hinweg periodisch zugeführt, so führt das schwingende System – nach einer kurzen Übergangszeit – so genannte „erzwungene“ Schwingungen mit der Frequenz f_a des anregenden Systems aus.

Die Amplitude der angeregten Schwingungen ist von der Erregerfrequenz f_E abhängig. Stimmt diese mit der Eigenfrequenz f_0 des angeregten Systems überein, so spricht man von Resonanz. Die Amplitude A des angeregten Systems wird in diesem Fall maximal.

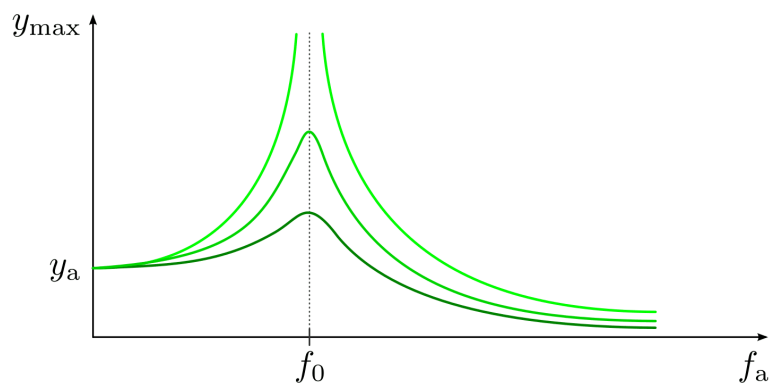


Abb. 83: Amplitude einer erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit von der anregenden Frequenz. Hellere Kurven kennzeichnen eine schwächere Dämpfung.

Trägt man die Amplitude A in Abhängigkeit der Erregerfrequenz auf, so erhält man eine so genannte „Resonanzkurve“. Das Resonanzmaximum ist umso ausgeprägter (schmäler und höher), je geringer der Dämpfungsgrad ist. Bei sehr schwachen Dämpfungen kann sich das angeregte System also zu sehr großen Amplituden „aufschaukeln“, was im technischen Bereich teilweise absichtlich genutzt, teilweise aber auch gezielt vermieden wird:

- Resonanzeffekte werden beispielsweise zur Entfernung von Nierensteinen genutzt; dabei werden diese mit hoch intensivem Ultraschall unterschiedlicher Frequenz behandelt. Die spröden Steine können dabei, wenn jeweils die richtige Frequenz getroffen wird, zu so großen Schwingungen angeregt werden, dass sie in kleinere, für den Körper nicht mehr gefährliche Teilstücke zerfallen.
- Resonanzeffekte werden möglichst immer vermieden, wenn damit mechanische Belastungen verbunden sind. Beispielsweise durchlaufen Wäscheschleudern am Anfang und am Ende eines Schleudergangs kontinuierlich eine Vielzahl an unterschiedlichen Frequenzen (*Drehzahlen*). Bei ungünstigen Frequenzwerten kommt es zu großen Schwingungsamplituden des an Schraubenfedern aufgehängten Schleuderbehälters. Durch Ausgleichsgewichte versucht man in diesem Fall die Unwucht und das damit verbundene hörbare „Klappern“ gering zu halten.

Bei Drehbewegungen wird die Resonanzfrequenz als kritische Drehzahl bezeichnet. Eine besondere Bedeutung haben Resonanzeffekt zudem in der Akustik, beispielsweise wenn mitschwingende Klangkörper eine Verstärkung eines bestimmten Tons bewirken sollen.

Mathematische Beschreibung harmonischer Schwingungen

Die mathematische Beschreibung eines harmonisch schwingenden Gegenstands („Oszillators“) wird häufig als Basis-Modell in der theoretischen Physik genutzt. In diesem Abschnitt wird daher das grundlegende mathematische Konzept kurz vorgestellt.

Schwingungsgleichungen

Ein Körper führt genau dann eine harmonische Schwingung aus, wenn auf ihn eine Kraft wirkt, die proportional zu seiner Auslenkung ist und stets in Richtung der Ruhelage zeigt; die Dämpfung der Schwingung sollte vernachlässigbar gering ist.

Das Federpendel

In guter Näherung werden diese Bedingungen von einem Pendelkörper, der an einer hängenden Schraubenfeder befestigt ist, erfüllt. Bei einer Auslenkung s aus der Ruhelage ist die rücktreibende Kraft gleich der Spannkraft F_S der Schraubenfeder. Diese hängt von der Federhärte D ab und ist der Auslenkung entgegengesetzt:

$$F = -D \cdot s$$

Die Kraft ruft im schwingenden Gegenstand eine Beschleunigung a hervor, die nach dem Kraftgesetz als $F = m \cdot a$ beschrieben werden kann, wobei m die Masse des Oszillators symbolisiert. Die Beschleunigung a entspricht nun gerade der zeitlichen Änderung der Geschwindigkeit, welche wiederum einer zeitlichen Änderung des Ortes beziehungsweise der Auslenkung entspricht.

Aus mathematischer Sicht sind die zur Auslenkung s proportionale Kraft und ihre zur Beschleunigung $a = \dot{v} = \ddot{s}$ proportionale Wirkung über eine zweifache zeitliche Ableitung miteinander gekoppelt. Es gilt somit:

$$m \cdot \ddot{s} = -D \cdot s$$

Diese Gleichung kann so umsortiert werden, dass beide von der Auslenkung s abhängigen Größen auf der linken Seite stehen:

$$m \cdot \ddot{s} + D \cdot s = 0$$

Noch deutlicher wird der Charakter dieser „Differentialgleichung“, wenn man die Gleichung durch die Masse ($m \neq 0$) teilt:

$$\ddot{s} + \frac{D}{m} \cdot s = 0 \tag{84}$$

Diese Gleichung wird von jeder zeitabhängigen Funktion $s(t)$ erfüllt, deren zweite zeitliche Ableitung der ursprünglichen Funktion bis auf einen konstanten Faktor identisch ist. Eine bekannte Funktion, die diese Bedingung erfüllt, ist die **Sinus-Funktion**. Ein Ansatz für den zeitlichen Verlauf der Auslenkung s kann somit folgendermaßen lauten:

$$s = \sin(\omega \cdot t) \quad (85)$$

Dabei gibt ω die so genannte „Oszillator-Frequenz“ an. Sie erinnert an die *Winkelgeschwindigkeit* einer kreisförmigen Bewegung, denn multipliziert mit der Zeit t beschreibt sie den Ort, an dem sich der periodisch schwingende Körper gerade befindet.¹

Bildet man für den Ansatz (85) s die erste und zweite zeitliche Ableitung der Sinus-Funktion, so erhält man unter Berücksichtigung der **Kettenregel**:

$$\dot{s} = \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\ddot{s} = -\omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die zweite zeitliche Ableitung \ddot{s} ist somit mit der ursprünglichen Sinus-Funktion (85), welche die Auslenkung s beschreibt, bis auf einen Faktor $-\omega^2$ identisch:

$$\ddot{s} = -\omega^2 \cdot s$$

Dieses Ergebnis kann direkt in Gleichung (84) eingesetzt werden. Es folgt:

$$-\omega^2 \cdot s + \frac{D}{m} \cdot s = 0 \quad (86)$$

Auf der linken Seite kann s ausgeklammert werden. Es ergibt sich:

$$\left(-\omega^2 + \frac{D}{m}\right) \cdot s = 0$$

Diese Gleichung ist einerseits erfüllt, wenn $s = 0$ gilt, der Körper sich also in der Ruhelage befindet. Andererseits gilt das Gleichheitszeichen für jede beliebige Auslenkung, wenn der eingeklammerte Ausdruck als ganzes gleich Null ist. Somit gilt:

$$-\omega^2 + \frac{D}{m} = 0$$

und damit:

¹ Bisweilen wird die Oszillator-Frequenz deshalb auch „Kreisfrequenz“ genannt. Sie gibt an, welche Winkelgeschwindigkeit ein Punkt einer rotierenden Kreisscheibe haben müsste, damit seine Frequenz mit derjenigen des schwingenden Pendelkörpers übereinstimmt.

Da die Schwingungsfrequenz f des Pendels die Anzahl an Schwingungsvorgängen je Sekunde angibt, und für eine ganze Umdrehung der Kreisscheibe ein Winkel von $2 \cdot \pi$ nötig ist, muss die Kreisfrequenz ω (gemessen in Rad je Sekunde) um genau diesen Faktor größer sein als die Frequenz f :

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (87)$$

Die Oszillator-Frequenz des schwingenden Pendelkörpers ist somit umso größer, desto größer die Federkonstante („Härte“) D der Schraubenfeder ist. Andererseits schwingt der Oszillator umso schneller, desto geringer seine Masse m ist.

Die Weg-Zeit-Funktion $s = \sin(\omega \cdot t)$ kann auch graphisch als Diagramm dargestellt werden. Es ergibt sich der für harmonische Schwingungen typische sinusförmige Verlauf. Je schneller der Pendelkörper schwingt, desto schmaler werden die „Berge und Täler“ der Sinus-Kurve; je größer die maximale Auslenkung ist, desto höher bzw. tiefer liegen die Hoch- und Tiefpunkte.

Die Sinus-Funktion eignet sich als Ansatz, wenn der Pendelkörper zu Beginn in der Ruhelage ist und in dieser Position von außen „angestoßen“ wird. Ist der maximal ausgelenkt und wird von dieser Position aus losgelassen, so ist die Kosinus-Funktion als Ansatz besser geeignet.

Die oben hergeleiteten Ergebnisse lassen sich beispielsweise auch auf die Schwingungen eines gefederten Fahrzeugs oder einer gefedert gelagerten Maschine (z.B. Waschmaschine) übertragen.

Das Fadenpendel

Auch Schwingungen eines Fadenpendels haben – bei nicht zu großer Auslenkung des Pendelkörpers – annähernd einen sinusförmigen Verlauf. Ist die Masse des Fadens vernachlässigbar klein und die Größe des Pendelkörpers klein im Vergleich zur Fadenlänge, so spricht man von einem mathematischen Pendel.

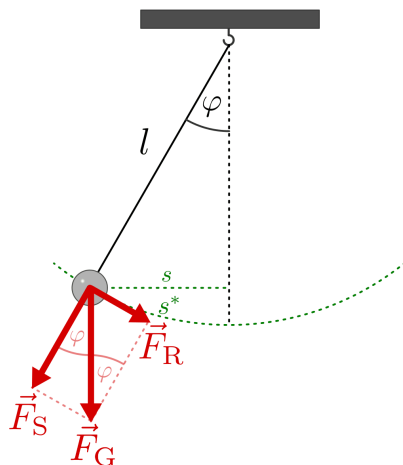


Abb. 84: Schematischer Aufbau eines Fadenpendels.

Die rücktreibend wirkende Kraft einer Pendelschwingung lässt sich bestimmen, indem man die Gewichtskraft F_G des Pendelkörpers in zwei *Teilkraft*e (längs und quer zur Schwingungsrichtung) zerlegt: Die Teilkraft F_S in Seilrichtung hält den Faden gespannt, die

Teilkraft F_R in Schwingungsrichtung entspricht der rücktreibenden Kraft. Ist der Auslenkungswinkel φ klein, so ist die Länge s^* des Kreisbogens näherungsweise gleich dem waagrechten Abstand s des Pendelkörpers von der Ruhelage.²

Für die rücktreibende Kraft F_R gilt mit $\sin(\varphi) = \frac{s}{l}$:

$$F_R = F_G \cdot \sin(\varphi) = m \cdot g \cdot \frac{s}{l} = \frac{m \cdot g}{l} \cdot s$$

Der Term $\frac{m \cdot g}{l}$ hat somit die gleiche Bedeutung für das Fadenpendel wie die Federhärte D für das Federpendel. Man bezeichnet ihn daher auch als „Richtgröße“ D eines mathematischen Pendels. Man kann also wiederum schreiben:

$$\begin{aligned} F &= m \cdot \ddot{s} = \frac{m \cdot g}{l} \cdot s \\ \Rightarrow \ddot{s} &= \frac{g}{l} \cdot s \end{aligned}$$

Für die Oszillatorfrequenz eines mathematischen Pendels gilt somit nach den Gleichungen (86) und (87):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (88)$$

Experimentell bestätigt sich, dass die Schwingungsfrequenz eines Fadenpendels zwar von der Länge l des Pendels, aber nicht von der Masse des Pendelkörpers abhängig ist. Bei kleinen Auslenkungen ($\varphi < 10^\circ$) ist die Frequenz bzw. Schwingungsdauer zudem unabhängig von der Amplitude.

Pendel, bei denen die obigen Bedingungen erfüllt sind, nennt man Fadenpendel oder auch mathematische Pendel. Im Gegensatz dazu bezeichnet man beliebige, drehbar aufgehängte Gegenstände als physikalische Pendel.

Das physikalische Pendel

Führt ein beliebiges, drehbar gelagertes Objekt Schwingungsbewegungen aus, so können diese bei nur kleinen Auslenkungen und bei Vernachlässigung des Luftwiderstands ebenfalls als harmonische Schwingungen beschrieben werden.

Die rücktreibende Größe ist in diesem Fall das Drehmoment $\vec{M} = \vec{s} \times \vec{F}_G$ des Körperschwerpunkts bezüglich der Drehachse; dabei bezeichnet s den horizontalen Abstand des Schwerpunkts von der Ruhelage. Bei einem kleinen Auslenkungswinkel φ kann für den Betrag des Drehmoments folgendes geschrieben werden:

$$M = -s \cdot F_G = -s \cdot m \cdot g \approx -(l \cdot \varphi) \cdot m \cdot g = -l \cdot m \cdot g \cdot \varphi$$

² Für den Auslenkungswinkel sollte $\varphi < 10^\circ$ gelten; dann beträgt der relative Fehler $\frac{s}{s^*}$ zwischen dem waagrechten Abstand $s = l \cdot \sin(\varphi)$ und der Länge des entsprechenden Kreisbogens $s^* = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot l$ weniger als 0,5%.

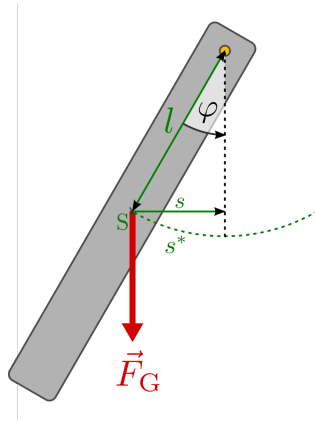


Abb. 85: Schematischer Aufbau eines Physikalischen Pendels.

Hierbei wurde die Näherung $s = l \cdot \sin(\varphi) \approx l \cdot \varphi$ verwendet; das negative Vorzeichen berücksichtigt die Auslenkung in negative x -Richtung. Für das Drehmoment M gilt allerdings ebenso folgender Zusammenhang:

$$M = J \cdot \alpha = J \cdot \ddot{\varphi}$$

Hierbei steht J für das *Trägheitsmoment* des schwingenden Gegenstands bezüglich dem Aufhängepunkt und $\alpha = \ddot{\varphi}$ für die *Winkelbeschleunigung*. Setzt man beide Terme gleich, erhält man folgende Differentialgleichung:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -(m \cdot g \cdot l) \cdot \varphi$$

Wählt man als Lösung der Differentialgleichung wiederum $\varphi = \sin(\omega \cdot t)$, so gilt wegen $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot \varphi$:

$$-J \cdot \omega^2 \cdot \varphi = -(m \cdot g \cdot l) \cdot \varphi$$

Für $\varphi \neq 0$ ergibt sich damit für die Oszillator-Frequenz ω eines physikalischen Pendels:

$$J \cdot \omega^2 = m \cdot g \cdot l \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l}{J}} \quad (89)$$

Die Oszillator-Frequenz ω eines physikalischen Pendels hängt somit von der Masse des schwingenden Objekts, der Lage seines Schwerpunkts sowie von seinem Trägheitsmoment bezüglich dem Aufhängepunkt ab. Bei dieser Frequenz sind ebenfalls *Resonanz*-Effekte am stärksten ausgeprägt.

In den obigen Gleichungen wurde mit J jeweils das Trägheitsmoment des physikalischen Pendels um seinen Aufhängepunkt bezeichnet. Nach dem *Satz von Steiner* gilt für dieses $J = J_S + m \cdot a^2$, wobei J_S für das Trägheitsmoment des Gegenstands bei einer Rotation um seinen Schwerpunkt und a für den Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse steht. Mit $a = l$ ergibt sich damit folgende Gleichung für das Trägheitsmoment J_S des schwingenden Gegenstands:

$$J_S + m \cdot l^2 = \frac{m \cdot g \cdot l}{\omega^2}$$

Diese Gleichung kann noch mit Hilfe der Beziehung $\omega = \frac{2\pi}{T}$ zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der Schwingungsdauer T umformuliert werden. Es ergibt sich damit folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} J_S &= \frac{m \cdot g \cdot l}{\omega^2} - m \cdot l^2 \\ &= m \cdot \left(\frac{g \cdot l}{\frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}} - l^2 \right) \\ &= m \cdot l^2 \cdot \left(\frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot l} - 1 \right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann beispielsweise zur *experimentellen Bestimmung des Trägheitsmoments* eines Gegenstands genutzt werden kann, da alle darin vorkommenden Größen konstant oder leicht messbar sind.

Energiebilanz beim Feder- und Fadenpendel

Die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v des Pendelkörpers bei einer harmonischen Schwingung und der Winkelgeschwindigkeit („Kreisfrequenz“) ω einer ebenso „schnellen“ Rotationsbewegung kann auch ohne Differentialrechnung hergeleitet werden, wenn man die Energiebilanz der Schwingung betrachtet. Nach dem Energie-Erhaltungssatz ist die maximale kinetische Energie (beim Durchgang durch die Ruhelage) gleich der maximalen potentiellen Energie (am Umkehrpunkt). Bei einem Federpendel ist $E_{\text{pot}} = E_{\text{spann}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$, wobei D die Federhärte und s die Auslenkung bezeichnet. Es gilt also:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,max}} &= E_{\text{pot,max}} \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot s \end{aligned}$$

Vergleicht man diesen Zusammenhang mit der Gleichung $v = \omega \cdot r$, so entspricht der Radius r der Kreisbewegung der Auslenkung s aus der Ruhelage. Der Term $\sqrt{\frac{D}{m}}$ hingegen entspricht der Winkelgeschwindigkeit ω .

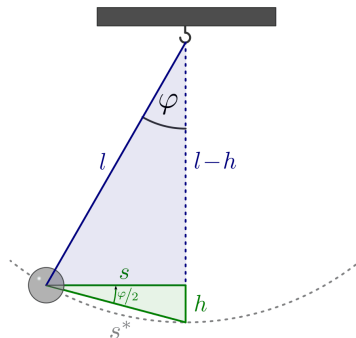


Abb. 86: Skizze zur Herleitung der Energiebilanz bei einem Fadenpendel.

Bei einem Fadenpendel ergeben sich harmonische Schwingungen in guter Näherung wiederum nur für kleine Winkel, für die die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ gilt. In diesem Fall können, wie in der obigen Abbildung zu sehen, zwei Winkelbeziehungen verwendet werden:

$$\varphi \approx \sin(\varphi) = \frac{s}{l}$$

und:

$$\frac{\varphi}{2} \approx \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx \frac{h}{s}$$

Löst man die zweite Gleichung nach φ auf, so erhält man $\varphi \approx \frac{2 \cdot h}{s}$. Dieser Ausdruck kann mit der ersten Gleichung gleichgesetzt werden. Aufgelöst nach h erhält man folgende Näherung:

$$\frac{s}{l} = \frac{2 \cdot h}{s} \iff h = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{l}$$

Setzt man diesen Ausdruck für h in die Energiegleichung ein, erhält man:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,max}} &= E_{\text{pot,max}} \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= m \cdot g \cdot h \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= m \cdot g \cdot \frac{s^2}{2 \cdot l} \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot s \end{aligned}$$

Bei dieser entspricht nun der Term $\sqrt{\frac{g}{l}}$ der Winkelgeschwindigkeit ω ; die Näherung gilt allerdings nur für kleine Auslenkungen.

Zeitliche Änderung von Auslenkung und Geschwindigkeit

Sowohl die Auslenkung s wie auch die Geschwindigkeit v haben bei Schwingungsvorgängen sich periodisch ändernde Werte. Der zeitliche Verlauf hängt von der Anfangsbedingung ab. Befindet sich ein Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ruhelage und bewegt sich dabei mit einer Geschwindigkeit $v > 0$ auf einen Umkehrpunkt zu, so kann im Fall einer harmonischen Schwingung die Auslenkung zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt t mittels der Sinus-Funktion beschrieben werden:

$$s(t) = s_{\text{max}} \cdot \sin(\varphi) = s_{\text{max}} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Hierbei ist wiederum die Vorstellung entscheidend, dass jede harmonische Schwingung mit einer Bewegung eines bestimmten Punktes auf einer Kreisscheibe verglichen werden kann. Beginnt die Schwingung nicht bei der Ruhelage, sondern an einem anderen Punkt, so muss zusätzlich eine „Phasenverschiebung“ um einen Winkel von φ_0 berücksichtigt werden. Es gilt also allgemein:

$$s(t) = s_{\text{max}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Ist im Speziellen $\varphi_0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, so ist die verschobene Sinus-Funktion mit der entsprechenden Cosinus-Funktion identisch:

$$\sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega \cdot t)$$

Beginnt die Schwingung also zum Zeitpunkt $t = 0$ an einem Umkehrpunkt und hat hierbei die Geschwindigkeit $v(t_0) = 0$, so ist beispielsweise die Cosinus-Funktion für die Beschreibung der zeitlichen Änderung der Auslenkung besser geeignet.

Sowohl die Sinus- wie auch die Cosinus-Funktion haben eine Periode von $2 \cdot \pi$. Löst man die Beziehung $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T_0}$ nach der Schwingungsdauer T_0 auf, so erhält man für $t = T_0$ tatsächlich wieder den gleichen Wert wie für $t = 0$.

Beginnt die Schwingung beispielsweise an einem der Umkehrpunkte, so wird nach $\frac{1}{4} \cdot T_0$ zum ersten mal die Ruhelage durchlaufen. Setzt man diesen Wert für t in die Gleichung $s(t) = \cos(\omega \cdot t)$ ein, so erhält man wegen $T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$ nach $\frac{2}{4} T_0$ wird der andere Umkehrpunkt erreicht. Nach $\frac{3}{4} \cdot T_0$ wird zum zweiten Mal die Ruhelage durchlaufen, bis das Pendel schließlich nach $\frac{4}{4} \cdot T_0$ wieder am Ausgangspunkt ankommt.

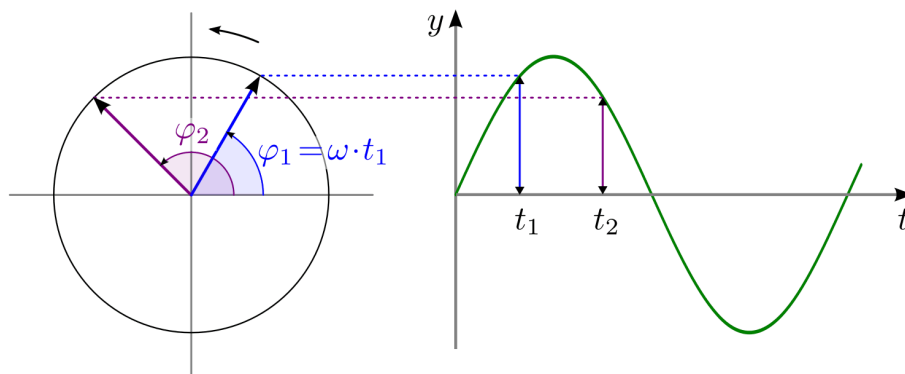


Abb. 87: Zeigerdarstellung einer sinusförmigen Schwingung.

In der obigen Abbildung ist der zeitliche Verlauf der Phasenwinkel für ein horizontal schwingendes Pendels als so genanntes „Zeigerdiagramm“ dargestellt. Diese Darstellung ist insbesondere praktisch, um mehrere Schwingungen gleichzeitig darzustellen: Unterschiedliche Zeigerlängen bedeuten verschiedene Amplituden, und unterschiedliche Winkelgeschwindigkeiten bedeuten verschiedene Frequenzen. Die einzelnen Schwingungszustände beziehungsweise Phasen sind zudem am Winkel des jeweiligen Zeigers zu erkennen.

Mechanische Wellen

Bestehen Wechselwirkungen zwischen einzelnen schwingenden Objekten, so kann sich der Schwingungszustand eines Oszillators jeweils auf die benachbarten Oszillatoren ausbreiten. Eine solche räumliche Ausbreitung eines Schwingungszustands infolge von Kopplungseffekten bezeichnet man als (mechanische) Welle. Durch Wellen wird also ausschließlich Energie, jedoch keine Materie übertragen.

Beispiele:

- Seilwellen entstehen, wenn ein Seil periodisch in Querrichtung hin- und herbewegt wird.
- Schallwellen entstehen durch schnelle Schwingungen eines elastischen Körpers, beispielsweise einer Lautsprechermembran oder einer Stimmgabel.
- Wasserwellen entstehen meist dadurch, dass Wind über die ansonsten glatte Wasseroberfläche streift. Die Wasseroberfläche hebt und senkt sich dadurch in periodischen Abständen.

In Diagrammen wird bei Wellen – anders als Schwingungen – meistens nicht der zeitliche, sondern der räumliche Verlauf dargestellt. Fällt ein Stein ins Wasser, so entstehen um die Eintauchstelle kreisförmige Wellen, die sich nach allen Seiten ausbreiten. Von oben betrachtet ergeben sich in diesem Fall konzentrische Kreise mit zunehmendem Radius; in der Seitenansicht haben die Wellen näherungsweise einen räumlich periodischen Verlauf. Ist die Wellenform sinusförmig (beispielsweise bei Seilwellen), so nennt man die Welle harmonisch, andernfalls nennt man sie anharmonisch (beispielsweise Wasserwellen).

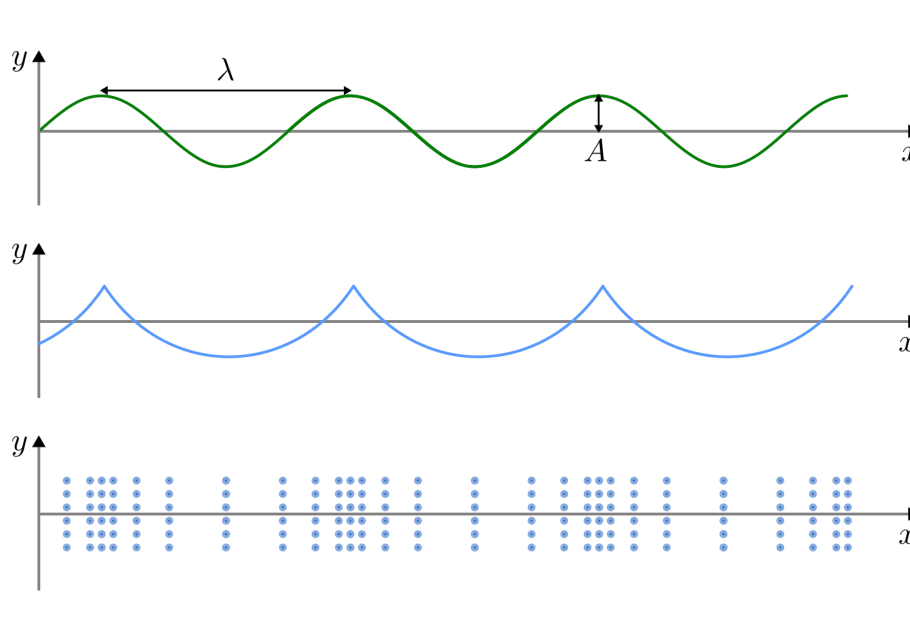


Abb. 88: Formen mechanischer Wellen: Seilwelle, Wasserwelle und Luftwelle (Schall).

Längswellen und Querwellen

Allgemein werden Wellen in so genannte Längs- und Querwellen unterteilt:

- Bei Längswellen verlaufen die Schwingungen parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Dies ist beispielsweise bei Druck- oder Schallwellen in Luft der Fall.
- Bei Querwellen verlaufen die Schwingungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Dies ist beispielsweise bei Seilwellen oder Schwingungen von Instrumentensaiten sowie bei elektromagnetischen Wellen bzw. Lichtwellen der Fall.

Längswellen sind grundsätzlich mit einer Ausbreitung von Verdünnungen und Verdichtungen des Trägermediums verbunden, so dass sie sich nur in komprimierbaren Materialien

ausbreiten können. In manchen Fällen, beispielsweise bei Erdbebenwellen oder bei Schallwellen in Flüssigkeiten und Festkörpern, treten Längs- und Querwellen gleichzeitig auf.

Ausbreitung von Wellen

Zur physikalischen Beschreibung einer Welle werden die gleichen Größen wie zur Beschreibung von *Schwingungen* verwendet. Zusätzlich sind zwei weitere Begriffe für die Beschreibung von Wellen nützlich:

- Alle Punkte, die vom Ausgangspunkt einer Welle den jeweils gleichen zeitlichen Abstand haben, werden „Wellenfront“ genannt. Bei periodischen Wellen haben alle Punkte einer Wellenfront den gleichen Schwingungszustand („Phase“).
- Die so genannte Wellenlänge λ gibt die räumliche Periode einer Welle an, das heißt den räumlichen Abstand zweier Wellenfronten. Die Wellenlänge wird in Metern angegeben.
- Die Ausbreitungsrichtung von Wellen ist stets senkrecht zu den einzelnen Wellenfronten.

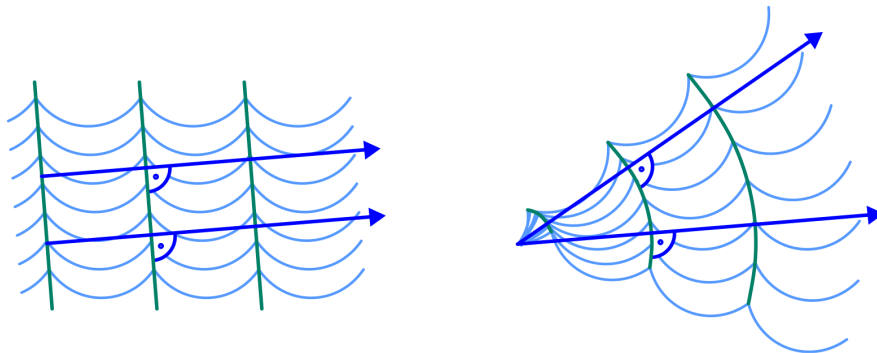


Abb. 89: Wellenfronten und Ausbreitungsrichtungen bei linearen und kreisförmigen Wellen.

Die Geschwindigkeit, mit der sich die einzelnen Wellenfronten ausbreiten, wird als Ausbreitungs- oder Phasengeschwindigkeit v der Welle bezeichnet.¹ Die Richtung von v ist dabei stets senkrecht zur Wellenfront. In vielen Materialien, insbesondere in Luft, breiten sich die einzelnen Wellenfronten – nahezu unabhängig von der Frequenz der Wellen – mit der gleichen Ausbreitungsgeschwindigkeit fort. Zwischen der Frequenz f der Welle und der Wellenlänge λ gilt dabei folgender wichtiger Zusammenhang, der bisweilen auch „Wellenformel“ genannt wird:

$$v = \lambda \cdot f \quad (90)$$

¹ In der Akustik und Optik wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Schall- bzw. Lichtgeschwindigkeit) üblicherweise mit c anstelle v bezeichnet.

Anschaulich kann man sich diese Gleichung vorstellen, wenn man sich die Wellenfronten unterschiedlicher Frequenz als zwei gemeinsam wandernde Spaziergänger mit unterschiedlicher Schrittlänge vorstellt. Da sich beide mit der gleichen Geschwindigkeit $v = \text{konst.}$ fortbewegen, muss der Spaziergänger mit der kürzeren Schrittlänge eine entsprechend höhere Schrittfrequenz haben.

In der Akustik breiten sich entsprechend alle Schallwellen mit unterschiedlicher Frequenz (Tonhöhe) in den meisten Materialien gleich schnell aus, in der Optik breiten gilt das gleiche für Lichtwellen unterschiedlicher Frequenz (Farbe). Für die Schallgeschwindigkeit in Luft gilt dabei $c_0 = v_{\text{Schall}} \approx 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, für die Lichtgeschwindigkeit gilt $c_0 = v_{\text{Licht}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kennt man die Frequenz oder die Wellenlänge einer Licht- oder Schallwelle, so kann man mittels Gleichung (90) unmittelbar die zugehörige fehlende Größe berechnen:

Beispiele:

- Eine Schallwelle mit einer Frequenz von 100 Hz (entspricht einem Brummen von alten Lautsprechern) hat folgende Wellenlänge:

$$v_{\text{Schall}} = \lambda \cdot f \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{v_{\text{Schall}}}{f} = \frac{330 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{100 \frac{1}{\text{s}}} = 3,3 \text{ m}$$

Die Frequenzen von hörbarem Schall liegen etwa zwischen 20 Hz und 20 kHz; dies entspricht Wellenlängen von 16,5 m bis rund 2 cm.

- Eine Lichtwelle mit einer Wellenlänge von $500 \text{ nm} = 500 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ hat folgende Frequenz:

$$v_{\text{Licht}} = \lambda \cdot f \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{v_{\text{Licht}}}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{+8} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 600 \cdot 10^{12} \frac{1}{\text{s}} = 600 \text{ THz}$$

Die Wellenlängen von sichtbarem Licht liegen zwischen etwa 380 nm und 780 nm; dies entspricht Frequenzen von etwa 789 THz bis 384 THz.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v von Wellen hängt Materialeigenschaften des Wellenträgers ab. Beispielsweise gelten folgende Zusammenhänge:

- Bei Longitudinalwellen in Flüssigkeiten gilt $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$, wobei K für den Kompressionsmodul der Flüssigkeit und ρ für ihre Dichte steht.
- Bei Longitudinalwellen in Gasen gilt $v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}}$, wobei κ für den Adiabatenexponenten, p für den Druck im Gas und ρ für dessen Dichte steht.
- Bei Longitudinalwellen in festen Stäben gilt $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, wobei E für den Elastizitätsmodul des Festkörpers und ρ für dessen Dichte steht.
- Bei Transversalwellen in festen Stäben gilt $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, wobei G für den Schubmodul des Festkörpers und ρ für dessen Dichte steht.
- Bei Transversalwellen in dünnen Drähten gilt $v = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$, wobei F für die Spannkraft im Draht, ρ für dessen Dichte und A für dessen Querschnittsfläche steht.

Aus den obigen Formeln folgt beispielsweise, dass die Schallgeschwindigkeit in Luft mit zunehmender Temperatur ebenfalls zunimmt, da die Dichte von Gasen bei gleichem Druck

und steigender Temperatur abnimmt. Bei Musikinstrumenten hingegen ist vor allem die Spannkraft und die Querschnittsfläche der Seiten von Bedeutung: Tief klingende Saiten sind oftmals dicker, aus Materialien mit einer höheren Dichte gefertigt und/oder weniger stark gespannt.

In manchen Materialien ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v zudem abhängig von der Frequenz f der Wellen. In diesem Fall laufen die einzelnen Wellen auseinander, man spricht von Dispersion. Dieser Effekt wird beispielsweise in der *Optik* zur Aufspaltung von weißem Licht in Spektralfarben mittels eines Prismas genutzt.

Superpositionsprinzip

Wellen können sich, ohne sich gegenseitig zu stören, zu einer resultierenden Welle überlagern. Sind die Frequenzen und Amplituden der einzelnen (Teil-)Wellen bekannt, so kann man daraus die resultierende Welle bestimmen.

Überlagern sich zwei sinusförmige Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung und gleicher Frequenz, so entsteht wiederum eine sinusförmige Welle mit der gleichen Frequenz. Die Amplitude und Phase der resultierenden Schwingung ist von denen der einzelnen Wellen abhängig.

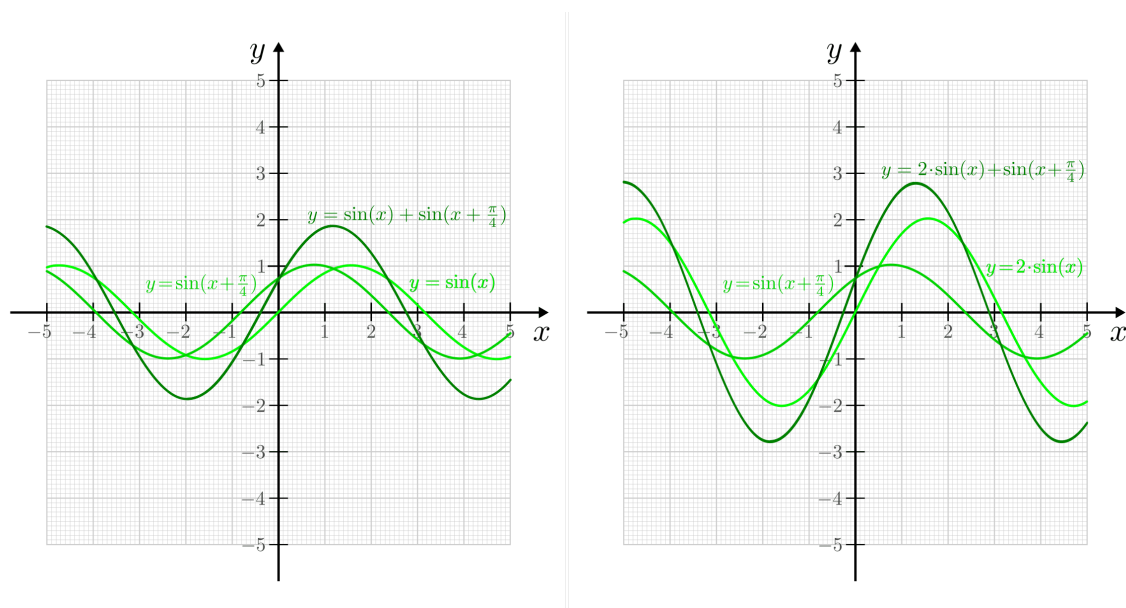


Abb. 90: Überlagerung zweier sinusförmiger Wellen gleicher Frequenz und gleichen bzw. unterschiedlichen Amplituden.

Überlagern sich zwei sinusförmige Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung, aber unterschiedlicher Frequenz, so entsteht eine nicht-sinusförmige Welle. Die Amplitude und Form der resultierenden Schwingung ist wiederum von denen der einzelnen Wellen abhängig.

Unterscheiden sich zwei Wellen mit gleicher Phase und gleicher Amplitude nur geringfügig in ihrer Frequenz, so ergibt sich bei der Überlagerung beider Wellen eine so genannte Schwebung. Hierbei handelt es sich um eine Welle mit der mittleren Frequenz $f = \frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2)$ der beiden Einzelschwingungen, deren Amplitude periodisch zwischen Null und der maximalen Amplitude schwankt.

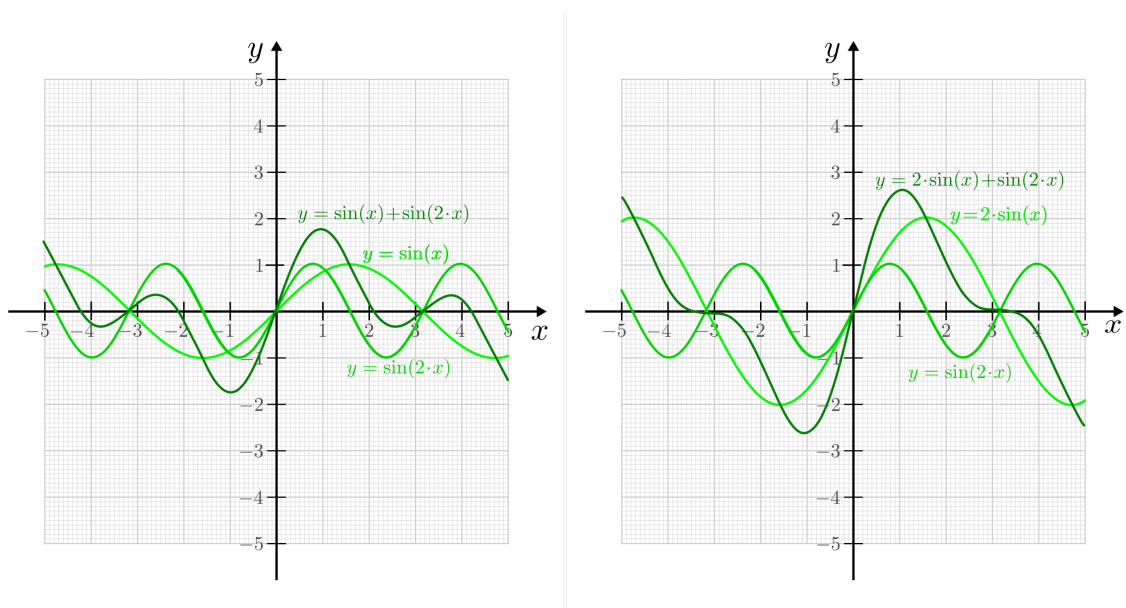


Abb. 91: Überlagerung zweier sinusförmiger Wellen unterschiedlicher Frequenz und gleichen bzw. unterschiedlichen Amplituden.

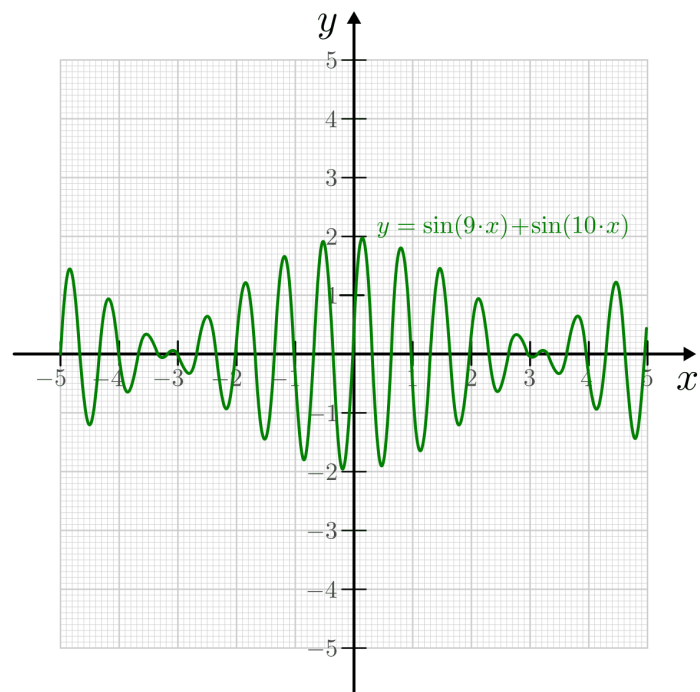


Abb. 92: Überlagerung zweier sinusförmiger Wellen geringfügig unterschiedlicher Frequenz (Schwebung).

Je geringer der Frequenzunterschied der Teilwellen ist, desto länger wird die Dauer der Schwebung. Für die Frequenz der Schwebung gilt:

$$f_s = \Delta f = |f_2 - f_1| \quad (91)$$

Schwebungen werden beispielsweise genutzt, um Klaviere oder Gitarren zu stimmen: Verklingt die Schwebung nicht schneller als die angeschlagenen Töne des Instruments, die in Übereinstimmung gebracht werden sollen, so ist das Instrument gut gestimmt.

Interferenz-Effekte

Treffen an einer Stelle zwei oder mehrere Wellen aus unterschiedlichen Richtungen aufeinander, so findet dort wiederum eine Überlagerung der einzelnen Wellenamplituden statt:

- Haben die einzelnen Wellen eine gleiche momentane Auslenkung (beide in positive oder beide in negative Auslenkungsrichtung), so überlagern sich die Wellen „konstruktiv“, das heißt die resultierende Amplitude ist größer als die Amplituden der einzelnen Wellen.
- Haben die einzelnen Wellen hingegen unterschiedliche Auslenkungsrichtungen, so überlagern sich die Wellen „destruktiv“; die resultierende Amplitude ist hierbei geringer als die Beträge der einzelnen Amplituden. Auch eine völlige Auslöschung zweier Teilwellen ist in diesem Fall möglich.

An jeder Stelle der Welle sind somit die Auslenkungszustände der Teilwellen unter Berücksichtigung des Vorzeichens zu addieren. Vereinfacht gesagt: Trifft ein „Wellenberg“ auf einen anderen „Wellenberg“, so ergibt sich ein höherer Wellenberg, trifft ein „Wellenberg“ auf ein „Wellental“, so löschen sich die Amplituden an dieser Stelle zumindest teilweise aus.

Handelt es sich bei den aufeinander treffenden Wellen nicht nur um einen einzelnen Auslenkungszustand (Wellenberg bzw. Wellental, manchmal allgemein auch „Wellenpaket“ genannt), sondern um einen kontinuierlichen, nicht abbrechenden „Wellenzug“, so bezeichnet man das Ergebnis der Überlagerungen der Teilwellen als Interferenz.

Kohärenz und Gangunterschied

Dauerhaft bilden sich Interferenz-Effekte nur dann aus, wenn die sich überlagernden Wellen eine gleiche Frequenz und eine feste Phasenbeziehung zueinander haben. Die Wellen müssen also von gleich schnell schwingenden Erregern ausgehen, die sich relativ zueinander in Ruhe befinden, sich also nicht voneinander entfernen oder aufeinander zubewegen. Erfüllen zwei oder mehrere Wellenzüge diese beiden Bedingungen, so bezeichnet man sie als kohärent.

Werden beispielsweise, wie in der obigen Abbildung dargestellt, Wasserwellen durch zwei im gleichen Rhythmus eintauchende Stangen erzeugt, so kommen beide Teilwellen stets gleichzeitig an der Mittelsenkrechten zwischen den beiden Eintauchstellen an. Entlang dieser Linie überlagern sich beide Wellen somit stets konstruktiv, es treten dort also

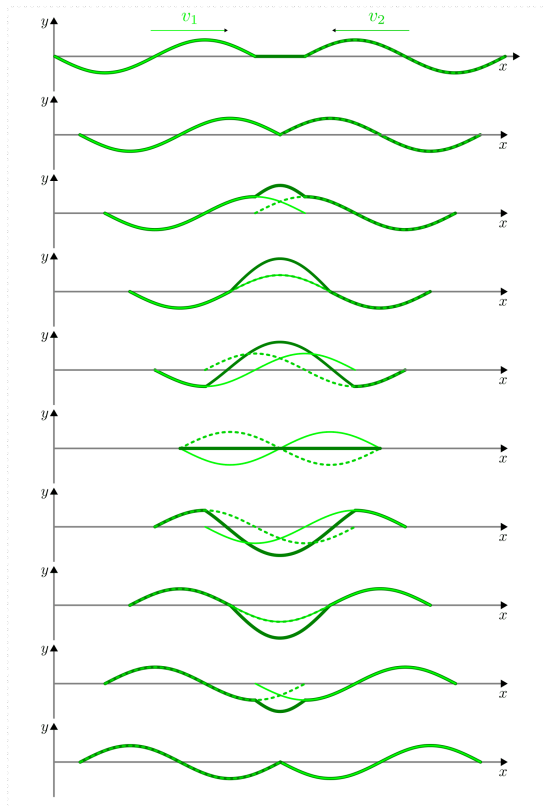


Abb. 93: Interferenz zweier Wellen mit gleich großer Amplitude und entgegengesetzt gleich großer Ausbreitungsgeschwindigkeit v .

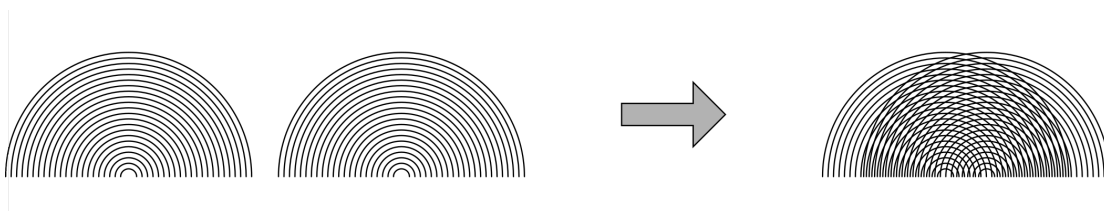


Abb. 94: Interferenz zweier kreisförmiger Wellen.

hohe Wellenberge auf, gefolgt von tiefen Wellentälern. Zusätzlich zur Mittelsenkrechten existieren noch weitere Linien, an denen es stets zu konstruktiver (oder auch destruktiver) Interferenz kommt.

Entscheidend dafür, ob es an einer Stelle zu konstruktiver oder destruktiver Interferenz kommt, sind die beiden Weglängen s_1 und s_2 von den beiden Ausgangspunkten der Welle zur betreffenden Stelle. Haben beide Wellen zu Beginn den gleichen Auslenkungszustand (die gleiche Phase), so ergibt sich genau dann ein Interferenz-Maximum, wenn sich die beiden Weglänge um ein Vielfaches einer ganzen Wellenlänge unterscheiden. Es muss in diesem Fall also für den so genannten „Gangunterschied“ $\Delta s = s_2 - s_1$ folgendes gelten:

$$\Delta s = n \cdot \lambda \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (92)$$

Diese Bedingung besagt anschaulich, dass beide Wellen exakt mit dem gleichen Auslenkungszustand ankommen, auch wenn die eine Welle bis zum Ankunftsort bereits ein paar Wellenberge und Wellentäler mehr durchlaufen hat. Beträgt der Gangunterschied hingegen genau eine halbe Wellenlänge, so treffen die Wellenberge der einen Welle auf die Wellentäler der anderen Welle, und man erhält destruktive Interferenz. An einem Interferenz-Minimum muss also für den Gangunterschied Δs gelten:

$$\Delta s = \frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot \lambda \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (93)$$

Durch $\frac{2 \cdot n + 1}{2}$ wird hierbei ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge bezeichnet, also $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Stehende Wellen

Ein Sonderfall von Interferenz ergibt sich, wenn eine Welle auf ein festes Hindernis oder das Ende des Wellenträgers trifft. Kann sich die Welle nicht weiter ausbreiten, so wird sie reflektiert und läuft mit gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung. Dabei überlagert sich die reflektierte mit weiteren Wellen, die sich noch in der ursprünglichen Richtung bewegen.

Da die Frequenz der reflektierten Welle mit der Frequenz des ursprünglichen Wellenzugs identisch ist, kann es wiederum zu konstruktiver Interferenz kommen, wenn der Wellenträger eine zur Wellenlänge λ passende Wellenlänge hat:

- Ist der Wellenträger, beispielsweise ein Seil oder eine Saite eines Musikinstruments, an beiden Enden fest eingespannt, so ergibt sich genau dann eine konstruktive Interferenz, wenn die Seillänge l einem ganzzahligen Vielfachen von einem Halben der Wellenlänge entspricht. Es muss also folgende Bedingung gelten:

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (94)$$

Schwingende Saiten haben also, im Gegensatz zu normalen Pendeln, nicht nur eine einzige Eigenfrequenz. Zusätzlich zur so genannten „Grundschiwingung“ mit $\lambda_0 = 2 \cdot l$

können weitere „Oberschwingungen“ auftreten, wobei für die erste Oberschwingung $\lambda_1 = \frac{2l}{2}$ gilt, für die zweite $\lambda_2 = \frac{2l}{3}$, für die dritte $\lambda_3 = \frac{2l}{4}$, usw.

Die Grundschiwingung hat stets die größte Amplitude und ist ausschlaggebend für die Frequenz der sich ausbreitenden Welle. Die zusätzlich auftretenden Oberschwingungen hingegen modifizieren die Wellenkurve, so dass sich beispielsweise bei verschiedenen Musikinstrumenten auch dann unterschiedliche Klänge ergeben, wenn die Instrumente perfekt gestimmt sind und der gleiche „Ton“ gespielt wird.

- Ist der Wellenträger, beispielsweise eine Stimmgabel oder ein schwingendes Metallplättchen, an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende lose, so ergibt sich genau dann eine konstruktive Interferenz, wenn die Länge l des Objekts einem ganzzahligen Vielfachen von einem Viertel der Wellenlänge entspricht. Es muss also folgende Bedingung gelten:

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{4} \quad (95)$$

Dieser Zusammenhang gilt auch, wenn die Luftsäule in einem einseitig geschlossenen Rohr zum Schwingen gebracht wird.

- Ist der Wellenträger, beispielsweise bei einem Blasinstrument, an beiden Enden offen, so ergibt sich genau dann eine konstruktive Interferenz, wenn die Länge l des Objekts einem ganzzahligen Vielfachen von einem Halben der Wellenlänge entspricht. Es muss also – ebenso wie bei beidseitig fest eingespannten Wellenträgern – folgende Bedingung gelten:

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (96)$$

Die Länge des Wellenträgers ist, beispielsweise bei Musikinstrumenten, also maßgeblich für die Wellenlänge λ der Grundschiwingung. Welche Frequenz f die stehende Welle und somit der entstehende Ton hat, hängt allerdings wegen $v = \lambda \cdot f$ beziehungsweise $f = \frac{v}{\lambda}$ auch von der Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Welle auf dem Wellenträger ab.

Mathematische Beschreibung von Wellen

Im folgenden werden Wellen betrachtet, die räumlich ein sinus-förmiges Ausbreitungsmuster haben. Beginnt die Welle am Koordinatenursprung $x_0 = 0$ mit der Auslenkung $y(x_0) = 0$, so ergibt sich ein Wellenausbreitung, wie sie in der folgenden Abbildung dargestellt ist.

In einer Entfernung von einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge λ wiederholt sich jeweils das Wellenmuster. Die Welle hat aus räumlicher Sicht also eine Periode der Länge λ ; zugleich hat jede Sinusfunktion eine Periode von $2 \cdot \pi$. Die Welle kann somit durch folgende Formel charakterisiert werden:

$$y(x) = y_{\max} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{\lambda}\right) \quad (97)$$

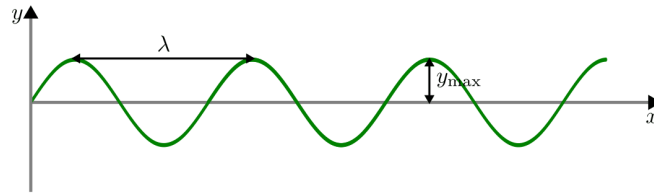


Abb. 95: Räumliche Ausbreitung einer Welle zur Zeit t_0 .

Hierbei bezeichnet y_{\max} die Amplitude der Welle. Ist x ein ganzzahliges Vielfaches von λ , so wird das Argument der Sinus-Funktion entsprechend zu einem ganzzahligen Vielfachen von $2 \cdot \pi$. Beginnt die Welle bei $x = 0$ mit dem Wert $y = 0$, so genügt bereits die obige Gleichung zur Beschreibung der Welle, ansonsten muss im Argument der Sinusfunktion noch ein anfänglicher Phasenwinkel φ_0 dazu addiert werden.

Wellenmuster bleiben – abgesehen von stehenden Wellen – allerdings nicht an Ort und Stelle, sondern bewegen sich im Laufe der Zeit weiter. Bewegt sich die Welle beispielsweise in positiver x -Richtung, so wandert das Wellenmuster in der Zeit Δt um die Länge Δx weiter.

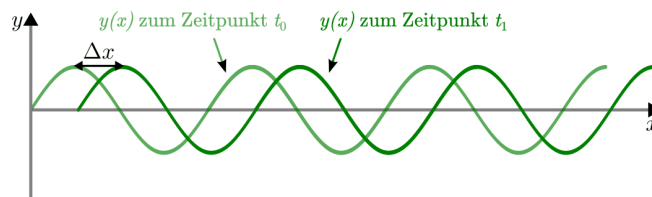


Abb. 96: Räumliche Ausbreitung einer Welle zur Zeit t_1 .

Für die „Verschiebung“ der Welle um Δx gilt:

$$\Delta x = v_{\text{welle}} \cdot \Delta t$$

Diese Beziehung ist nützlich, um den Auslenkungszustand einer sinus-förmigen Welle an jedem beliebigen Ort *und* zu jeder beliebigen Zeit zu bestimmen: Zum Zeitpunkt t_1 hat die Welle an der Stelle x_1 nämlich genau die gleiche Auslenkung, die sie zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ an der Stelle $x_0 = (x_1 - \Delta x)$ hatte. Es gilt somit:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_{\max} \cdot \sin \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{x - \Delta x}{\lambda} \right) \\ &= y_{\max} \cdot \sin \left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (x - \Delta x) \right) \\ &= y_{\max} \cdot \sin \left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (x - v_{\text{welle}} \cdot t) \right) \end{aligned}$$

Hierbei wurde vereinfacht t für die Differenz Δt zwischen dem Zeitpunkt t und dem Startpunkt $t_0 = 0$ geschrieben. Die Gleichung kann weiter umgeformt werden, wenn man für v_{welle} die Wellenbeziehung $v_{\text{welle}} = \lambda \cdot f$ einsetzt:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_{\text{max}} \cdot \sin \left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (x - \lambda \cdot f \cdot t) \right) \\ &= y_{\text{max}} \cdot \sin \left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - f \cdot t \right) \right) \end{aligned}$$

Im zweiten Rechenschritt wurde der Faktor $\frac{1}{\lambda}$ in die innere Klammer hinein multipliziert. Schreibt man in dieser Form für die Frequenz $f = \frac{1}{T}$, so wird die räumliche sowie zeitliche Periode der Welle deutlich:

$$y(x, t) = y_{\text{max}} \cdot \sin \left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right)$$

Die Welle fängt immer wieder dann von Neuem an, wenn x ein Vielfaches der Wellenlänge λ ist (räumliche Periode), oder wenn t ein Vielfaches der Schwingungsdauer T ist (zeitliche Periode).

Für praktische Rechnungen ist es noch „handlicher“, auch den Faktor $2 \cdot \pi$ im Argument der Sinus-Funktion in die Klammer hinein zu multiplizieren. Man erhält hierbei:

$$y(x, t) = y_{\text{max}} \cdot \sin \left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x - \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t \right)$$

In dieser Darstellung entspricht der Term $\frac{2 \cdot \pi}{T}$ gerade der Kreisfrequenz ω der Welle; diese gibt an, mit welcher Geschwindigkeit die Welle in der *Zeigerdarstellung* oszilliert. Entsprechend bezeichnet man den Term $\frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$ als so genannte „Kreiswellenzahl“ k . Damit ergibt sich für den Auslenkungszustand einer Welle folgende „einfache“ Form der Gleichung:

$$y(x, t) = y_{\text{max}} \cdot \sin (k \cdot x - \omega \cdot t) \tag{98}$$

Die Kreiswellenzahl k gibt an, wie viele Wellen in eine bestimmte Längeneinheit (beispielsweise cm oder m) hinein passen. Je kürzer also die Wellenlänge λ einer Welle ist, desto größer ist also ihr k -Wert. Für Mikrowellen ist beispielsweise k in der Größenordnung von etwa 10 je cm, bei Lichtwellen in der Größenordnung von über 10 000 je cm.

Akustik

Akustik ist die Wissenschaft der Schallentstehung, der Schallausbreitung und der damit verbundenen Erscheinungen.

Eigenschaften von Schall

Als „Schall“ bezeichnen wir alle Klänge, Geräusche usw. die Menschen und/oder Tiere mit ihrem Gehör wahrnehmen können. Damit Schall entstehen kann, muss ein mechanischer Körper in einen entsprechenden Schwingungszustand gebracht werden.

Schallquellen und Ausbreitung von Schall

Als Schallquelle wird ein Körper bezeichnet, der durch *mechanische Schwingung* Schall erzeugt. Dabei handelt es sich meist um einen elastischen Festkörper, doch auch Flüssigkeiten und Gase können als Schallquellen auftreten.

Beispiele:

- Saiteninstrumente (beispielsweise Gitarren oder Violinen), gespannte Gummis (beispielsweise von Trommeln) und ähnliche elastische Festkörper erzeugen beim Anzupfen oder Anschlagen verschiedenartige Töne und Geräusche.
- Bewegte Flüssigkeiten verursachen Strömungsgeräusche („Plätschern“, „Rauschen“, usw).
- In Blasinstrumenten (beispielsweise Flöten) kann die darin enthaltene Luftmenge durch Anblasen in Schwingung versetzt werden. Hierdurch entstehen Klänge, die charakteristisch sind für die Größe, die Form und das Material des Instruments.

Bei einem Schallempfänger handelt es sich ebenfalls um einen elastischen Körper, der zu mechanischen Schwingungen angeregt werden kann und dabei die empfangenen Schallwellen in biologische oder elektrische Signale umsetzt.

Schall braucht stets eine stoffliche Substanz (akustisches „Medium“), um sich ausbreiten zu können. In einem Raum ohne Materie („Vakuum“) ist keine Schallausbreitung möglich.



Abb. 97: Schallquelle und Schallausbreitung am Beispiel eines Weckers.

Die Schallgeschwindigkeit

Bei der Schallausbreitung gehen *mechanische Wellen* kreisförmig von einer Schallquelle aus. Aus mikroskopischer Sichtweise werden dabei die Schwingungen der einzelnen Teilchen der Schallquelle durch Stoßvorgänge auf benachbarte Teilchen des akustischen Mediums übertragen. Auch innerhalb eines akustischen Mediums werden die Schwingungen der Teilchen durch Stoßvorgänge an benachbarte Teilchen weitergegeben.

Tab. 11: Schallgeschwindigkeiten in verschiedenen Materialien.

Material	Schallgeschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Gummi	150
Luft (bei 0 °C)	332
Kork	500
Wasser	1 450
Hartgummi	1 570
Eis	3 250
Holz (Buche)	3 300
Holz (Eiche)	3 800
Aluminium	5 100
Stahl	5 920
Marmor	6 100
Diamant	18 000

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schwingungszustände und damit auch der Schallwellen ist allgemein umso höher, je größer die Steifigkeit des Schall übertragenden Materials ist.¹

¹ Bei einem gasförmigen akustischen Medium ist die Schallgeschwindigkeit auch von Druck und Temperatur abhängig. Beispielsweise beträgt die Schallgeschwindigkeit in 0 °C kalter Luft 332 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, bei 20 °C jedoch 343 m/s.

Die Schallfrequenz

Je höher die Frequenz ist, mit der eine Schallquelle schwingt, desto höher klingt der Ton, den sie erzeugt. Für Menschen hörbare Frequenzen liegen dabei in einem Frequenzbereich von etwa 15 Hz bis 20 kHz. Die obere Grenze („Hörschwelle“) nimmt allerdings mit zunehmendem Alter deutlich ab, d.h. ältere Menschen können hohe Töne deutlich schlechter hören, teilweise sogar überhaupt nicht mehr.

Der Frequenzbereich bis 15 Hz wird als Infraschall, der Bereich von etwa 20 kHz bis 10 GHz als Ultraschall bezeichnet. Viele Tierarten verständigen sich im Ultraschallbereich, beispielsweise Nachtfalter, Fledermäuse und Delfine (bei Frequenzen von 100 bis 200 kHz).

Technisch wird Ultraschall in vielerlei Anwendungen genutzt, beispielsweise in Entfernungsmessern und Bewegungsmeldern. In der Medizin lassen sich mittels Ultraschall schwacher Intensität Gewebeuntersuchungen durchführen; mit Ultraschall hoher Intensität können auch Geräte gereinigt sowie mineralische Ablagerungen im Körper (insbesondere Zahnstein, Blasen- und Nierensteine) zertrümmert werden.

Die Länge von Schallwellen

Mit kurzen Schritten und einer hohen Schrittfrequenz kann man sich genauso schnell fortbewegen wie mit langen Schritten und einer niedrigen Schrittfrequenz. Für Schallwellen gilt dieses Prinzip ebenso, denn tiefe wie auch hohe Töne breiten sich gleichermaßen mit der Schallgeschwindigkeit c aus.

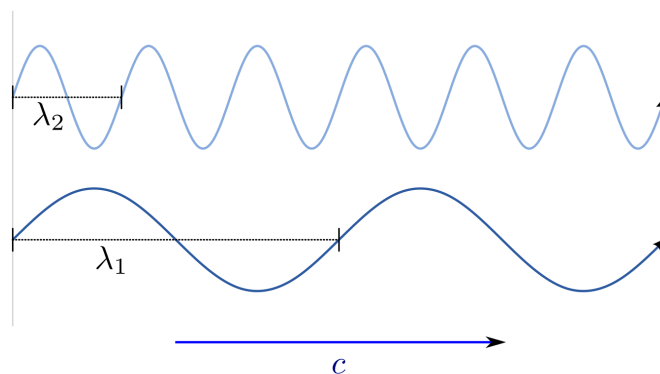


Abb. 98: Wellenlängen von Schallwellen unterschiedlicher Frequenz.

Mathematisch lässt sich dieser Sachverhalt dadurch beschreiben, dass das Produkt aus der Wellenlänge λ des Schalls (Einheit: m) und der Schallfrequenz f (Einheit: $\frac{1}{s}$) gleich der Schallgeschwindigkeit c (Einheit: $\frac{m}{s}$) ist:

$$c = \lambda \cdot f \quad (99)$$

Durch Umstellen der obigen Formel kann unmittelbar die Länge einer Schallwelle bei einer bestimmten Frequenz berechnet werden. Dabei wird genutzt, dass die Schallgeschwindig-

keit c eine Konstante ist, deren Wert nur vom Material des akustischen Mediums abhängt (siehe Tabelle *Schallgeschwindigkeiten in verschiedenen Materialien*). Entsprechend gilt:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Je höher die Frequenz einer Schallwelle, desto kürzer ist somit ihre Wellenlänge.

Töne, Klänge und Geräusche

Schallwellen lassen sich in folgende drei Arten unterteilen:

- Töne:

Als Ton bezeichnet man eine harmonische Schwingung, d.h. eine regelmäßige Sinusschwingung mit fester Frequenz. Verschiedene Töne lassen sich ihrer Frequenz beziehungsweise Tonhöhe nach anordnen. Beispielsweise besteht eine Tonleiter aus acht Tönen (Oktave) mit bestimmten Frequenzverhältnissen, wobei der letzte Ton der Oktave eine genau doppelt so hohe Frequenz besitzt wie der erste Ton der Oktave.

Zur Stimmung von Instrumenten wird häufig der so genannte „Kammer-ton“ a' mit einer Frequenz von 440 Hz genutzt.

- Klänge:

Ein Klang setzt sich aus mehreren Tönen zusammen. Er entsteht durch Überlagerung verschiedener Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache des tiefsten Tons („Grundtons“) sind.

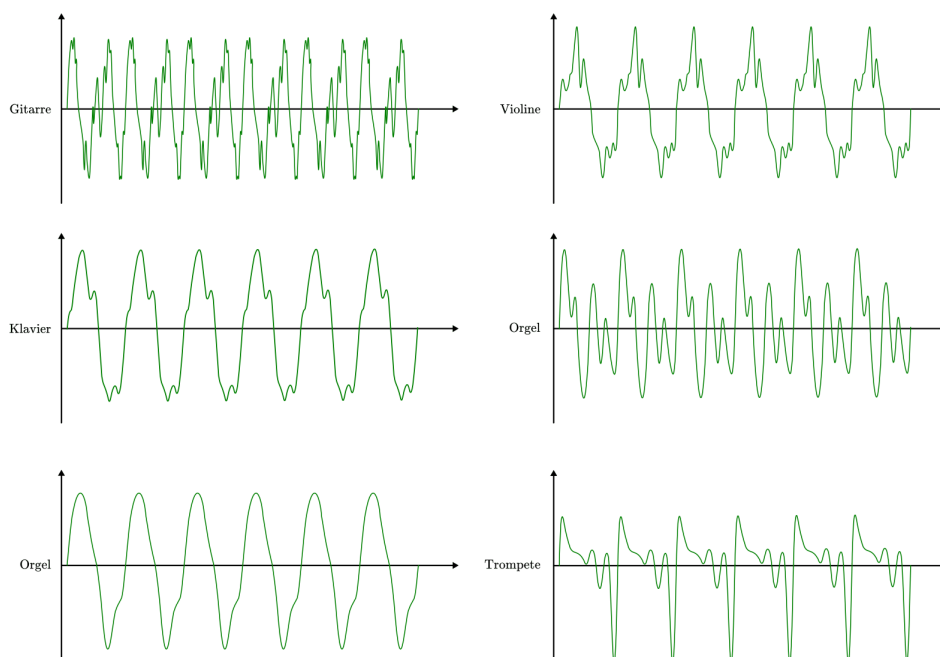


Abb. 99: Beispielhafte Klangmuster verschiedener Instrumente.

Die für jeden Gegenstand und jedes Musikinstrument typischen Vielfachen der Grundtonfrequenz werden „Obertöne“ genannt und sorgen für die charakteristischen „Klangfarben“ verschiedener Instrumente. Beispielsweise klingen eine Violine und ein Klavier deutlich unterschiedlich, auch wenn beide „gestimmt“ sind und auf beiden Instrumenten der gleiche Grundton gespielt wird.²³

Anzumerken ist, dass die Klangmuster der dargestellten Instrumente selbst keinesfalls „regelmäßig“ sind: Alleine bei einem einzelnen gespielten Ton a' finden je Sekunde 440 volle Schwingungsvorgänge statt, von denen jeder einzelne etwas unterschiedlich aussieht.

- Geräusche:

Geräusche setzen sich ebenfalls aus mehreren Tönen zusammen; allerdings überwiegen dabei „chaotische“, d.h. nicht periodische Schwingungsmuster. Bei einem ‚Knall‘ ist dies ebenfalls der Fall, mit dem Unterschied, dass die Lautstärke des Geräusches dabei sehr rasch abnimmt.

Schallintensität und Schallpegel

Als mechanische Welle überträgt Schall zwar keine Materie, aber Energie. Der Energiefluss je Zeit wird, entsprechend der Definition der mechanischen Leistung, als Schall-Leistung P_s bezeichnet.

Definition:

Die Schallintensität I_s gibt an, wie groß die Schall-Leistung ist, die auf einer Fläche A auftrifft:

$$I_s = \frac{P_s}{A}$$

Die Schallintensität wird in der Einheit $\frac{W}{m^2}$ angegeben.

Beispiel:

- Ein in ein Gehäuse verbauter Lautsprecher sendet eine Schall-Leistung von $P_s = 0,4\text{ W}$ aus. Wie groß ist die Schallintensität in einer Entfernung von $r = 0,5\text{ m}$ vom Lautsprecher?

² Bei der Erstellung der in der Abbildung dargestellten Klangmuster wurden die Programme [Musescore](#) und [Audacity](#) verwendet:

- In [Musescore](#) wurde für unterschiedliche Instrumente jeweils eine Partitur mit nur einem einzigen Ton (a) erzeugt; diesen wurde dann als `.wav`-Dateien exportiert.
- In [Audacity](#) wurden die einzelnen `.wav`-Dateien geöffnet und die Stereo-Spuren über den entsprechenden Eintrag im „Spuren“-Menü in eine einzige Mono-Spur umgewandelt. Anschließend genügte ein Hineinzoomen und Aufnehmen von Screenshots als Vorlage.

³ Im musikalischen Bereich wird üblicherweise nicht explizit auf die Obertöne eines Instruments eingegangen – stattdessen wird stets der jeweils gespielte Grundton als „Ton“ bezeichnet. Ein Klang, beispielsweise ein „Dreiklang“, setzt sich für einen Musiker entsprechend aus mehreren gleichzeitig klingenden (Grund-)Tönen zusammen und wird daher meist als Synonym für das Wort „Akkord“ genutzt.

Lautsprecher erzeugen normalerweise kugelförmige Schallwellen. Ist der Lautsprecher in ein Gehäuse verbaut, so kann angenommen werden, dass er nur in die vor ihm liegende Raumhälfte Schall aussendet. Die gesamte Schall-Leistung von $P_s = 0,4 \text{ W}$ verteilt sich also auf immer größer werdende Halbkugel-Flächen.

Da die Oberfläche einer Kugel allgemein $4 \cdot \pi \cdot r^2$ beträgt, entspricht die Oberfläche einer Halbkugel $A = 2 \cdot \pi \cdot r^2$. Für die Schallintensität I_s ergibt sich mit $r = 0,5 \text{ m}$ somit:

$$I = \frac{P_s}{A} = \frac{0,4 \text{ W}}{2 \cdot \pi \cdot (0,5 \text{ m})^2} \approx 0,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Wie man am obigen Beispiel sehen kann, nimmt die Schallintensität quadratisch mit dem Abstand r von der Schallquelle ab, es ist also $I(r) \propto \frac{1}{r^2}$.

Die Schall-Leistung P_s , die vom Ohr wahrgenommen wird, kann wiederum mittels der Schallintensität $I = \frac{P_s}{A}$ berechnet werden, indem man diese mit der Fläche A des Gehöreingangs multipliziert; beim menschlichen Ohr beträgt die effektiv wirksame Fläche des Trommelfells etwa $55 \text{ mm}^2 = 55 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

Menschliche Ohren haben folgenden Wahrnehmungsbereich:

- Die minimale wahrnehmbare Schall-Leistung wurde bei Tests mit unterschiedlichen Versuchspersonen als $P_{\min} \approx 1 \cdot 10^{-12} \text{ W}$ ermittelt.
- Die maximale wahrnehmbare Schall-Leistung beträgt rund $P_{\max} \approx 1 \text{ W}$; bei noch größeren Schall-Leistungen können Schmerzen und irreparable Schäden auftreten.

Der große Wahrnehmungsbereich des menschlichen Ohres (12 Größenordnungen!) hat dazu geführt, dass zur Messung der Lautstärke eine **logarithmische** Skala eingeführt wurde, die nach **Alexander Graham Bell** benannt ist:

Definition:

Die Lautstärke von Schall kann anhand des so genannten Schall-Leistungs-Pegels gemessen, der folgendermaßen definiert ist:

$$L_W = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P}{P_{\min}} \right)$$

Der Schall-Leistungs-Pegel hat keine Einheit; dennoch wird der sich ergebende Zahlenwert zur besseren Übersichtlichkeit mit Dezibel (dB) bezeichnet.

Beispiele:

- Welcher Schall-Leistungs-Pegel liegt vor, wenn die vom menschlichen Ohr empfangene Schall-Leistung den Wert $P_{\min} = 10^{-12} \text{ W}$ hat?

Für $P = P_{\min}$ ergibt im Logarithmus der Wert 1 als Argument. Da man jede Zahl mit 0 potenzieren muss, um den Wert 1 zu erhalten, ergibt der Logarithmus für diesen Wert den Wert 0. Für die Lautstärke der empfangenen Schall-Leistung P_{\min} gilt somit:

$$L_W = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{\min}}{P_{\min}} \right) = 10 \cdot \log_{10} (1) = 10 \cdot 0 = 0 \text{ dB}$$

- Welcher Schall-Leistungs-Pegel liegt vor, wenn die vom menschlichen Ohr empfangene Schall-Leistung den Wert $P_{\max} = 1 \text{ W}$ hat?

Für $P = P_{\max}$ ergibt im Logarithmus der Wert 10^{12} als Argument. Da man die Zahl 10 mit 12 potenzieren muss, um den Wert 10^{12} zu erhalten, ergibt der Logarithmus für diesen Wert den Wert 12. Für die Lautstärke der empfangenen Schall-Leistung P_{\max} gilt somit:

$$L_W = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{\max}}{P_{\min}} \right) = 10 \cdot \log_{10} (10^{12}) = 10 \cdot 12 = 120 \text{ dB}$$

- Welcher Schall-Leistungs-Pegel wirkt auf ein menschliches Ohr, wenn es Schall von einem Lautsprecher mit einer Schall-Leistung von $P_s = 0,4 \text{ W}$ in einer Entfernung von $r = 0,5 \text{ m}$ wahrnimmt?

Wie im obigen Beispiel gezeigt, hat die Schallintensität im Abstand von $0,5 \text{ m}$ den Wert $I = 0,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Auf die Fläche $A = 55 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ des Trommelfells wirkt somit folgende Schall-Leistung ein:

$$P = I \cdot A = 0,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 55 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 1,375 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

Diese Schall-Leistung entspricht folgendem Schall-Leistungs-Pegel:

$$L_W = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P}{P_{\min}} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1,375 \cdot 10^{-5} \text{ W}}{1 \cdot 10^{-12} \text{ W}} \right) = 10 \cdot \log_{10} (1,375 \cdot 10^7) \approx 71,4 \text{ dB}$$

Die Schallpegel-Skala bildet also den normalen Hörbereich des Menschen auf einen Zahlenbereich zwischen 0 und 120 ab; Alltagsgeräusch haben Schallpegel von etwa 30 dB bis 80 dB, ein normales Gespräch erzeugt in 1 m Entfernung einen Schallpegel von circa 60 dB.

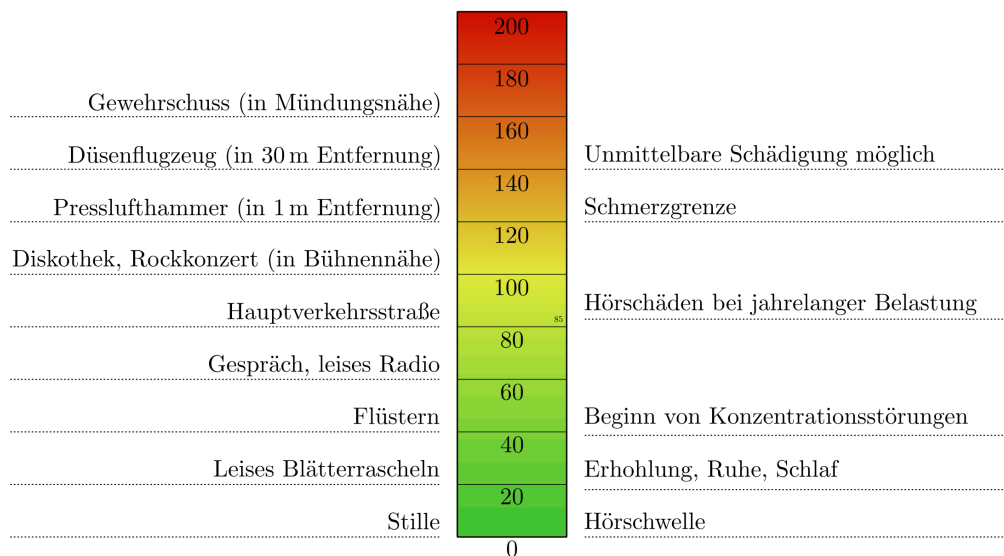


Abb. 100: Schallpegel in Dezibel. Der Schallpegel hängt stets von der Entfernung zwischen der Schallquelle und dem Ohr beziehungsweise Messgerät ab.

Da es sich bei der Dezibel-Skala um eine logarithmische Skala handelt, bedeutet eine doppelte Leistung der Schallquelle keinesfalls auch eine Verdopplung des Dezibel-Werts. Vielmehr gilt in diesem Fall:

$$\begin{aligned}
 P_2 = 2 \cdot P_1 \quad \Leftrightarrow \quad L_{W,2} &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_{\min}} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{2 \cdot P_1}{P_{\min}} \right) \\
 &= 10 \cdot \left(\log_{10} \left(\frac{P_1}{P_{\min}} \right) + \log_{10} (2) \right) \\
 &\approx 10 \cdot \left(\log_{10} \left(\frac{P_1}{P_{\min}} \right) + 0,301 \right) = L_{W_1} + 3,01 \text{ dB}
 \end{aligned}$$

Eine Verdoppelung der Leistung einer Schallquelle bewirkt also lediglich eine Zunahme des Schallpegels um $\Delta L_W \approx 3,0 \text{ dB}$. Ein derartiger Unterschied ist deutlich hörbar, kleinere Schallpegel-Differenzen von nur 1 dB bis 2 dB sind meist nur bei direktem Vergleich erkennbar.

Lautstärke bei unterschiedlichen Frequenzen

Mittels der Dezibel-Skala lassen sich die menschlich wahrgenommenen Lautstärken von Tönen nur dann vergleichen, wenn diese die gleiche Frequenz haben: Das menschliche Gehör reagiert nämlich auf unterschiedliche Schallfrequenzen unterschiedlich sensibel.

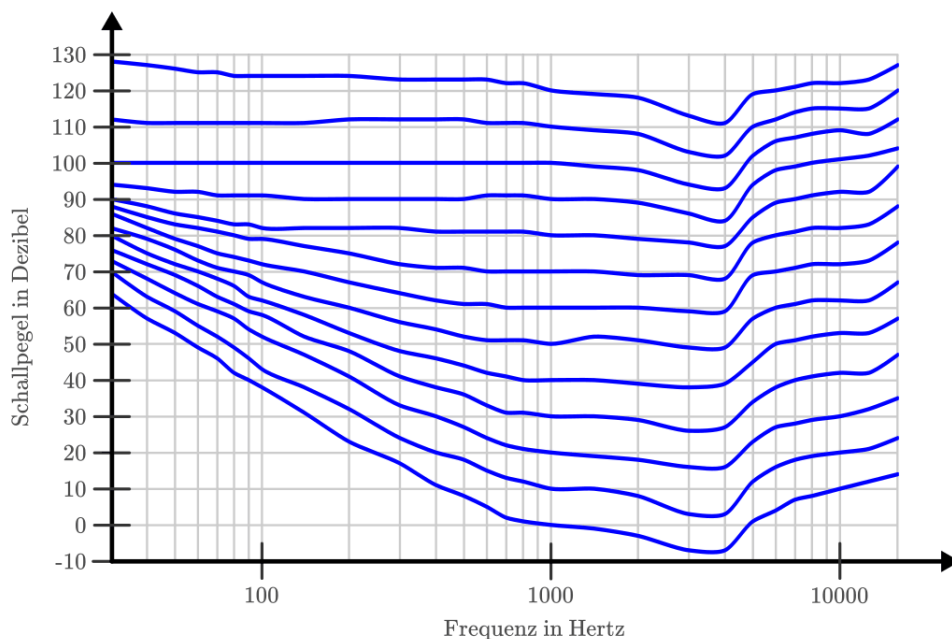


Abb. 101: Schallpegel in Dezibel, die bei unterschiedlichen Frequenzen als gleich laut empfunden werden.

Die Richtwerte für die Dezibel-Skala wurden bei einer Schallfrequenz von $f = 1000 \text{ Hz}$ bestimmt. In der Abbildung *Isophone Lautstärkepegel* stellt die unterste Kurve die minimale Lautstärke dar, ab der Töne wahrgenommen werden können; bei $f = 1000 \text{ Hz}$ entspricht dies gerade dem Wert $L_W = 0 \text{ dB}$. Bei einem Frequenzwert von $f = 400 \text{ Hz}$ gibt die Kurve

einen Wert von $L_W \approx 10$ dB an, was bedeutet, dass bei dieser Frequenz der Schallpegel um +10 dB höher sein muss, damit der Ton überhaupt gehört werden kann – dies erfordert wiederum eine 10-fach höhere Schall-Leistung P_s .

Dass Menschen Töne mit niedrigen Schallfrequenzen weniger intensiv wahrnehmen, hat zur Folge, dass Basslautsprecher so konstruiert werden, dass sie hohe Schall-Leistungen abstrahlen können; Hochton-Lautsprecher kommen entsprechend mit nur kleinen Schall-Leistungen aus. Am empfindlichsten ist das menschliche Gehör bei Frequenzen im Bereich von 3000 Hz bis 4000 Hz: In diesem Bereich genügen dem Ohr bereits empfangene Leistungen von weniger als $P_s = 10^{-12}$ W, um Schall wahrnehmen zu können.

Gibt man eine Lautstärke unter Berücksichtigung der in Abbildung *Isophone Lautstärkepegel* dargestellten Hörkurven an, so schreibt man dabei „Phon“ anstelle von „Dezibel“ als Einheit. Zu berücksichtigen ist dabei, dass es sich auch bei einer „Phon“-Angabe um einen reinen Zahlenwert handelt, der nur der Kenntlichkeit halber mit Phon benannt ist.

Doppler-Effekt

Bewegen sich eine Schallquelle und/oder ein Schallempfänger aufeinander zu, so tritt der nach **Christian Doppler** benannte Doppler-Effekt auf. Aus dem Alltag kennt man zum Beispiel die Erfahrung, dass ein sich näherndes Fahrzeug Töne mit zunehmender Frequenz von sich gibt, während die Töne eines sich entfernenden Fahrzeugs zunehmend tiefer werden.

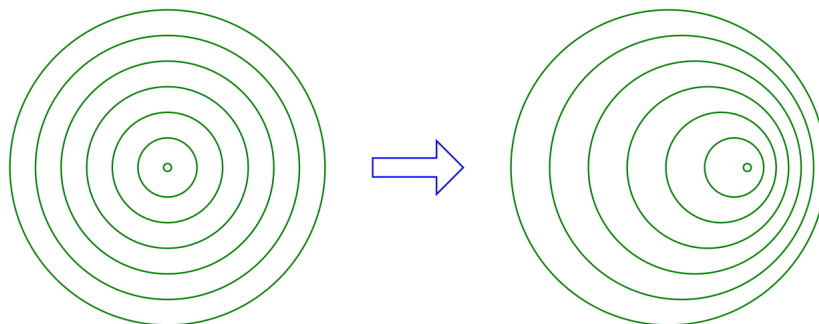


Abb. 102: Doppler-Effekt: Schallausbreitung einer sich bewegenden Schallquelle

Wie man in der obigen Abbildung erkennen kann, werden die Abstände zwischen den einzelnen ankommenden Schallwellen und somit die Wellenlängen λ kürzer, wenn sich die Schallquelle auf den Beobachter zubewegt (der Beobachter sich also am rechten Bildrand befindet). Umgekehrt erscheinen die Wellenlängen als länger, wenn sich die Schallquelle vom Beobachter wegbewegt (der Beobachter sich also am linken Bildrand befindet).

Bewegte Schallquelle, ruhender Beobachter

Da die Schallgeschwindigkeit v_{Schall} während des Vorgangs konstant bleibt, muss sich gemäß der Wellenformel mit einer Änderung der Wellenlänge λ auch die Schallfrequenz f ändern:

$$v_{\text{Schall}} = \lambda \cdot f \iff f = \frac{v_{\text{Schall}}}{\lambda}$$

Nimmt der Beobachter bei einer sich nähernden Schallquelle eine verringerte Wellenlänge λ wahr, so muss sich folglich die wahrgenommene Frequenz f vergrößern. Quantitativ kann dieser Zusammenhang folgendermaßen beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{Beobachter}} &= \lambda_{\text{Sender}} + \Delta\lambda \\ \lambda_{\text{Beobachter}} &= \lambda_{\text{Sender}} - \frac{v_{\text{Sender}}}{f_{\text{Sender}}}\end{aligned}$$

Möchte man den Einfluss auf die vom Beobachter empfangene Schallfrequenz bestimmen, so muss auch $\lambda_{\text{Beobachter}} = \frac{v_{\text{Schall}}}{f_{\text{Beobachter}}}$ und $\lambda_{\text{Sender}} = \frac{v_{\text{Schall}}}{f_{\text{Sender}}}$ gesetzt werden:

$$\frac{v_{\text{Schall}}}{f_{\text{Beobachter}}} = \frac{v_{\text{Schall}}}{f_{\text{Sender}}} - \frac{v_{\text{Sender}}}{f_{\text{Sender}}} \quad (100)$$

Diese Gleichung kann nach $f_{\text{Beobachter}}$ aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}\frac{v_{\text{Schall}}}{f_{\text{Beobachter}}} &= \frac{1}{f_{\text{Sender}}} \cdot (v_{\text{Schall}} - v_{\text{Sender}}) \\ f_{\text{Beobachter}} &= \frac{v_{\text{Schall}}}{v_{\text{Schall}} - v_{\text{Sender}}} \cdot f_{\text{Sender}}\end{aligned} \quad (101)$$

Das Minus-Zeichen in der obigen Gleichung gilt für eine sich nähernde Schallquelle; entfernt sich die Schallquelle vom Beobachter, so gilt die obige ebenfalls, wenn das Minus-Zeichen durch ein Plus-Zeichen ersetzt wird.

Beispiel:

- Welche Frequenz wird von einem Beobachter wahrgenommen, wenn sich eine Schallquelle, die eine Frequenz von $f_{\text{Sender}} = 440 \text{ Hz}$ aussendet, mit einer Geschwindigkeit von $v_{\text{Sender}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf den Beobachter zu- beziehungsweise wegbewegt?

Im ersten Fall gilt nach Gleichung (101) mit $v_{\text{Schall}} \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$f_{\text{Beobachter}} = \frac{v_{\text{Schall}}}{v_{\text{Schall}} - v_{\text{Sender}}} \cdot f_{\text{Sender}} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(340 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 440 \text{ Hz} \approx 453,3 \text{ Hz}$$

Im zweiten Fall muss das Minus-Zeichen der oberen Gleichung durch ein Plus-Zeichen ersetzt werden. Damit ergibt sich:

$$f_{\text{Beobachter}} = \frac{v_{\text{Schall}}}{v_{\text{Schall}} + v_{\text{Sender}}} \cdot f_{\text{Sender}} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(340 + 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 440 \text{ Hz} \approx 427,4 \text{ Hz}$$

Rotiert ein Lautsprecher wie beispielsweise im Leslie einer Hammond-Orgel kontinuierlich, so wird dadurch ebenfalls eine Frequenz-Schwingung um den eigentlich gespielten Ton hervorgerufen.

Bewegte Schallquelle und bewegter Beobachter

Bewegt sich nicht nur die Schallquelle mit einer Geschwindigkeit v_{Sender} , sondern gleichzeitig auch der Beobachter mit der Geschwindigkeit $v_{\text{Beobachter}}$, so muss auch diese Bewegung nach dem gleichen Prinzip in Gleichung (100) berücksichtigt werden.

Bewegt sich der Beobachter auf die ihrerseits näher kommende Schallquelle zu, so gilt:

$$\frac{v_{\text{Schall}}}{f_{\text{Beobachter}}} = \frac{v_{\text{Schall}}}{f_{\text{Sender}}} - \frac{v_{\text{Sender}}}{f_{\text{Sender}}} - \frac{v_{\text{Beobachter}}}{f_{\text{Beobachter}}}$$

Diese Gleichung kann wiederum nach $f_{\text{Beobachter}}$ aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{Schall}}}{f_{\text{Beobachter}}} + \frac{v_{\text{Beobachter}}}{f_{\text{Beobachter}}} &= \frac{v_{\text{Schall}}}{f_{\text{Sender}}} - \frac{v_{\text{Sender}}}{f_{\text{Sender}}} \\ \frac{1}{f_{\text{Beobachter}}} \cdot (v_{\text{Schall}} + v_{\text{Beobachter}}) &= \frac{1}{f_{\text{Sender}}} \cdot (v_{\text{Schall}} - v_{\text{Sender}}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende allgemeinere Formel für den Doppler-Effekt:

$$f_{\text{Beobachter}} = \frac{v_{\text{Schall}} + v_{\text{Beobachter}}}{v_{\text{Schall}} - v_{\text{Sender}}} \cdot f_{\text{Sender}} \quad (102)$$

Die Vorzeichen in der obigen Formel gelten für sich aufeinander zu bewegende Schallquellen und Beobachter. Bewegt sich der Beobachter von der ursprünglichen Position der Schallquelle weg, so muss im Zähler ein Minus-Zeichen gesetzt werden; entfernt sich die Schallquelle vom ursprünglichen Ort des Beobachters, so muss im Zähler ein Plus-Zeichen gesetzt werden.

Schallmauer und Mach-Kegel

Mit einer zunehmenden Relativ-Geschwindigkeit der Schallquelle gegenüber dem Beobachter wird auch der Doppler-Effekt immer ausgeprägter. Eine Besonderheit ergibt sich, wenn sich die Geschwindigkeit der Schallquelle v_{Sender} der Schallgeschwindigkeit v_{Schall} annähert.

Erreicht die Schallquelle die Geschwindigkeit $v_{\text{Sender}} = v_{\text{Schall}}$, so überlagern sich die von der Schallquelle ausgesendeten Schallwellen konstruktiv mit jenen, die sie bereits vorher ausgesendet hatte. Für die Schallquelle bedeutet dies einen erheblichen „Wellenberg“ (ein ein Maximum an Luftdruck), der zum weiteren Beschleunigen überwunden werden muss; Überschall-Flugzeuge müssen also beim „Durchbrechen der Schallmauer“ erhebliche mechanische Belastungen aushalten; mit Überschallgeschwindigkeit nimmt der Luftwiderstand zunächst wieder ab.¹

Für Beobachter auf dem Boden ist die Situation eine andere: Sie hören einen heftigen Knall, wenn sie vom nach **Ernst Mach** benannten „Mach-Kegel“ gestreift werden. Dieser

¹ Wird eine Geschwindigkeit v als Vielfaches der Schallgeschwindigkeit ausgedrückt, so bezeichnet man den sich ergebenden Wert als „Mach-Zahl“. Eine Geschwindigkeit von $v = 1$ Mach ist also mit der Schallgeschwindigkeit $v_{\text{Schall}} \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ identisch.

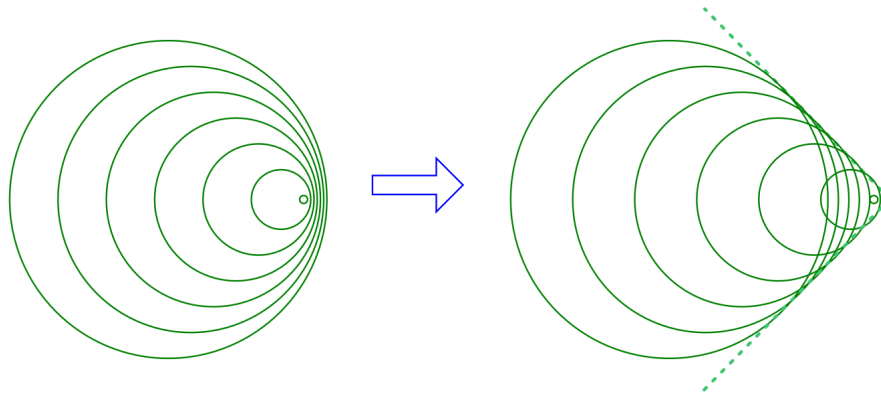


Abb. 103: Doppler-Effekt und Mach-Kegel: Schallausbreitung mit $v_{\text{Sender}} < v_{\text{Schall}}$ beziehungsweise $v_{\text{Sender}} > v_{\text{Schall}}$.

Kegel entspricht der einhüllenden Kurve der (rechts in Abbildung *Doppler-Effekt und Mach-Kegel* gestrichelt dargestellt) kugelförmigen Schallwellen.² Der Knall ist also nicht nur in dem Moment beziehungsweise in der Nähe der Stelle hörbar, wenn das Flugzeug die Schallmauer durchbricht, sondern während der gesamten Dauer des Überschall-Fluges an jeder Stelle, die vom Mach-Kegel gestreift wird.

² Boote, die sich schnell über das Wasser bewegen, ziehen ebenfalls einen „flachen Kegel“ an Wellen hinter sich her. Einen Mach-Kegel kann man sich ähnlich vorstellen, nur eben dreidimensional. Je höher die Geschwindigkeit des Bootes beziehungsweise Überschallflugzeugs ist, desto „schmäler“ und „länger“ wird der Kegel.

Optik

In der Optik werden die vielfältigen Erscheinungen des Lichts und ihr Nutzen in optischen Hilfsmitteln untersucht.

Ausbreitung des Lichts

Als Licht werden elektromagnetische Wellen bezeichnet, die im Empfindlichkeitsbereich des menschlichen Auges liegen. Das für den Menschen sichtbare Licht besitzt eine Wellenlänge von 400 nm (violett) bis 700 nm (rot).

Lichtquellen

Objekte, die selbständig Licht erzeugen und aussenden, heißen selbstleuchtende Objekte oder Lichtquellen.¹ Die meisten Objekte (in der Optik meist „Gegenstände“ genannt) erzeugen selbst kein Licht, sind aber trotzdem sichtbar. Sie werfen einen Teil des auf sie fallenden Lichts zurück. Man nennt sie reflektierende oder beleuchtete Gegenstände.

Gelangt Licht von einem leuchtenden oder beleuchteten Gegenstand in unser Auge, so wird dieser sichtbar. Licht, das nicht in unser Auge fällt, ist unsichtbar (das Weltall erscheint uns deshalb schwarz).

Beispiele:

- *Selbstleuchtende* Objekte:

Sonne, Sterne, Feuer, Glüh- und Leuchtstofflampen, Kerzen, Glühwürmchen, LEDs usw.

- *Beleuchtete* Objekte:

Erde und Mond, Planeten, Gegenstände (Satelliten, Reflektoren, Staubkörnchen usw.)

Das Licht breitet sich von der Lichtquelle – solange es auf kein Hindernis trifft – geradlinig und in alle Richtungen aus:

¹ Licht entsteht grundsätzlich durch die Anregung von Atomen mittels Energie. Die zugeführte Energie kann thermisch oder elektrisch sein; im ersten Fall spricht man „warmen“, im zweiten von „kalten Lichtquellen“.

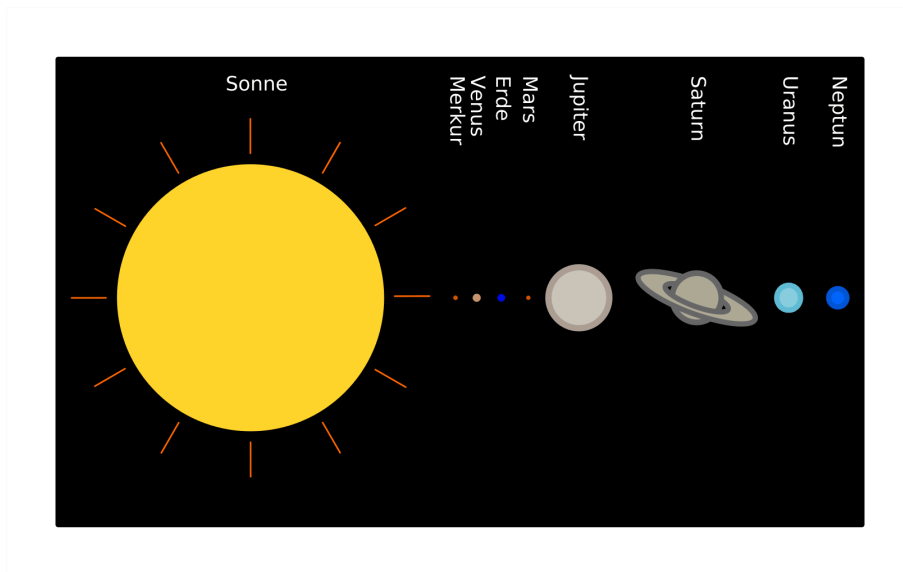


Abb. 104: Sonnenstrahlen als Lichtquelle unseres Universums.

- Sonnenlicht erhellt alle Himmelskörper, egal in welcher Richtung von der Sonne sie sich befinden.
- Eine Kerze in der Mitte des Zimmers beleuchtet alle Wände sowie die Decke und den Fußboden.

Die Lichtgeschwindigkeit

In Vakuum (und näherungsweise auch in Luft) kann sich Licht mit etwa 300 000 Kilometer je Sekunde ausbreiten („Lichtgeschwindigkeit“). In anderen lichtdurchlässigen Stoffen ist die Lichtgeschwindigkeit geringer, in Wasser kann sich Licht beispielsweise „nur“ mit etwa 225 000 Kilometer je Sekunde ausbreiten.²

Tab. 12: Werte der Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Stoffen

Medium	Lichtgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$
Vakuum	300 000
Luft	300 000
Wasser	225 000
Quarz	194 000
Glas	190 000
Diamant	122 000

Könnten wir uns mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen, so könnten wir die Erde (Umfang am Äquator: ca. 40 000 km) in einer Sekunde 7,5 mal umkreisen. Im Universum hat das Licht allerdings so große Entfernungen zurückzulegen, dass man Weglängen teilweise

² Die in der obigen *Tabelle Lichtgeschwindigkeiten* angegebenen Werte sind Durchschnittswerte für sichtbares Licht. Tatsächlich hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in einem Medium von seiner Frequenz ab (siehe *Lichtdispersion*).

auch in Lichtsekunden, Lichtminuten, Lichtstunden, Lichttagen oder sogar Lichtjahren angibt. Um von der Sonne auf die Erde zu gelangen, braucht ein Lichtstrahl rund 8,3 Lichtminuten.

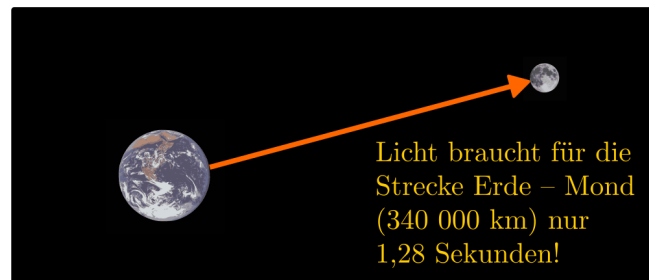


Abb. 105: Ein von der Erde ausgesandter Lichtstrahl erreicht den Mond rund eine Sekunde später.

Licht- und Beleuchtungsstärke

Um die Helligkeit verschiedener Lichtquellen vergleichen zu können, wurde die Lichtstärke als physikalische Größe eingeführt. Erscheint eine Lichtquelle aus gleicher Entfernung heller als eine andere, so besitzt sie eine größere Lichtstärke.

Definition und Einheit:

Die Lichtstärke I_ν ist eine Basisgröße des internationalen Einheitensystems. Ihre Einheit ist das Candela (cd).

Beispiele:

- Eine Kerzenflamme hat eine Lichtstärke von etwa 1 cd.
- Glühlampen haben eine Lichtstärke (je nach Bauart) von 15 cd bis 150 cd.
- Autoscheinwerfer haben eine Lichtstärke von rund 50000 cd.

Während die Lichtstärke I_ν eine Eigenschaft der Lichtquelle ist, gibt die Beleuchtungsstärke E_ν an, welcher Anteil des Lichts auf eine bestimmte Fläche trifft.

Da sich das Licht gleichmäßig in alle Richtungen ausbreitet, verteilen sich die Lichtstrahlen auf immer größere Flächen. Die Beleuchtungsstärke nimmt in gleichem Maß ab, wie die Oberfläche der mit Licht durchfluteten (Kugel-)Fläche zunimmt.

Formel und Einheit:

Die Beleuchtungsstärke E_ν ist umso größer, je größer die Lichtstärke I_ν der Lichtquelle ist. Gleichzeitig nimmt die Beleuchtungsstärke quadratisch mit dem Abstand r von der Lichtquelle ab. Insgesamt gilt:

$$E_\nu = \frac{I_\nu}{r^2}$$

Die Beleuchtungsstärke wird in Lux (lx) angegeben.

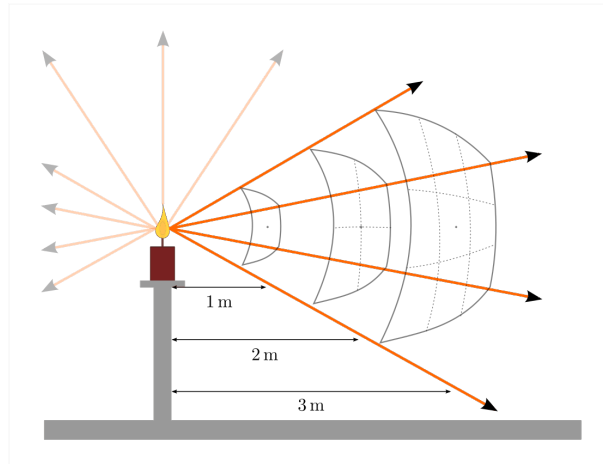


Abb. 106: Die Beleuchtungsstärke in Abhängigkeit des Abstands von der Lichtquelle.

Je nach Tätigkeit werden unterschiedliche Beleuchtungsstärken als angenehm empfunden.

Beispiele:

- Eine Kerzenflamme hat in 1 m Abstand eine Beleuchtungsstärke von etwa 1 lx aufweisen.
- Verkehrswege sollten eine Beleuchtungsstärke von mindestens 30 lx aufweisen.
- Die empfohlene Beleuchtungsstärke beträgt für Wohnräume 100 lx bis 200 lx; in Büros sind auch Beleuchtungsstärken von 500 lx nicht unüblich.
- Die empfohlene Beleuchtungsstärke zum Lesen und Schreiben liegt bei 200 lx bis 300 lx.

Sonnenlicht kann im Sommer eine Beleuchtungsstärke von bis 100 000 lx hervorrufen, an einem trüben Wintertag nur etwa 2000 lx bis 4000 lx. Das Licht eines Vollmondes bei klarer Nacht hat lediglich eine Beleuchtungsstärke von rund 0,3 lx.

Die Lichtdurchlässigkeit

Licht durchlässige Gegenstände gibt es auf zweierlei Arten:

- Durchsichtige Objekte (beispielsweise Fensterglas) lassen Licht so hindurch, dass Gegenstände hinter ihnen zu erkennen sind.
- Durchscheinende Objekte (beispielsweise Mattglas) lassen Licht so hindurch, dass Gegenstände hinter ihnen nicht zu erkennen sind.

Die Lichtdurchlässigkeit eines Objekts hängt vom Material und von der Schichtdicke ab. Wasser beispielsweise ist in dünnen Schichten Licht durchlässig, in dicken nicht; in großen Meerestiefen herrscht völlige Dunkelheit.

Licht undurchlässige Gegenstände (beispielsweise Metall, Karton usw.) lassen kein Licht hindurch, sie sind undurchsichtig – vorausgesetzt, dass sie eine ausreichende Materialstärke aufweisen. Beispielsweise sind sehr dünne Papierschichten durchscheinend, obwohl Papier an sich undurchsichtig ist.

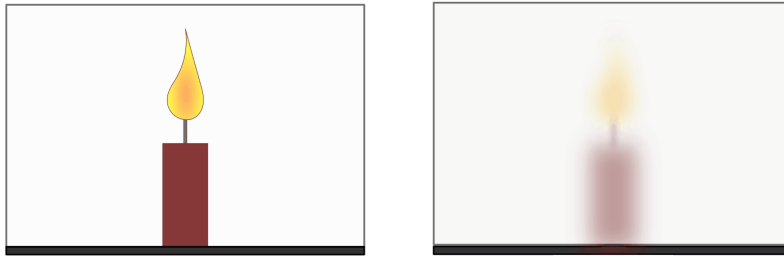


Abb. 107: Eine Kerze hinter einer durchsichtigen beziehungsweise durchscheinenden Scheibe.

Blenden und Schatten

Durch Licht undurchlässige Gegenstände kann die Ausbreitung des Lichts begrenzt werden.

Die Blende

Eine Blende ist eine kleine, meist runde Öffnung in einem ansonsten undurchsichtigen Gegenstand. Durch eine Blende gelangt nur ein Teil des Lichts, ein „Lichtbündel“, hindurch. Dieses Lichtbündel kann zeichnerisch durch die Bündelachse und Randstrahlen dargestellt werden.

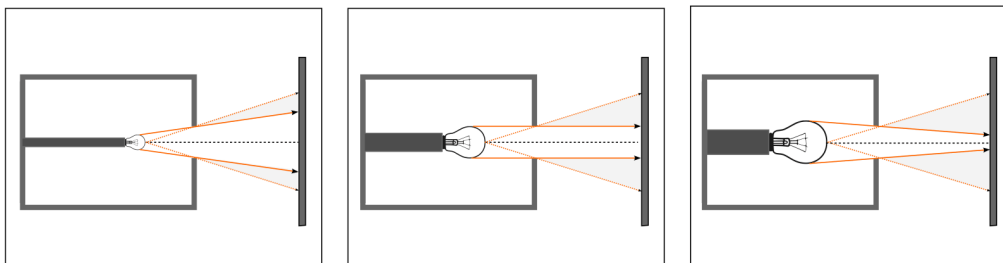


Abb. 108: Entstehung von Lichtbündeln durch eine Blende.

Der Schlagschatten

Wird ein undurchsichtiger Gegenstand von einer kleinen (punktförmigen) Lichtquelle beleuchtet, so entsteht auf der von der Lichtquelle abgewandten Seite ein Schatten.

Kern- und Halbschatten

Wird ein undurchsichtiger Gegenstand von zwei punktförmigen Lichtquellen beleuchtet, so bilden sich zwei Schattenzonen aus: Ein Kernschatten und ein Halbschatten. Eine

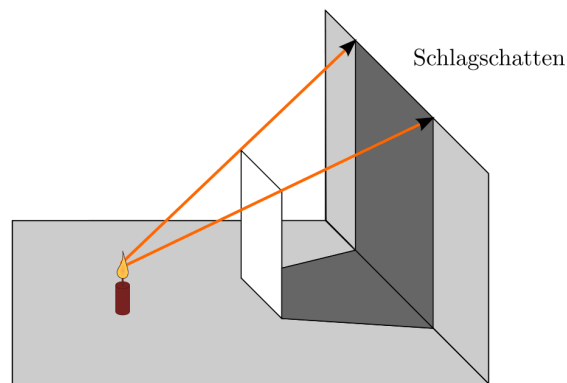


Abb. 109: Entstehung eines Schlagschattens.

ausgedehnte Lichtquelle erzeugt hinter einem Licht undurchlässigen Gegenstand ebenfalls einen Kern- und einen Halbschatten.³

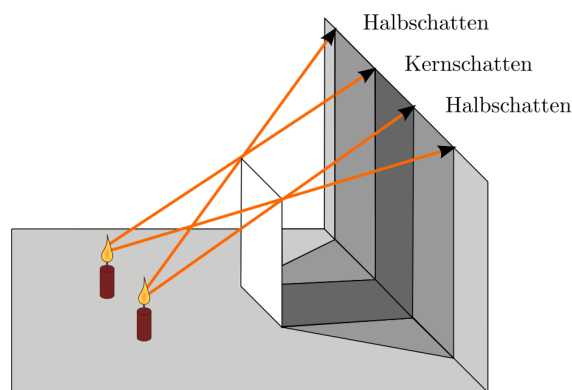


Abb. 110: Entstehung von Kern- und Halbschatten.

Bei einer „diffusen“ Beleuchtung kommt das Licht aus vielen Richtungen. Die einzelnen Schattenbereiche heben sich dabei gegenseitig auf; es ist kein Schatten erkennbar.

Da manche Menschen (insbesondere kleine Kinder) schreckhaft auf Schatten reagieren, wird in Wohn- und Aufenthaltsräumen häufig eine indirekte Beleuchtung eingesetzt. Diese wird mittels *diffuser Reflexion* erreicht, indem eine helle, matte Oberfläche von einer (verdeckten) Lampe angestrahlt wird.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

³ Ein Beobachter, der sich im Halbschatten befindet, sieht stets nur einen Teil der Lichtquelle; der Rest ist durch den Schatten werfenden Gegenstand verdeckt.

Reflexion von Licht

Gegenstände können, je nach Material und Art der Oberfläche, einen Teil des auf sie fallenden Lichts zurückwerfen. Diesen Vorgang nennt man Reflexion.

Wird (fast) das gesamte auf einen Gegenstand fallende Licht reflektiert, so spricht man von einer Spiegelung. Je nach Form und Struktur der spiegelnden Oberfläche unterscheidet man zwischen ebenen und gewölbten sowie zwischen glatten und rauhen Spiegeln.

Der ebene Spiegel

Jede glatte, ebene Fläche (beispielsweise eine glatte Metallplatte, eine ruhige Wasseroberfläche, eine Fensterscheibe usw.) wirkt wie ein ebener Spiegel. Während eine blank polierte Metalloberfläche das gesamte einfallende Licht zurückwirft, wird von Glas oder Wasser nur einen Teil des einfallenden Lichts reflektiert. Spiegel aus Glas sind daher gewöhnlich auf der Rückseite schwarz lackiert oder mit einer Licht undurchlässigen, dunklen Schicht versehen.

Das Reflexionsgesetz

Für ebene Spiegel gilt das Reflexionsgesetz: Jeder auftreffende Lichtstrahl verlässt den Spiegel im gleichen Winkel, wie er aufgetroffen ist.

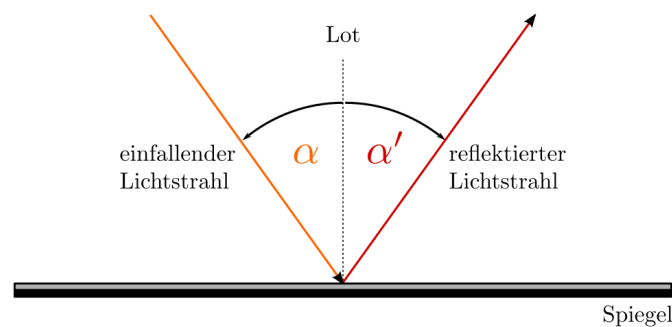


Abb. 111: Reflexion eines Lichtstrahls an einem ebenen Spiegel.

Der Einfallswinkel α und der Reflexionswinkel α' werden dabei ausgehend von der Senkrechten zum Spiegel angegeben. Mathematisch lässt sich das Reflexionsgesetz damit folgendermaßen formulieren:

$$\alpha = \alpha' \quad (103)$$

Vertauscht man in den Abbildungen *Reflexionsgesetz* beziehungsweise *Bildentstehung an einem ebenen Spiegel* den Ort des Auges mit dem Ort der Lichtquelle, so ändert sich das Versuchsergebnis nicht. Allgemein gilt in der Optik: Jeder Lichtstrahl kann seinen Weg stets auch in umgekehrter Richtung durchlaufen.

Bildentstehung am ebenen Spiegel

In einem Spiegel zeigt sich ein Bild der Gegenstände, die sich vor dem Spiegel befinden. Die entstehende Bild lässt sich zeichnerisch anhand des Reflexionsgesetzes (am besten mit Lineal und Winkelmesser) konstruieren.

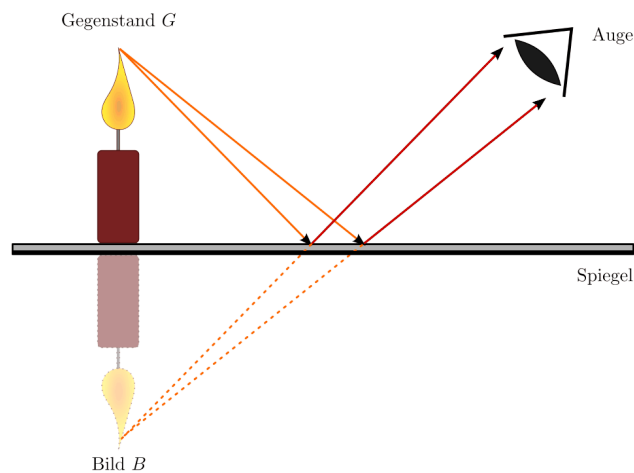


Abb. 112: Bildentstehung an einem ebenen Spiegel.

Lichtstrahlen, die von einem Punkt des Gegenstandes *G*, ausgehen, treffen unter verschiedenen Einfallswinkeln auf den Spiegel und werden nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen. Ein Teil der Strahlen gelangt in das Auge des Beobachters. Verlängert man diese Strahlen geradlinig nach hinten, so schneiden sie sich in einem Bildpunkt *B* hinter dem Spiegel. Für den Betrachter scheint das ins Auge fallende Licht von diesem Punkt auszugehen.

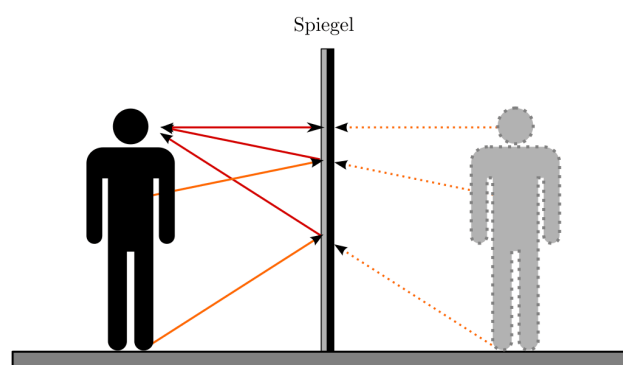


Abb. 113: Gegenstandsgröße und Bildgröße an einem ebenen Spiegel.

Insgesamt gilt somit für ebene Spiegel:

- Der Gegenstand und sein Bild liegen symmetrisch zur Spiegelfläche.
- Das Bild ist ebenso groß wie der Gegenstand.

Jeder Bildpunkt B liegt daher ebenso weit hinter dem Spiegel, wie der passende Gegenstandspunkt G vor ihm liegt.

Direkte und diffuse Reflexion

Die Reflexion von Lichtstrahlen an einem ebenen, glatten Spiegel wird direkte Reflexion genannt. Treffen Lichtstrahlen allerdings auf einen ebenen Spiegel mit einer rauhen Oberfläche, so spricht man von einer diffusen Reflexion: Das Licht wird, wie in Abbildung *Direkte und diffuse Reflexion* (rechtes Bild) nach dem Reflexionsgesetz in verschiedene Richtungen zurückgeworfen („gestreut“).

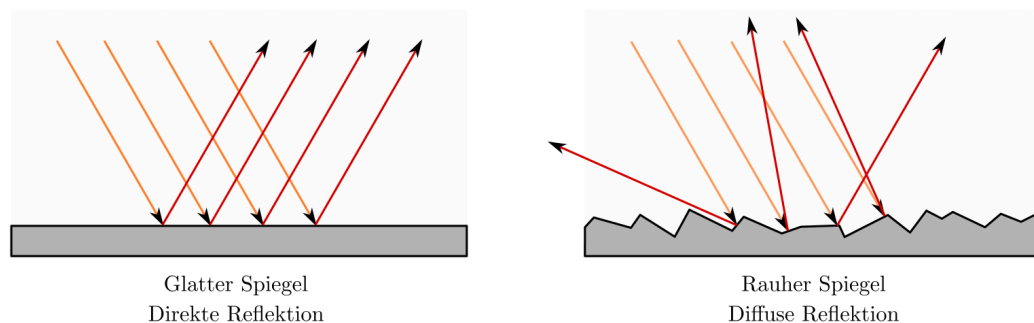


Abb. 114: Verlauf der Lichtstrahlen bei direkter und diffuser Reflexion.

Ein bekanntes Beispiel für diffuse Reflexion ist der matte Glanz von nicht blank polierten Metall-Oberflächen; fein verteilte Wassertropfen in der Luft (Wolken, Nebel) oder Eiskristalle im Schnee haben einen ähnlichen Effekt. Je kleiner die einzelnen Spiegelflächen einer rauhen Oberfläche sind, desto stärker wird das Licht gestreut – häufig ist dabei überhaupt kein Spiegelbild mehr erkennbar.

Gekrümmte Spiegel

Ist die Spiegelfläche gekrümmt, so gilt das Reflexionsgesetz für jede einzelne Stelle des Spiegels. Eine gute Vorstellung für einen gekrümmten Spiegel bietet eine Disko-Kugel, die mit zahlreichen kleinen Spiegelflächen das einfallende Licht kugelförmig in den Raum reflektiert.

Um die Entstehung der Bilder an einem gekrümmten Spiegel beschreiben zu können, verwendet man folgende Begriffe:

- Scheitelpunkt:

Der Mittelpunkt der spiegelnden Fläche wird Scheitelpunkt S genannt.

- Optische Achse:

Die Gerade, die senkrecht zur Spiegelebene verläuft und durch den Scheitelpunkt geht, heißt optische Achse. Alle Strahlen, die parallel zur optischen Achse verlaufen, werden Parallelstrahlen genannt.

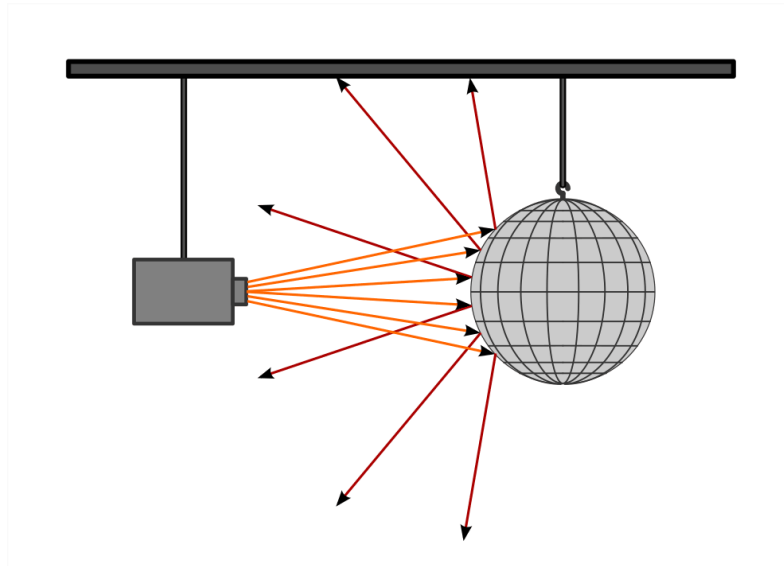


Abb. 115: Eine Disko-Kugel als Wölbspiegel.

- Brennpunkt (Fokus):

Alle auf den Spiegel treffenden Parallelstrahlen werden so reflektiert, dass sie sich in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt liegt auf der optischen Achse und heißt Brennpunkt (Fokus) F .

Der Abstand des Brennpunkts zum Scheitelpunkt wird Brennweite f genannt. Bei einem kugelförmigen Hohlspiegel ist die Brennweite f gleich der Hälfte der Strecke zwischen dem Mittelpunkt M und dem Scheitelpunkt S :

$$f = \frac{\overline{MS}}{2}$$

- Mittelpunkt:

Der Mittelpunkt M des Kreises, aus dem man sich den Wölbspiegel herausgeschnitten denken kann, liegt ebenfalls auf der optischen Achse. Strahlen, die auf der Innenseite des Kreises durch den Mittelpunkt gehen, werden stets auf sich selbst abgebildet.

Je nachdem, welche Seite eines gekrümmten Spiegels dem Licht zugewandt ist, unterscheidet man zwischen einem Wölb- und einem Hohlspiegel.

Bildentstehung an einem Wölbspiegel

Ein Wölbspiegel (auch „Konvexspiegel“ genannt) erzeugt stets aufrechte, verkleinerte Bilder. Nähert man einen Gegenstand an die Spiegelfläche an, so wird das Bild des Gegenstands größer, bleibt dabei jedoch kleiner als das Original.

Gegenstände werden von Wölbspiegeln so abgebildet, als würden sie in kleinerem Maßstab im Inneren des Spiegels befinden. Um den Ort eines Bildpunktes zu bestimmen, zeichnet

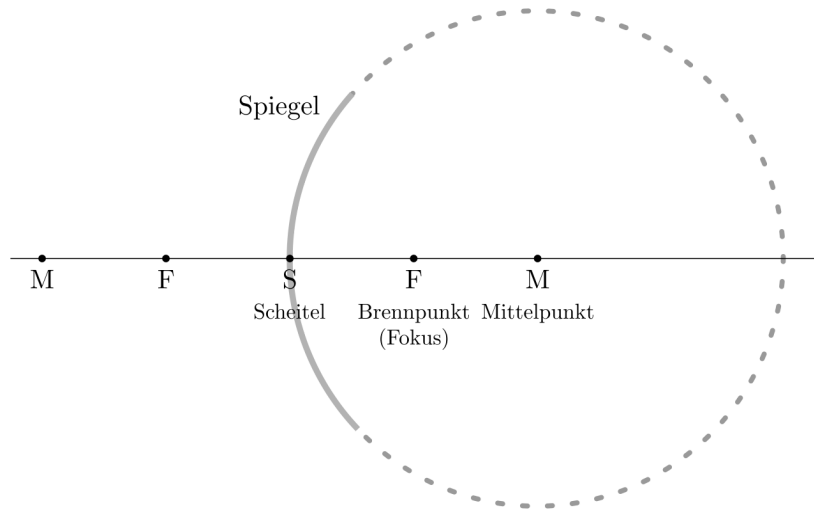


Abb. 116: Markante Punkte für die Bildentstehung an einem gekrümmten Spiegel.

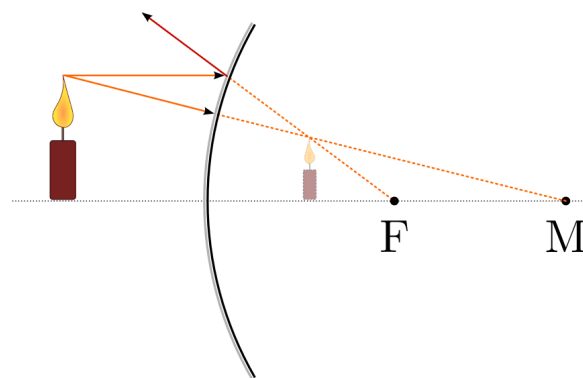


Abb. 117: Bildentstehung an einem Wölbspiegel.

man die vom entsprechenden Gegenstandspunkt ausgehenden Bildstrahlen auf der Rückseite des Spiegels weiter. Dabei muss man beachten, dass parallel einfallende Strahlen stets zum Brennpunkt F hin abgelenkt werden und Strahlen durch den Mittelpunkt M den Spiegel geradlinig durchlaufen. Die Lage des Bildes, das sich bei Betrachtung des Wölbspiegels ergibt, entspricht dem Schnittpunkt des Brennpunkt- und Mittelpunktstrahls.

Da die Abbildungen eines Wölbspiegels nicht nur aufrecht und verkleinert, sondern auch seitenrichtig sind, werden sie häufig (beispielsweise im Straßenverkehr) zum Überblicken eines größeren Raumbereichs eingesetzt. Sie erlauben dabei sogar einen „Blick um die Ecke“: Egal ob man in Abbildung *Bildentstehung an einem Wölbspiegel* von schräg oben oder unten auf den Spiegel blickt, die Lichtstrahlen scheinen immer vom verkleinerten Bild der Kerze auf der Rückseite des Spiegels zu stammen.

Bildentstehung an einem Hohlspiegel

Bei einem Hohlspiegel („Konkavspiegel“) hängen der Ort und die Größe des erscheinenden Bildes von der Entfernung des Gegenstands zum Scheitelpunkt des Spiegels ab:

- Nähert man einen Gegenstand vom Brennpunkt her einem Hohlspiegel, so nähert sich auch das Bild dem Hohlspiegel. Hohlspiegel erzeugen vergrößerte, aufrechte und seitenvertauschte Bilder der Gegenstände, wenn sie sich innerhalb der Brennweite befinden.

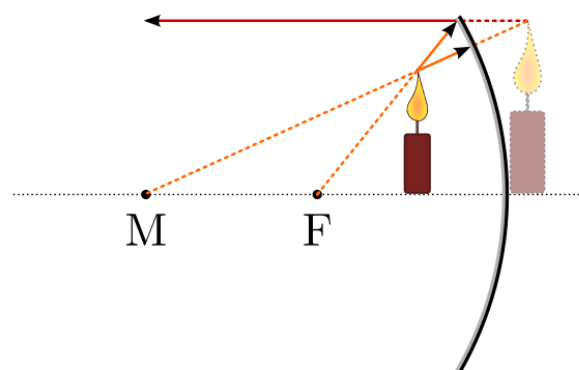


Abb. 118: Bildentstehung an einem Hohlspiegel (Gegenstand innerhalb der Brennweite).

Zur Konstruktion des Bildes zeichnet man die von einem Gegenstandspunkt ausgehenden Bildstrahlen in der umgekehrten Richtung weiter. Dabei muss man beachten, dass Brennpunktstrahlen zu Parallelstrahlen werden und Mittelpunktstrahlen stets senkrecht auf den Spiegel treffen und somit auf sich selbst abgebildet werden. Die Lage des Bildes entspricht dem Schnittpunkt des verlängerten Parallel- beziehungsweise Mittelpunktstrahls auf der Rückseite des Spiegels.

Aufgrund ihrer vergrößernden Wirkung werden flache Hohlspiegel (mit einer großen Brennweite) unter anderem als Kosmetikspiegel verwendet.

- Nähert man einen Gegenstand einem Hohlspiegel aus weiter Entfernung, so entfernt sich das Bild vom Hohlspiegel: Hohlspiegel erzeugen umgekehrte, seitenvertauschte Bilder der Gegenstände, wenn sie sich außerhalb der Brennweite befinden.

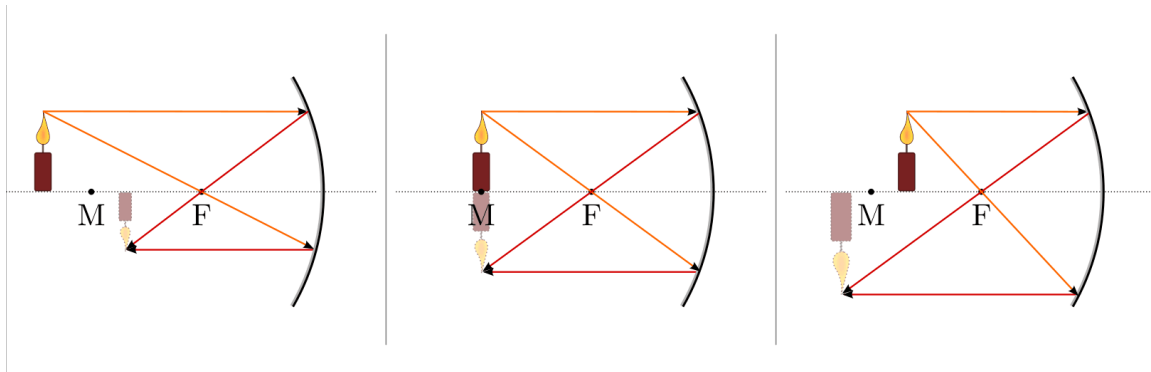


Abb. 119: Bildentstehung an einem Hohlspiegel (Gegenstand außerhalb der Brennweite).

Zur Konstruktion des Bildes genügen wiederum die von einem Gegenstandspunkt ausgehenden Brennpunkt- und Parallelstrahlen, die durch den Hohlspiegel wiederum auf Parallel- beziehungsweise Brennpunktstrahlen abgebildet werden. Der Schnittpunkt der reflektierten Strahlen entspricht der Lage des Bildes.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Lichtbrechung

Trifft Licht auf die Grenzfläche zweier Stoffe, so wird es zum Teil reflektiert, zum Teil verändert es an der Grenze beider Stoffe seine Richtung. Senkrecht auftreffendes Licht ändert seine Richtung nicht.

Das Brechungsgesetz

Um das Brechungsgesetz zu formulieren, zeichnet man an der Stelle, an der das Licht auftrifft, eine Gerade senkrecht zur Grenzfläche. Der Winkel zwischen dieser Senkrechten und dem einfallenden Strahl wird Einfallswinkel α , der Winkel zwischen der Senkrechten und dem gebrochenen Strahl Brechungswinkel β genannt.

Brechzahl und Brechungsgesetz

Die Sinus-Werte der Einfallswinkel und Brechungswinkel, $\sin \alpha$ und $\sin \beta$, stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 , die das Licht in den jeweiligen Stoffen erreichen kann. Breitet sich das Licht zunächst in Luft bzw. Vakuum aus und trifft auf ein transparentes Material, so ergibt das Verhältnis der Winkelgrößen

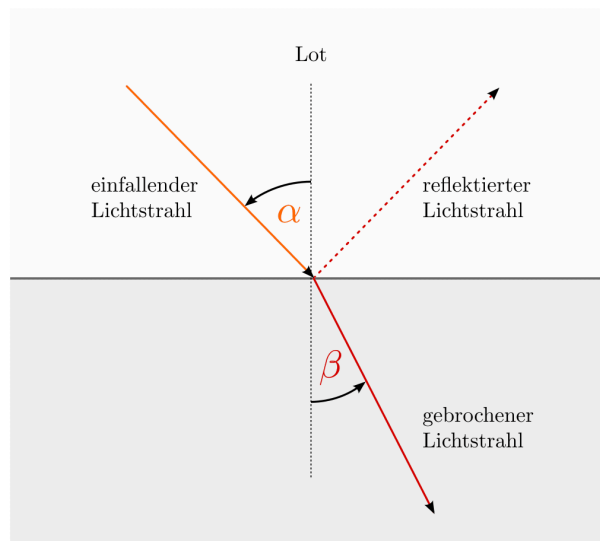


Abb. 120: Lichtbrechung beim Übergang eines Lichtstrahls von einem optisch dünnen in ein optisch dickes Medium.

einen konstanten, vom Material abhängigen Wert, der als (absolute) Brechzahl n bezeichnet wird:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (104)$$

Die (absolute) Brechzahl n gegenüber dem Vakuum ist eine für jeden Stoff charakteristische Materialeigenschaft.¹ Sie gibt gleichzeitig das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ($c_0 = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) zur die Lichtgeschwindigkeit c im jeweiligen Stoff an:

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (105)$$

Für die Brechzahl von Vakuum gilt nach der obigen Formel $n_0 = 1$, für die Brechzahl von Luft in sehr guter Näherung ebenfalls.² In allen optischen Medien breitet sich das Licht mit geringerer Geschwindigkeit aus, so dass die (absoluten) Brechzahlen aller Materialien $n \geq 1$ gilt.

¹ Manchmal wird die Brechzahl auch Brechungsindex genannt.

Für kleine Einfallswinkel α , also annähernd senkrechten Lichteinfall, kann die so genannte „Kleinwinkelnäherung“ $\sin \alpha \approx \alpha$ genutzt werden (sofern α im Bogenmaß angegeben wird). In diesem Fall gilt:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta}$$

Für steilere Einfallswinkel muss hingegen stets mit dem Brechungsgesetz in der allgemeinen Form (106) gerechnet werden.

² Transparente Materialien mit einem hoher Brechzahl werden oftmals als „optisch dicht“, Materialien mit einer niedrigeren Brechzahl entsprechend als „optisch dünn“ bezeichnet.

Die unterschiedlichen Brechzahlen verschiedener Materialien, die in vielen Lehrbüchern und in tabellarischer Form abgedruckt sind, können bei optischen Versuchen zur Materialbestimmung genutzt werden.

Tab. 13: Brechzahlen gegenüber Vakuum für verschiedene Stoffe

Stoff	Brechzahl n_0
Eis	1,31
Wasser	1,33
Quarzglas	1,46
Plexiglas	1,49
Flintglas	1,70
Diamant	2,40

Tritt ein Lichtstrahl von einem Stoff mit der Brechzahl n_1 in einen anderen Stoff mit einer höheren Brechzahl $n_2 > n_1$ über, so wird er zur Senkrechten hin gebrochen. In diesem Fall gibt die so genannte relative Brechzahl $\frac{n_2}{n_1}$ an, in welchem Verhältnis die Sinus-Werte des Einfallswinkels α und Brechungswinkels β stehen:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (106)$$

Beispiel:

- Licht breitet sich in Glas oder Wasser langsamer aus als in Luft. Das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit in Luft c_{Luft} zu der in Lichtgeschwindigkeit in Wasser c_{Wasser} ist daher größer als 1:

$$n_{\text{Luft} \rightarrow \text{Wasser}} = \frac{c_{\text{Luft}}}{c_{\text{Wasser}}} = \frac{300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{225000 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 1,33$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass der Einfallswinkel α des Lichts um den Faktor 1,33 größer ist als der Brechungswinkel β . Das Licht wird zur senkrechten Gerade hin gebrochen.

Die Totalreflexion

Tritt ein Lichtstrahl von einem optischen Medium mit hoher Brechzahl n_1 in einen anderen Stoff mit niedriger Brechzahl n_2 über, so wird er von der Senkrechten weg gebrochen; der Brechungswinkel β ist in diesem Fall größer als der Einfallswinkel α . Konkret gilt:

$$\sin \alpha = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin \beta \quad (107)$$

Bei einem bestimmten, von den beiden Materialien abhängigen Einfallswinkel α_{max} nimmt der Brechungswinkel β den Wert 90° an. In diesem Fall kann der einfallende Lichtstrahl

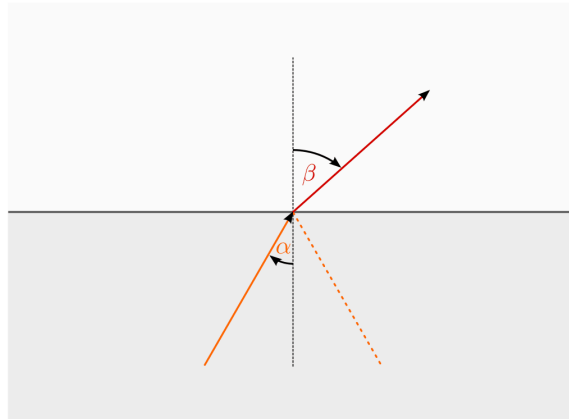


Abb. 121: Lichtbrechung beim Übergang eines Lichtstrahls von einem optisch dichten in ein optisch dünnes Medium.

nicht mehr aus dem optisch dichteren Medium in das optisch dünnere Medium übergehen, sondern wird reflektiert beziehungsweise verläuft längs der Grenzfläche beider Medien. Da hierbei $\sin 90^\circ = 1$ gilt, vereinfacht sich die obige Gleichung (107) zu folgender Formel:

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{n_2}{n_1}$$

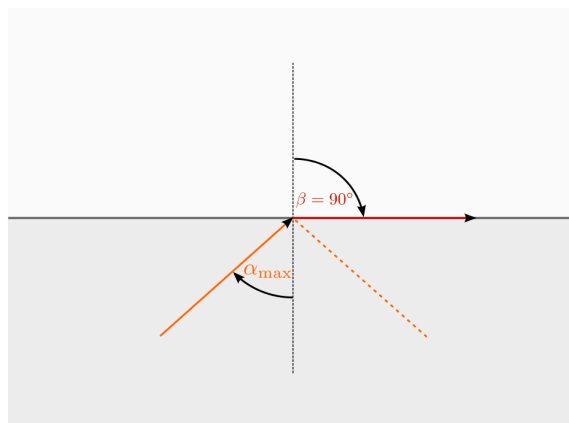


Abb. 122: Totalreflexion beim Übergang eines Lichtstrahls von einem optisch dichten in ein optisch dünnes Medium.

Mit Hilfe eines Taschenrechners kann die Umkehrfunktion asin des Sinus („Arcus-Sinus“) und somit der Grenzwinkel α für das Auftreten von Totalreflexion anhand der beiden Brechzahlen n_1 und n_2 berechnet werden:³

³ Exakt beträgt die Brechzahl laut Wikipedia (Brechungsindex) von Luft bei Normalbedingungen 1,000292. Starke Temperatur- und Feuchtigkeitsschwankungen können zu Abweichungen führen und optische Effekte verursachen (beispielsweise Fata Morgana).

$$\alpha_{\max} = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (108)$$

Hierbei ist zu beachten, dass bei der Totalreflexion n_1 die Brechzahl des optisch dichteren und n_2 die Brechzahl des optisch dünneren Mediums bezeichnet, also $n_1 > n_2$ und somit $\frac{n_2}{n_1} < 1$ gilt. Andernfalls kann keine Totalreflexion stattfinden.

Beispiel:

- Für den Übergang eines Lichtstrahls von Wasser in Luft ist $n_1 = 1,33$ und $n_2 = 1$. Somit ergibt $\frac{n_2}{n_1} \approx 0,752$ und $\alpha = \sin^{-1}(0,752) \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 48,75^\circ$.
- Für den Übergang eines Lichtstrahls von Quarzglas in Wasser ist $n_1 = 1,46$ und $n_2 = 1,33$. Somit ergibt $\frac{n_2}{n_1} \approx 0,911$ und $\alpha = \sin^{-1}(0,911) \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 65,64^\circ$.

Je größer der Unterschied der Brechzahlen n_1 und n_2 ist, desto kleiner ist der Grenzwinkel α_{\max} , ab dem Totalreflexion auftritt. Ist der Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel ($\alpha > \alpha_{\max}$), so wird der Lichtstrahl an der Grenzfläche vollständig gemäß dem *Reflexionsgesetz* zurückgeworfen. Diese Eigenschaft wird zur Konstruktion von optischen Glasfaser- bzw. Kunststoffkabeln als so genannte „Lichtleiter“ genutzt.

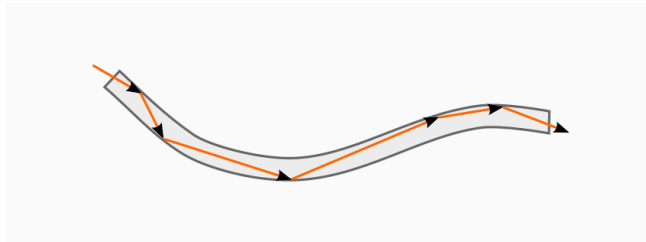


Abb. 123: Totalreflexion in einem Lichtleiter.

Damit der Einfallswinkel an der Längswand stets groß genug ist, muss ein Lichtleiter möglichst dünn sein und darf nicht zu stark gebogen werden. Eine einzelne Faser eines Lichtleiter-Bündels hat meist einen Durchmesser von etwa 0,01 mm.

Doppelte Lichtbrechung an einer ebenen Platte

Beim Durchgang durch eine ebene Platte, beispielsweise eine Glasscheibe, wird ein Lichtstrahl zweimal gebrochen: Beim Eintritt wird der Strahl zur Senkrechten hin, beim Austritt von der Senkrechten weg gebrochen. Da die Brechzahlen und somit die Ablenkungen in beiden Fällen gleich sind, erfährt der Lichtstrahl insgesamt nur eine parallele Verschiebung. In vielen Fällen, insbesondere bei dünnen Scheiben, kann der Effekt vernachlässigt und der doppelt gebrochene Lichtstrahl durch einen einzelnen, geraden Lichtstrahl ersetzt werden.

Eine *Totalreflexion* kann in diesem Fall nicht auftreten, da der Austrittswinkel des Lichtstrahls gleich dem Eintrittswinkel ist und für diesen (von der Senkrechten aus gemessen) stets $\alpha < 90^\circ$ gilt.

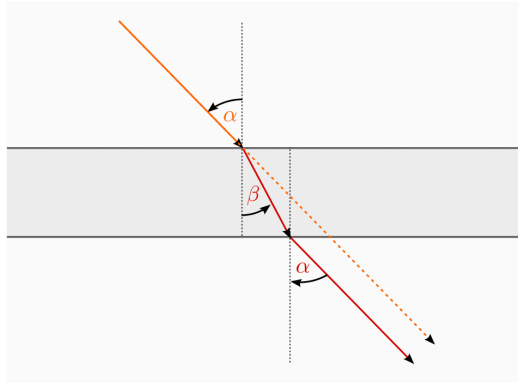


Abb. 124: Lichtbrechung an einer ebenen Platte.

Doppelte Lichtbrechung an einem Prisma

Fällt ein Lichtstrahl auf ein Prisma, so wird er ebenfalls zweimal gebrochen – einmal beim Eintritt in das Prisma (Übergang Luft -> Glas) und ein weiteres mal beim Austritt aus dem Prisma (Übergang Glas -> Luft). Da die beiden Grenzflächen gegeneinander geneigt sind, wird der Lichtstrahl insgesamt zum dickeren Ende des Prismas hin abgelenkt.

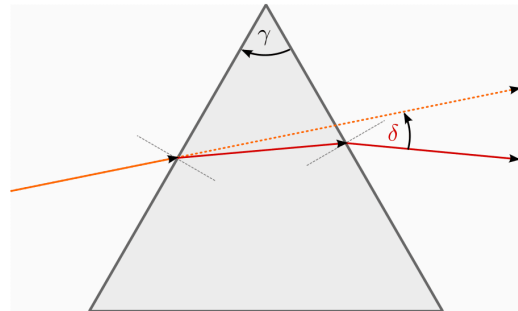


Abb. 125: Lichtbrechung an einem Prisma.

Umso größer der Keilwinkel γ des Prismas ist (d.h. je stumpfer das Prisma ist), desto stärker ist der Winkel δ , um den der einfallende Lichtstrahl abgelenkt wird.

Bei sehr stumpfen Prismen ist sogar eine Totalreflexion des einfallenden Lichts an dem Lichtstrahl gegenüber liegenden Fläche auftreten. Hierbei kann eine Ablenkung des Lichts um 90° bzw. 180° erreicht werden. Derartige „Umkehrprismen“ werden beispielsweise in Fernrohre oder Fotokameras eingebaut, um eine Umlenkung bzw. Vertauschung parallel einfallender Strahlen zu erreichen.

Optische Linsen

Geschliffene Gläser können einfallende Lichtstrahlen – je nach Bauform – bündeln oder zerstreuen. Solche glasartigen Körper, die meist kreisförmig sind und eine bestimmte

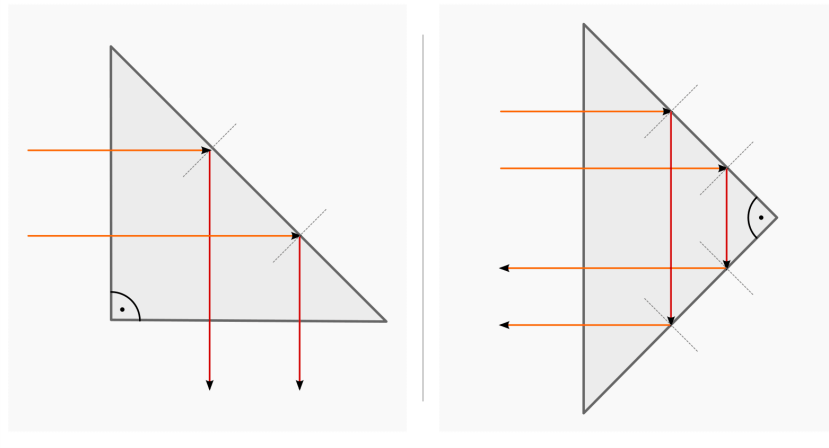


Abb. 126: Ablenkung von Lichtstrahlen um 90° bzw. 180° an rechtwinkligen Prismen.

Krümmung aufweisen, werden als „optische Linsen“ bezeichnet. Ein bekanntes Beispiel ist die Lupe, mit deren Hilfe man ein vergrößertes Bild eines Gegenstandes erhalten kann.

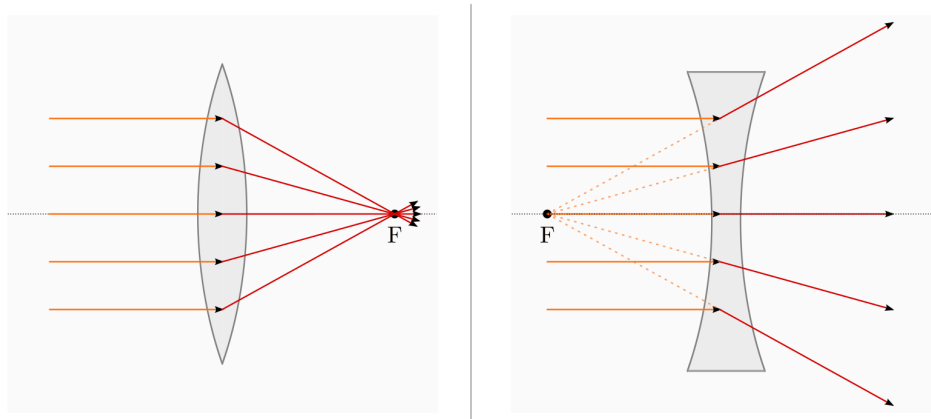


Abb. 127: Sammellinse (linkes Bild) und Zerstreuungslinse (rechtes Bild) als typische Formen optischer Linsen.

Um die Bildentstehung an einer optischen Linse zu erklären, verwendet man (weitestgehend) die gleichen Begriffe wie bei der Beschreibung von *gekrümmten Spiegeln*:

- Optische Achse:

Die Gerade, die durch die Mitte der Linse verläuft und senkrecht zur Linsenebene steht, heißt optische Achse.

- Parallelstrahlen:

Alle Strahlen, die parallel zur optischen Achse auf eine optische Linse treffen, heißen Parallelstrahlen. Sie werden durch die Linse gesammelt beziehungsweise zerstreut und schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt hinter bzw. vor der Linse. Dieser Punkt auf der optischen Achse wird Brennpunkt F genannt.

Der Abstand zwischen Linsenmittelpunkt und einem Brennpunkt wird Brennweite f genannt. Die Brennweite einer optischen Linse ist umso größer, desto flacher die Linse ist.

- Brennpunktstrahlen:

Alle Strahlen, die durch einen Brennpunkt einer optischen Linse verlaufen, werden durch die Linse so gebrochen, dass sie hinter der Linse parallel zur optischen Achse verlaufen.

- Mittelpunktstrahlen:

Strahlen, die durch den Linsenmittelpunkt verlaufen, werden beim Eintritt in das Linsenglas ebenso stark gebrochen wie beim Austritt. Mittelpunktstrahlen werden daher nur leicht parallel verschoben (bei dünnen Linsen kaum erkennbar). In guter Näherung durchlaufen Mittelpunktstrahlen die Linse somit unverändert.

Zeichnet man für einen beliebigen Gegenstandspunkt G zwei oder drei der oben genannten Strahlen ein, so erhält man den passenden Bildpunkt als Schnittpunkt der Strahlen.

Bildentstehung an einer Sammellinse

Bei der Abbildung eines Gegenstandes durch eine Sammellinse hängen Lage und Größe des Bildes von der Entfernung g des Gegenstands zur Linse und von deren Brennweite f ab.

Nähert man einen Gegenstand einer Sammellinse aus weiter Entfernung, so entfernt sich auch das Bild von der Sammellinse. Sammellinsen erzeugen umgekehrte, seitenvertauschte Bilder von Gegenständen, wenn sich diese außerhalb der Brennweite befinden.

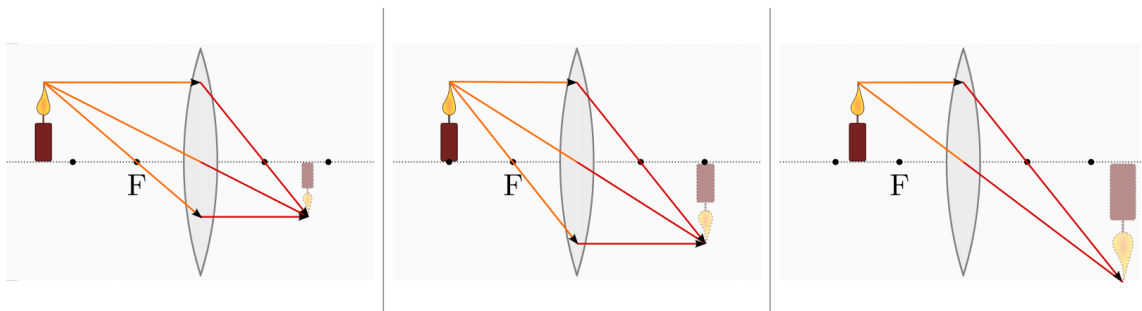


Abb. 128: Bildentstehung an einer Sammellinse (Gegenstand außerhalb der Brennweite).

Zur Konstruktion des Bildes genügen wiederum die von einem Gegenstandspunkt ausgehenden Brennpunkt- und Parallelstrahlen, die durch die Sammellinse wiederum auf Parallel- bzw. Brennpunktstrahlen abgebildet werden. Der Schnittpunkt der gebrochenen Strahlen entspricht der Lage des Bildes.

Nähert man einen Gegenstand vom Brennpunkt her einer Sammellinse, so nähert sich auch das Bild der Sammellinse. Sammellinsen erzeugen vergrößerte und aufrechte Bilder der Gegenstände, wenn sie sich innerhalb der Brennweite befinden (Lupeneffekt).

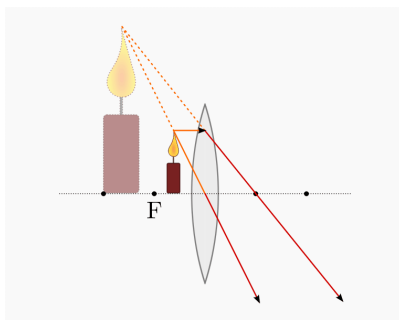


Abb. 129: Bildentstehung an einer Sammellinse (Gegenstand innerhalb der Brennweite).

Zur Konstruktion des Bildes zeichnet man die einem Gegenstandspunkt ausgehenden Bildstrahlen hinter der Sammellinse weiter. Dabei ist zu beachten, dass Brennpunktstrahlen zu Parallelstrahlen werden und Mittelpunktstrahlen stets senkrecht auf die Linse treffen und diese somit ohne Lichtbrechung durchlaufen. Die Lage des Bildes entspricht dem Schnittpunkt der so verlängerten Parallel- bzw. Mittelpunktstrahlen hinter dem Gegenstand.

Aufgrund ihrer vergrößernden Wirkung werden flache Sammellinsen (mit einer großen Brennweite) unter anderem als Lupen und Objektive verwendet.

Bildentstehung an einer Zerstreuungslinse

Eine Zerstreuungslinse erzeugt stets aufrechte, verkleinerte Bilder. Nähert man einen Gegenstand an die Linsenoberfläche an, so bewegt sich auch das Bild des Gegenstands auf die Linse zu und wird dabei größer; es bleibt jedoch stets kleiner als das Original.

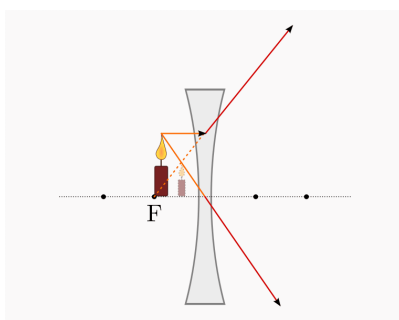


Abb. 130: Bildentstehung an einer Zerstreuungslinse

Zur Konstruktion des Bildes zeichnet man zu einem Gegenstandspunkt wiederum einen Parallel- und einen Brennpunktstrahl ein. Der Parallelstrahl wird durch die Zerstreuungslinse so gebrochen, dass die nach hinten gerichtete Verlängerung des Strahls durch den Brennpunkt verläuft. Das (stets verkleinerte) Bild befindet sich am Schnittpunkt des so verlängerten Parallelstrahls mit dem Mittelpunktstrahl zwischen dem Gegenstand und der Linse.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Linsensysteme

Häufig wird in optischen Geräten nicht nur eine einzelne, sondern vielmehr eine Kombination mehrerer Sammellinsens beziehungsweise Zerstreuungslinsen genutzt. Einige wichtige Eigenschaften, die sich bei derartigen Anordnungen auftretend, werden im folgenden Abschnitt näher beschrieben.

Brennweite und Brechkraft eines Linsensystems

Soll die Brennweite f_{ges} eines solchen Systems mehrerer Linsen bestimmt werden, so kann man die Kehrwerte der Brennweiten aller Linsen addieren, um den Kehrwert der Gesamtbrennweite zu erhalten:

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots \quad (109)$$

Die Brennweiten von Sammellinsen werden dabei positiv, die von Zerstreuungslinsen negativ gezählt.

Beispiele:

- Eine Kombination zweier Sammellinsen mit den Brennweiten $f_1 = 10 \text{ cm}$ und $f_2 = 15 \text{ cm}$ hat insgesamt folgende Brennweite:

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{0,1 \text{ m}} + \frac{1}{0,15 \text{ m}} \Leftrightarrow f_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{0,1 \text{ m}} + \frac{1}{0,15 \text{ m}}} = 0,06 \text{ m}$$

Die beiden Linsen haben zusammen somit die gleiche Brechkraft wie eine einzelne (Sammel-)Linse mit $f = 6 \text{ cm}$ Brennweite.

- Eine Kombination einer Sammellinse mit einer Brennweite von $f_1 = 30 \text{ cm}$ und einer Zerstreuungslinse mit einer Brennweite von $f_2 = -10 \text{ cm}$ hat insgesamt folgende Brennweite:

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{0,3 \text{ m}} - \frac{1}{0,1 \text{ m}} \Leftrightarrow f_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{0,3 \text{ m}} - \frac{1}{0,1 \text{ m}}} = -0,15 \text{ m}$$

Die beiden Linsen haben zusammen somit die gleiche Brechkraft wie eine einzelne (Zerstreuungs-)Linse mit $f = -15 \text{ cm}$ Brennweite.

Kombiniert man eine Sammellinse mit einer Zerstreuungslinse (betragsweise) gleicher Brennweite, so ergibt sich $\frac{1}{f} = 0$ beziehungsweise $f = \infty$. Ein solches System hat eine unendliche Brennweite, d.h. einfallende Lichtstrahlen werden durch diese Linsenkombination quasi nicht gebrochen, sondern durchlaufen es ohne Ablenkung.

Die Brennweiten von Linsen lassen sich, wie im letzten Abschnitt gezeigt, nicht direkt addieren, sondern nur ihre Brennweite. Aus diesem Grund wurde als physikalische Größe die so genannte Brechkraft D eingeführt, die als Kehrwert der Brennweite f definiert ist:

$$D = \frac{1}{f} \quad (110)$$

Die Brechkraft einer Linse wird in Dioptrien (dpt) angegeben. Eine Dioptrie entspricht der Brechkraft einer Sammellinse, die eine Brennweite von einem Meter hat:

$$1 \text{ dpt} = 1 \frac{1}{\text{m}}$$

Je kleiner die Brennweite einer Linse ist, desto größer ist ihre Brechkraft und somit auch ihre Dioptrienzahl; beispielsweise entspricht eine Brennweite von $\frac{1}{2}$ m einer Brechkraft von 2 dpt oder eine Brennweite von $\frac{1}{4}$ m einer Brechkraft von 4 dpt.

Die Dioptrienzahl D_{ges} eines Linsensystems ist gleich der Summe der Dioptrienzahlen der einzelnen Linsen; die Brechkraft von Sammellinsen erhält dabei wiederum ein positives, die von Zerstreuungslinsen ein negatives Vorzeichen. Es gilt also:

$$D_{\text{ges}} = D_1 + D_2 + \dots \quad (111)$$

Linsenfehler und Abhilfen

Die Brechkraft einer Sammel- beziehungsweise Zerstreuungslinse wird üblicherweise für Lichtstrahlen angegeben, die nahe der optischen Achse auf die Linse treffen. Strahlen, die auf den Randbereich der Linse treffen („Randstrahlen“), werden stärker gebrochen. Einfallende Parallelstrahlen durchlaufen also keine gemeinsamen Brennpunkt und können somit durch die Linse nicht gemeinsam mit den achsennah einfallenden Strahlen in einem einzigen Punkt scharf abgebildet werden. Es gilt:

$$f_{\text{Rand}} < f_{\text{Mitte}}$$

Die Verschiebung des Brennpunkts bei Randstrahlen wird als sphärische Aberration bezeichnet. Um diesen Linsenfehler zu verhindern, gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

- Durch eine Blende kann verhindert werden, dass Lichtstrahlen auf den Rand der Linse treffen. Hierdurch werden jedoch der Bildausschnitt und die einfallende Lichtstärke reduziert.
- Durch eine Kombination einer Sammel- und einer Zerstreuungslinse mit unterschiedlichen Brechkraften kann gemäß Gleichung (109) ein Linsensystem mit der gewünschten Brechkraft erzeugt werden, das zugleich die sphärische Aberration (nahezu) auf Null reduziert. Derartige Linsensysteme werden beispielsweise in Objektiven von Fotokameras eingesetzt.

Ein weiterer Linsenfehler entsteht dadurch, dass verschieden farbiges Licht beim Durchgang durch die Linse ungleich stark gebrochen wird; in der Regel wird rotes Licht am schwächsten, violetteres Licht am stärksten gebrochen. Dieser Effekt wird als chromatische Aberration bezeichnet. Es gilt:

$$f_{\text{violett}} < f_{\text{rot}}$$

Im Gegensatz zur sphärischen chromatische Aberration kann die chromatische Aberration nie vollständig durch geschickte Linsen-Kombinationen beseitigt werden.

Der Abbildungsmaßstab und die Linsengleichung

Das vergrößerte beziehungsweise verkleinerte Bild, das sich bei einer Abbildung durch eine optische Linse ergibt, kann nicht nur durch geometrische Konstruktion sondern auch rechnerisch bestimmt werden.

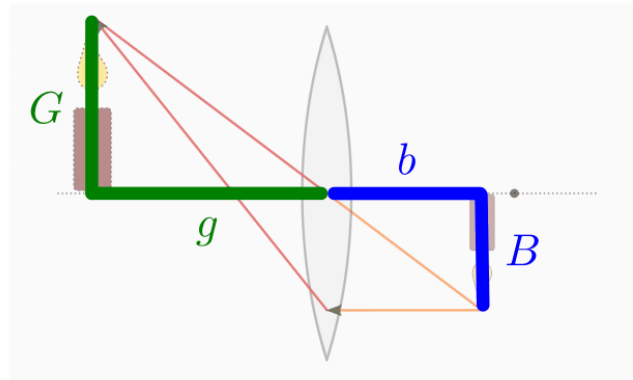


Abb. 131: Herleitung der Abbildungsgleichung (Strahlensatz).

Wendet man den 2. Strahlensatz auf die obige Abbildung an, so erkennt man, dass die Größe G des Gegenstands im gleichen Verhältnis zur Entfernung g des Gegenstands von der Linse steht wie die Größe des Bildes B zu seiner Entfernung b von der Linse:

$$\frac{B}{b} = \frac{G}{g}$$

Formt man diese für Sammell- wie für Zerstreuungslinsen gleichermaßen gültige Gleichung um, so erhält man den Maßstab $\tilde{\beta}$, der sich bei der Abbildung durch die Linse ergibt:

$$\tilde{\beta} = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (112)$$

Der Abbildungsmaßstab $\tilde{\beta}$ hat keine Einheit, sondern ist ein reines Zahlenverhältnis. Sein Wert ist kleiner als Eins im Fall einer Verkleinerung und größer als Eins im Fall einer Vergrößerung.

Häufig lassen sich im praktischen Anwendungsfall die Gegenstandsgröße G sowie die Gegenstandsweite g durch eine gewöhnliche Längenmessung ermitteln. Um damit jedoch mittels Gleichung (112) auf die Bildgröße B und die Bildweite b schließen zu können, ist neben der eine zusätzliche Gleichung nötig.

Wendet man den 2. Strahlensatz auf die obige Abbildung an, so erkennt man, dass die Größe G des Gegenstands im gleichen Verhältnis zur Größe B des Bildes steht wie die Entfernung $g - f$ des Gegenstands vom Brennpunkt zur Brennweite f der Linse:

$$\frac{G}{B} = \frac{g - f}{f}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann in zwei Terme aufgeteilt werden:

$$\frac{G}{B} = \frac{g - f}{f} = \frac{g}{f} - 1$$

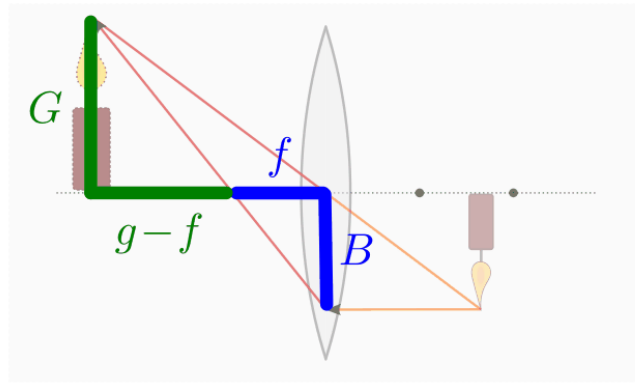


Abb. 132: Herleitung der Linsengleichung (Strahlensatz).

Das Verhältnis $\frac{G}{B}$ der Gegenstands- zur Bildgröße ist nach Gleichung (112) mit dem Verhältnis $\frac{g}{b}$ der Gegenstands- zur Bildweite identisch. Somit gilt:

$$\frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1$$

Dividiert man diese Gleichung durch g und sortiert die Terme, so erhält man die so genannte „Linsengleichung“, die üblicherweise in folgender Form angegeben wird:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (113)$$

Bei einer bekannten Brennweite kann mittels dieser Gleichung anhand der Gegenstandsweite g unmittelbar die Bildweite b berechnet werden. Setzt man den erhaltenen Wert von b in die Abbildungsgleichung (112) ein, so erhält man schließlich auch die gesuchte Bildgröße B und damit den Abbildungsmaßstab.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Optische Geräte

Das Auge

Aus Sicht der geometrischen Optik besteht das Auge aus einem *Linsensystem* zweier Sammellinsen – erstens der gewölbten Hornhautschicht und zweitens der durch einen Ringmuskel verformbaren Augenlinse. Das von den Linsen erzeugte Bild verläuft entlang der Netzhaut. Dort befinden sich Sinneszellen (Stäbchen und Zäpfchen), welche die einfallenden Lichtstrahlen absorbieren und entsprechende Signale über den Sehnerv gebündelt ans Gehirn weiterleiten.

Damit das Bild wahrgenommen werden kann, muss genügend Licht auf die Netzhaut gelangen. Dabei wird über die Größe die Pupille geregelt, wie viel Licht ins Auge fällt; Die

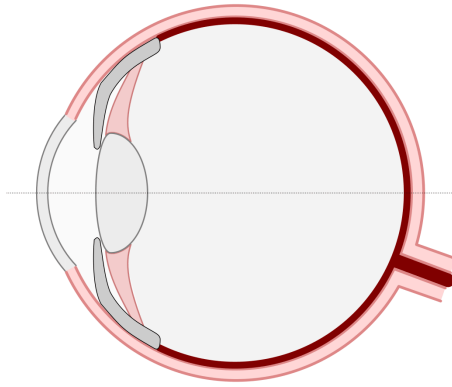


Abb. 133: Schematischer Aufbau eines Auges.

Pupille verengt sich, wenn zu viel Licht ins Auge gelangt und die Sinneszellen der Netzhaut schädigen könnte („Adaption“). Ebenso werden durch die Regenbogenhaut Lichtstrahlen ausgeblendet, die ansonsten auf den Rand der Linse treffen und aufgrund der *sphärischen Abberation* ein unscharfes Bild erzeugen könnten.

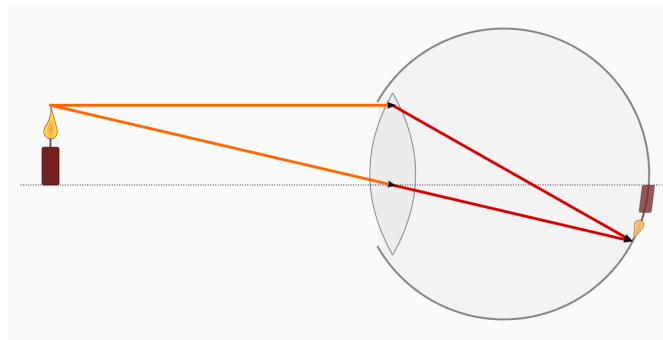


Abb. 134: Strahlengang und Bildentstehung im Auge.

Wie man am Verlauf der Lichtstrahlen im Auge erkennen kann, erzeugt die Augenlinse auf der Netzhaut ein umgekehrtes und seitenvertauschtes Bild. Erst im Gehirn findet (unbewusst) ein „Umdenken“ statt, das aus den empfangenen Bildsignalen wiederum ein aufrechtes Bild konstruiert.¹

Die Hornhaut des Auges hat eine Brechkraft von etwa 43 dpt, die Brechkraft der (entspannten) Augenlinse beträgt etwa 15 dpt. Bei Bedarf kann der Ringmuskel beim Betrachten naher Gegenstände die Brechkraft der Augenlinse um bis zu 14 dpt erhöhen, wobei diese als „Akkommodation“ bezeichnete Fähigkeit im Alter auf „nur“ 2 dpt abnehmen kann. In diesem Fall ist eine mit einer Sammellinse bestückten Brille notwendig, um nahe liegende Gegenstände betrachten zu können.

¹ Diese Fähigkeit ist bei neugeborenen Kindern in den ersten Lebenstagen noch nicht vorhanden; es dauert etwa eine Woche, bis die Sinneswahrnehmungen des Auges vom Gehirn „richtig“ verarbeitet werden.

Mittels einer so genannten „Umkehrbrille“ kann die gegenteilige Erfahrung auch im späteren Lebensalter experimentell nochmals nachempfunden werden.

Weit- und Kurzsichtigkeit

Zu den häufigsten Sehfehlern zählen die so genannte Weit- beziehungsweise Kurzsichtigkeit.

- Bei der Weitsichtigkeit ist der Augapfel „zu klein“, das von der Augenlinse erzeugte Bild liegt also hinter der Netzhaut. In diesem Fall kann eine geeignete Sammellinse Abhilfe schaffen, welche die Brechkraft des sich ergebenden Linsensystems erhöht beziehungsweise seine Brennweite reduziert.

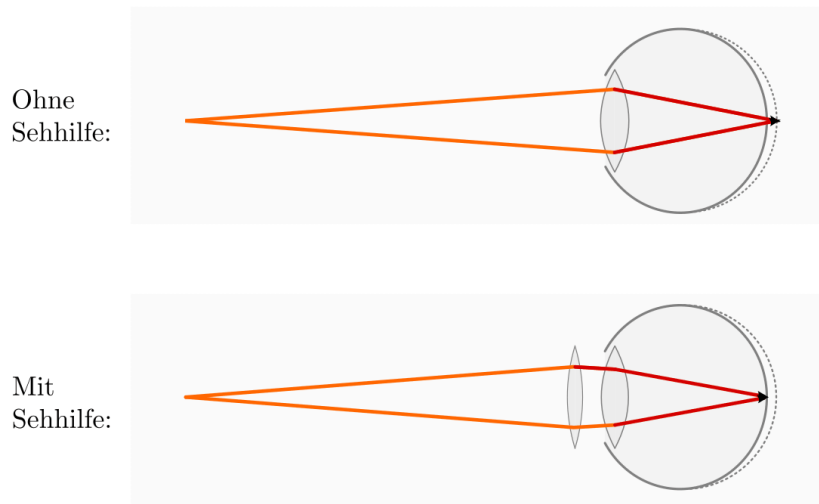


Abb. 135: Weitsichtigkeit ohne und mit Sehhilfe.

- Bei der Kurzsichtigkeit ist der Augapfel „zu groß“, das von der Augenlinse erzeugte Bild liegt also vor der Netzhaut. In diesem Fall kann eine geeignete Zerstreuungslinse Abhilfe schaffen, welche die Brechkraft des sich ergebenden Linsensystems herabsetzt beziehungsweise seine Brennweite erhöht.

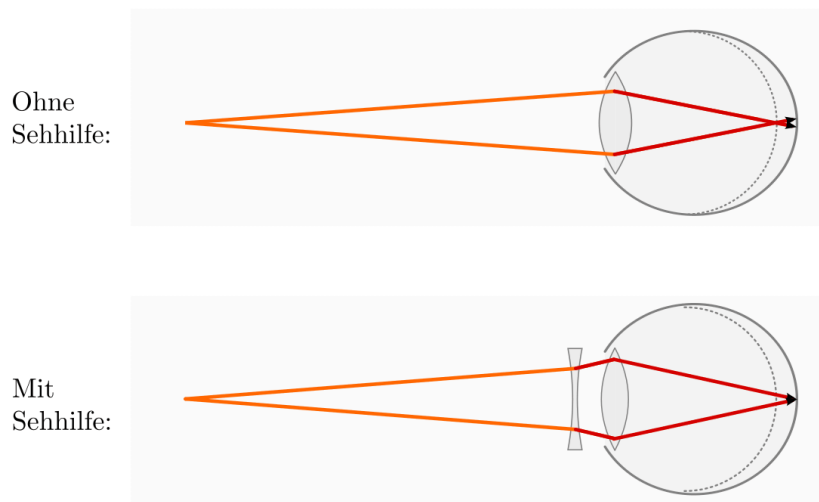


Abb. 136: Kurzsichtigkeit ohne und mit Sehhilfe.

Beide Sehfehler können angeboren sein, wenn die Größe des Augapfels von der „normalen“ Größe abweicht. Ebenso kann bei der Kurzsichtigkeit die Augenlinse zu stark beziehungsweise bei der Weitsichtigkeit zu schwach gekrümmt sein.

Bei der Weitsichtigkeit kann auch ein altersbedingtes Nachlassen des Ringmuskels beziehungsweise einer Verhärtung der Augenlinse zu einer zu schwachen Brechkraft der Augenlinse führen. In diesem Fall kann die Augenlinse nicht mehr stark genug gekrümmt („akkomodiert“) werden, um auch nahe Gegenstände scharf abbilden zu können; in diesem Fall spricht man von einer „Altersweitsichtigkeit“. Sie kann ebenso wie eine angeborene Weitsichtigkeit durch eine Sammellinse mit geeigneter Brechkraft ausgeglichen werden.

Der Sehwinkel und das Auflösungsvermögen

Wie groß ein Gegenstand wahrgenommen wird, hängt von der Größe seines Bildes ab, das auf der Netzhaut entsteht. Die Größe des Bildes kann zeichnerisch bestimmt werden, indem vom Gegenstand ausgehende Mittelpunktstrahlen eingezeichnet werden. Der Winkel, den diese Strahlen einschließen, wird als Sehwinkel bezeichnet.

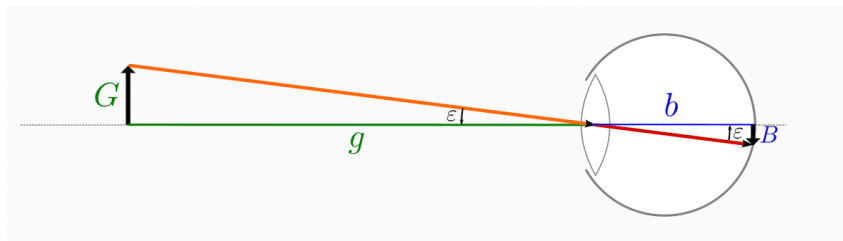


Abb. 137: Darstellung des Sehwinkels, unter dem ein betrachteter Gegenstand auf der Netzhaut erscheint.

Je kleiner der Sehwinkel ist, desto kleiner erscheint auch das Bild des betrachteten Gegenstands auf der Netzhaut. Der minimale Sehwinkel, der nötig ist, um zwei Gegenstandspunkte als räumlich voneinander getrennt wahrnehmen zu können, wird als Auflösungsvermögen (eines optischen Geräts) bezeichnet. Beim menschlichen Auge ist ein Sehwinkel von etwa einem Sechzigstel Grad (einer Bogenminute) nötig, um zwei verschiedene Sinneszellen auf der Netzhaut zu reizen und somit zwei Gegenstandspunkte getrennt voneinander wahrnehmen zu können (der Abstand zwischen den Sinneszellen auf der Netzhaut beträgt etwa $5 \mu\text{m}$). Ein normalsichtiges Auge kann damit im Abstand der so genannten deutlichen Sehweite $s_0 = 25 \text{ cm}$ üblicherweise zwei $0,1 \text{ mm}$ voneinander entfernte Punkte noch getrennt wahrnehmen.

Der Sehwinkel kann über folgenden Zusammenhang bestimmt werden

$$\varepsilon = \tan\left(\frac{G}{g}\right) = \tan\left(\frac{B}{b}\right)$$

Für kleine Sehwinkel ($\varepsilon < 5^\circ$) gilt im Bogenmaß näherungsweise $\tan(\varepsilon) \approx \sin(\varepsilon) \approx \varepsilon$ und somit:

$$\varepsilon \approx \frac{\text{Größe des Gegenstands}}{\text{Abstand zum Gegenstand}}$$

Eine Möglichkeit zur Vergrößerung des Sehwinkels besteht darin, den betrachteten Gegenstand an das Auge anzunähern oder umgekehrt. Ein normalsichtiges Auge kann allerdings nur bis zu einem Abstand von rund 10 cm scharf stellen; über einen längeren Zeitraum wird dieses angespannte Sehen zudem als anstrengend empfunden. Als angenehmer wird für die Betrachtung kleiner Gegenstände die Verwendung eines optischen Geräts, beispielsweise einer Lupe, empfunden. Die Vergrößerung entsteht in diesem Fall dadurch, dass der betrachtete Gegenstand mit einem solchen Hilfsmittel unter einem größeren Sehwinkel erscheint. Formal lässt sich die Vergrößerung V eines optischen Geräts folgendermaßen definieren:

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Sehhilfe}}{\text{Sehwinkel ohne Sehhilfe}}$$

Das Kepler-Fernrohr

Ein Kepler-Fernrohr („Teleskop“) besteht im Wesentlichen aus einer großen, schwach gekrümmten Sammellinse als Objektiv und einer verhältnismäßig kleinen, stärker gekrümmten Sammellinse als Okular.²

Gewöhnlich betrachtet man mit einem Kepler-Fernrohr sehr weit entfernte Gegenstände, die sich weit außerhalb der doppelten Brennweite des Objektivs befinden. Die Objektivlinse erzeugt in diesem Fall ein verkleinertes, umgekehrtes und seitenvertauschtes Bild des Gegenstands im Inneren des Teleskops. Dieses wird durch das Okular, das wie eine Lupe wirkt, vergrößert betrachtet.³

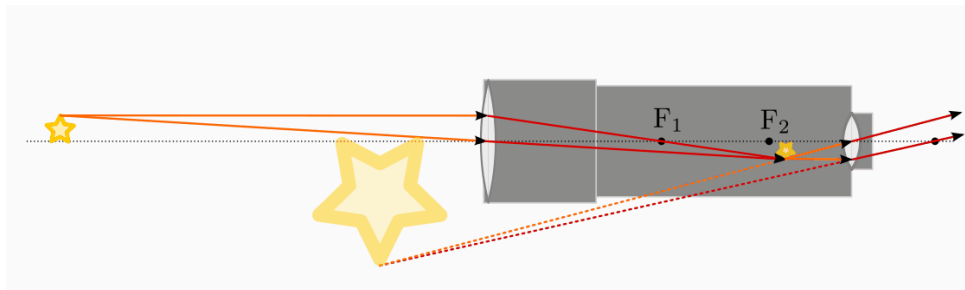


Abb. 138: Strahlengang in einem Kepler-Fernrohr.

Insgesamt ergibt sich bei einem Kepler-Fernrohr eine Vergrößerung, die dem Verhältnis der Brennweite f_{Obj} des Objektivs zur Brennweite f_{Ok} des Okulars entspricht:

$$V_{\text{K}} = \frac{f_{\text{Obj}}}{f_{\text{Ok}}} \quad (114)$$

² Die zum beobachteten Gegenstand (Objekt) hin gerichtete Linse bezeichnet man als „Objektiv“, die sich am Auge befindende Linse als „Okular“.

³ Damit das Okular wie eine Lupe wirkt, muss sich das betrachtete Zwischenbild innerhalb der einfachen Brennweite, also zwischen der Linse und dem zugehörigen Brennpunkt F_2 befinden. Damit diese Bedingung erfüllt ist, kann bei Kepler-Fernrohren üblicherweise der Abstand zwischen Objektiv und Okular manuell eingestellt werden.

Neben der (verhältnismäßig geringen) Vergrößerung des Seh winkels bewirkt das Linsen system eines Kepler-Fernrohrs, dass die gesamte auf das Objektiv einfallende Lichtmenge auf die deutlich kleinere Okularlinse gebündelt und und damit vom Auge wahrgenommen wird; das vom Fernrohr erzeugte Bild erscheint somit heller.

Die Mindestlänge l_K eines Kepler-Fernrohrs ist gleich der Summe der Brennweiten des Objektivs und Okulars, also $l_K = f_{Obj} + f_{Ok}$. Der Grund hierfür ist, dass sich das erzeugte Zwischenbild (knapp) außerhalb der Brennweite f_{Obj} des Objektivs und nahezu an der Brennweite f_{Ok} des Okulars befindet.

Das Lichtmikroskop

Bei einem Lichtmikroskop wird mittels einer starken Lichtquelle, die sich im Sockel des Mikroskops befindet, ein auf einem Mikroskoptisch liegendes Präparat durchleuchtet. Dieser Gegenstand wird durch ein System aus zwei Sammellinsen (Objektiv und Okular) betrachtet.

Die Entfernung des betrachteten Gegenstands zum Objektiv wird durch eine Höhenverstellung des Mikroskoptischs so eingestellt, dass die Entfernung des Gegenstands zwischen der einfachen und der doppelten Brennweite des Objektivs liegt. Das Objektiv erzeugt in diesem Fall ein vergrößertes, umgekehrtes und seitenvertauschtes Bild des Gegenstands innerhalb des Tubus. Das Okular erzeugt ein weiteres vergrößertes, aufrechtes und seitenvertauschtes Bild des Zwischenbilds.

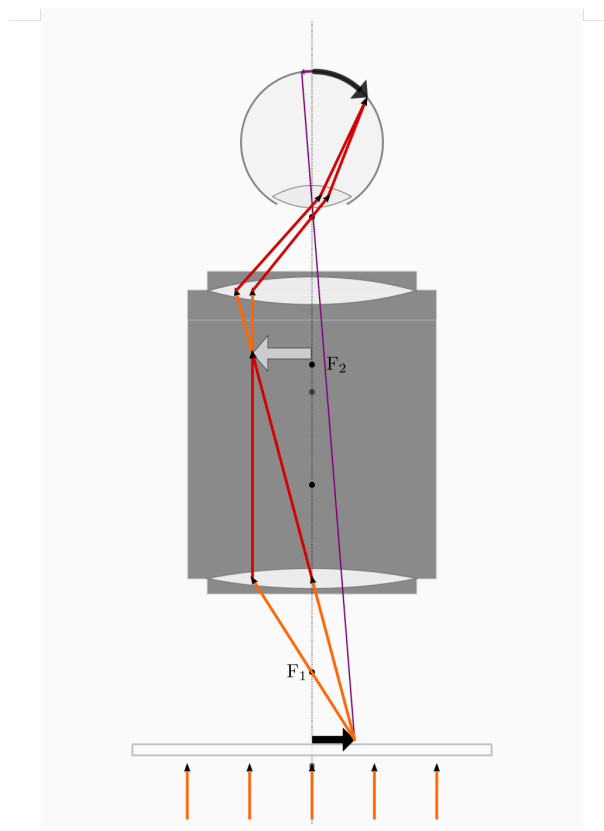


Abb. 139: Strahlengang in einem Lichtmikroskop. Die violetten Pfeile zeigen die Größe des Bildes auf der Netzhaut beziehungsweise den Sehwinkel ohne Mikroskop an.

Durch das Okular, das wie eine Lupe wirkt, wird das vom Objektiv erzeugte (Zwischen-)Bild unter einer nochmaligen Vergrößerung betrachtet. Die gesamte Vergrößerung des Mikroskops entspricht dem Produkt der Vergrößerungen von Objektiv und Okular.

Das Galilei-Fernrohr

Ein Galilei-Fernrohr besteht im Wesentlichen aus einer großen, schwach gekrümmten Sammellinse als Objektiv und einer verhältnismäßig kleinen, wesentlich stärker gekrümmten Zerstreuungslinse als Okular.



Abb. 140: Strahlengang in einem Galilei-Fernrohr.

Gewöhnlich betrachtet man mit einem Galilei-Fernrohr sehr weit entfernte Gegenstände, die sich weit außerhalb der doppelten Brennweite des Objektivs befinden. Im Gegensatz zum Kepler-Fernrohr schneiden sich jedoch die von der Objektivlinse gebündelten Lichtstrahlen nicht innerhalb des Fernrohrs; vielmehr werden die einfallenden Strahlen durch das Okular wieder so gestreut, dass sie parallel zu den ursprünglichen Strahlen verlaufen.

Ein Galilei-Fernrohr erzeugt also kein Zwischenbild, sondern vergrößert lediglich den Sehwinkel, unter dem der betrachtete Gegenstand erscheint. Die Vergrößerung V eines Galilei-Fernrohrs kann – ebenso wie bei einem Kepler-Fernrohr – anhand der (positiven) Brennweiten f_{Obj} und f_{Ok} der beiden Linsen berechnet werden:

$$V_G = \frac{f_{\text{Obj}}}{f_{\text{Ok}}} \quad (115)$$

Die Mindestlänge l_G eines Kepler-Fernrohrs ist gleich der Differenz der Brennweiten des Objektivs und Okulars, also $l_G = f_{\text{Obj}} - f_{\text{Ok}}$. Der Grund hierfür ist, dass die Brennweite der Okularlinse so gewählt wird, dass die Brennpunkte beider Linsen zusammenfallen. Auf diese Weise werden parallel einfallende Lichtstrahlen beim Durchlaufen des Fernrohrs wiederum auf parallele Strahlen abgebildet.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Wellenoptik

Unter bestimmten Bedingungen zeigt Licht Welleneigenschaften, die mit dem vereinfachten Modell von „Lichtstrahlen“ nicht erklärbar sind. Um beispielsweise auch Farbspektren, Interferenz- und Polarisationserscheinungen beschreiben zu können, geht man in der „modernen“ Optik von einem Wellenmodell des Lichts aus.

Lichtbeugung und Interferenz

Wird Licht durch die Öffnung einer Blende so begrenzt, dass nur ein schmales Lichtbündel die Blende passieren kann, so dürfte gemäß der Strahlenoptik kein Licht außerhalb dieses Bündels auftreten. Tatsächlich weicht die Ausbreitungsrichtung des Lichts allerdings vom geradlinigen Verlauf ab, so dass an nahezu allen Stellen hinter der Blende eine gewisse Menge an Licht anzutreffen ist. Man sagt, dass Licht, ähnlich wie eine Wasserwelle, an den Kanten eines Hindernisses „gebeugt“ wird.

Das Huygensche Prinzip

Im Jahr 1678 veröffentlichte [Christian Huygens](#) ein Buch zur Wellentheorie des Lichts. Darin beschrieb er unter anderem das heute nach ihm benannte Prinzip der Elementarwellen:

Jeder Punkt einer Wellenfront stellt selbst wiederum einen Ausgangspunkt für eine neue, kreisförmig in alle Richtungen verlaufende Welle dar. Die einzelnen Wellen überlagern sich dabei zur nächsten Wellenfront.

Die Senkrechte auf den Wellenfronten entspricht der Ausbreitungsrichtung der Welle.

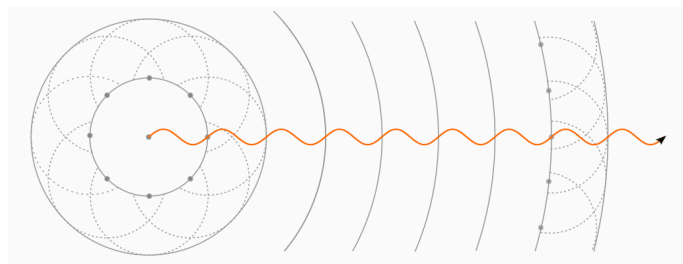


Abb. 141: Lichtwelle und Wellenfronten nach dem Huygenschen Prinzip der Elementarwellen.

Unter einer Wellenfront versteht man die Menge aller Punkte, die zu einem bestimmten Zeitpunkt eine gleiche Phasenlage aufweisen, also beispielsweise zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Wellenberg darstellen. Das Huygensche Prinzip kann also als eine Art geometrische Konstruktionshilfe aufgefasst werden, die beispielsweise zum Zeichnen der Ausbreitung einer Welle genutzt werden kann. Ist eine gleichmäßig verlaufende Welle weit vom ursprünglichen Erregerzentrum entfernt, so verlaufen die Wellenfronten beziehungsweise die Ausbreitungsrichtungen nahezu geradlinig und parallel.

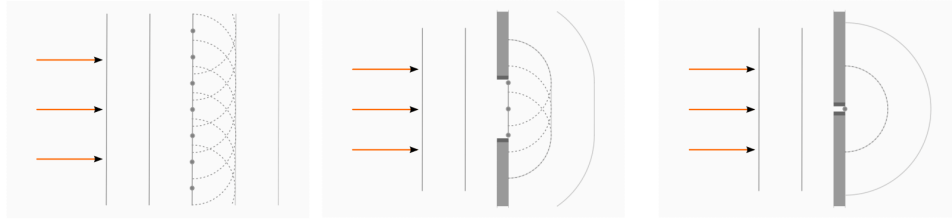


Abb. 142: Beugungsmuster von Lichtwellen.

Trifft eine Wellenfront hingegen auf ein (nicht zu kleines) Hindernis, beispielsweise den Rand einer Blende, so tritt eine Beugung des Lichts auf. Das Licht kann sich dabei auch in Bereiche hinein ausbreiten, die nach der Strahlentheorie dunkle „Schattenräume“ darstellen würden. Wohl am deutlichsten zeigt sich diese Eigenschaft an einem dünnen Spalt, dessen Breite in etwa so groß wie die Wellenlänge der eintreffenden Wellen ist. In diesem Fall entstehen hinter der Öffnung erneut kreisförmig verlaufende Wellen, welche die Spaltöffnung der Blende als gemeinsames Zentrum haben.¹

Beugung und Interferenz an einem Doppelspalt

Hat eine Blende zwei schmale, im Abstand s_D voneinander entfernte Öffnungen, so teilt sich eine einfallende Lichtwelle hinter der Blende in zwei kreisförmige, von den beiden Öffnungen aus verlaufende Wellen auf. Diese Wellen überlagern sich, so dass es an bestimmten Stellen zu konstruktiver, an anderen Stellen zu destruktiver Interferenz kommt. Bestrahlt man den Doppelspalt beispielsweise mit einem Laser und bringt in einigen Metern hinter der Blende einen optischen Schirm an, so lässt sich auf diesem ein hell-dunkles Streifenmuster in der Farbe des Lasers erkennen.

Um dieses Interferenzmuster erklären zu können, muss die Phasenlage der beiden vom Spalt ausgehenden Lichtwellen betrachtet werden. An ihren Ausgangspunkten haben beide die gleiche Phase, da eine aus weiter Entfernung senkrecht eintreffende Lichtwelle beide Spalte gleichzeitig erreicht. Bei einfarbigem Licht weisen beide Wellen zudem eine gleiche Wellenlänge λ auf. Der einzige Unterschied zwischen beiden Wellen liegt somit darin, dass sie von zwei unterschiedlichen Zentren ausgehen und daher, von einem Blickwinkel α aus gesehen, einen so genannten „Gangunterschied“ Δs aufweisen. Damit ist gemeint, dass eine der beiden Wellen zu Beginn ihrer Ausbreitung eine um Δs längere Wegstrecke zurücklegen muss.

Ist der Gangunterschied Δs gleich einer ganzen Wellenlänge λ , so verlaufen die Lichtwellen anschließend in stets gleicher Phase, es tritt also konstruktive Interferenz auf. Die Bedingung für ein Intensitätsmaximum ist ebenso erfüllt, wenn der Gangunterschied Δs ein ganzzahliges Vielfaches $k = 1, 2, 3, \dots$ der Wellenlänge λ beträgt:

¹ Streng genommen ist dieses Modell, dass hinter einem sehr dünnen Spalt *ein* kreisförmiges Wellenzentrum entsteht, falsch. Tatsächlich gelangen durch jeden noch so dünnen Spalt mehrere Wellen parallel hindurch, die ebenfalls untereinander die Interferenz-Erscheinungen zeigen. Die Vorstellung ist dennoch ein hilfreiches Modell für die Erklärungen der Interferenzen am Doppelspalt und an optischen Gittern.

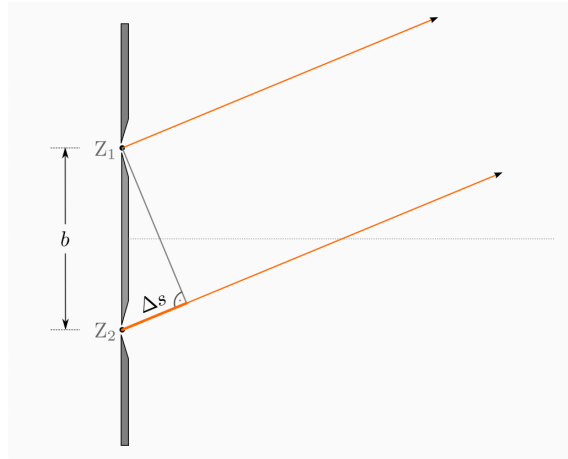


Abb. 143: Lichtbeugung und Interferenz am Doppelspalt.

$$\Delta s = k \cdot \lambda \quad (116)$$

Entlang der Mittellinie tritt (für beliebige Wellenlängen) an allen Stellen konstruktive Interferenz ein, da alle Punkte auf dieser Linie von beiden Spaltöffnungen gleich weit entfernt sind, der Gangunterschied für beide Wellen somit gleich Null ist. Das zugehörige Helligkeitsmaximum wird auch als „nulltes Maximum“ bezeichnet, da es dem Gangunterschied $\Delta s = 0 \cdot \lambda$ entspricht.

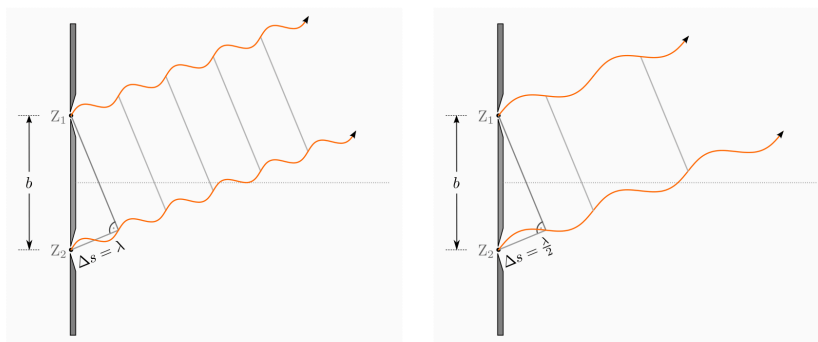


Abb. 144: Konstruktive und destruktive Interferenz am Doppelspalt in Abhängigkeit von der Wellenlänge.

Ist der Gangunterschied Δs hingegen gleich der Hälfte der Wellenlänge λ (oder einem ungeradzahligen Vielfachen), so verlaufen die Lichtwellen anschließend in Gegenphase, es tritt also destruktive Interferenz auf.

Wie weit die hellen und dunklen Streifen auf dem Schirm auseinander liegen bzw. unter welchen Winkeln α_k sie erscheinen, ist somit von der Wellenlänge λ abhängig. Bezüglich des Winkels α_k gelten zudem folgende geometrische Beziehungen:

- Der Abstand $s \approx 5 \text{ m}$ zwischen dem Doppelspalt und dem Schirm ist sehr viel größer als der Abstand $b \approx 0,1 \text{ mm}$ der beiden Spaltöffnungen voneinander; vom

Schirm aus gesehen erscheinen beide Spaltöffnungen in sehr guter Näherung unter dem gleichen Winkel α . Somit gilt:

$$\tan \alpha = \frac{a}{s}$$

Dabei bezeichnet a den Abstand des auf dem Schirm betrachteten Maximums von der Mittellinie.

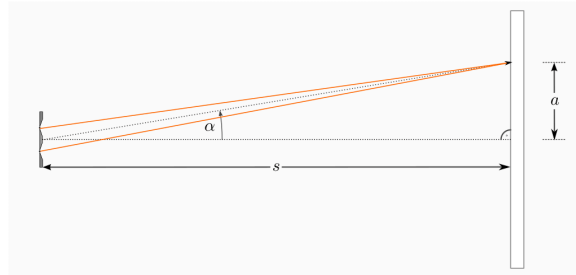


Abb. 145: Struktureller Zusammenhang zwischen dem Betrachtungswinkel α , dem Schirmabstand s und dem Abstand a eines Maximums von der Mittellinie.

- Betrachtet man in der obigen Abbildung das an den beiden Spaltöffnungen anliegende, rechtwinklige Dreieck, so kann man folgenden Zusammenhang zwischen dem Winkel α , dem Spaltabstand b und dem Gangunterschied Δs erkennen:

$$\sin \alpha = \frac{\Delta s}{b}$$

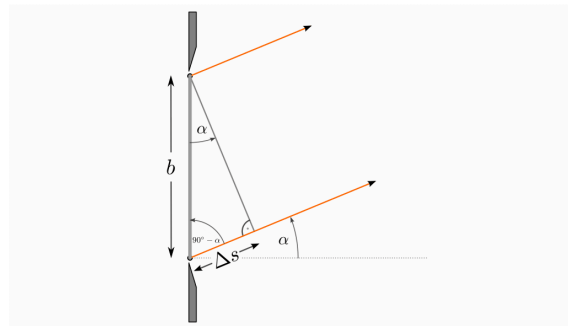


Abb. 146: Struktureller Zusammenhang zwischen dem Betrachtungswinkel α , dem Gangunterschied Δs und dem Doppelspaltabstand b .

Da der Winkel α bei fast allen Doppelspalt-Versuchen sehr klein ist ($\alpha < 5^\circ$), kann in sehr guter Näherung folgende Kleinwinkelnäherung verwendet werden:

$$\sin(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{1} \approx \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

Mit dieser Näherung für kleine Winkel lassen sich die obigen Zusammenhänge und die Bedingung (116) für Intensitätsmaxima zu einer einzigen Formel zusammenfassen:

$$\Delta s = \frac{a \cdot b}{s} = k \cdot \lambda$$

beziehungsweise, wenn man die Wellenlänge des Lichts bestimmen möchte:²

$$\lambda = \frac{a \cdot b}{k \cdot s} \quad (117)$$

Ist der Doppelspalt-Abstand b bekannt, so kann man also mittels einer einfachen Messung der Entfernung s zwischen Doppelspalt und Schirm und des Abstands a eines frei wählbaren Maximums $k = 1, 2, 3, \dots$ von der Mittellinie auf dem Schirm unmittelbar die Wellenlänge des Lichts berechnet werden.

Beispiel:

- Ein Doppelspalt wird mit einem roten Laserstrahl beleuchtet. Bei einem Schirmabstand von $s = 5,00 \text{ m}$ erscheint auf dem Schirm das $k = 3$. Maximum in einem Abstand $a = 0,10 \text{ m}$ von der Mittellinie. Hat die dabei verwendete Blende einen Doppelspaltabstand von $b = 0,1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$, so gilt für die Wellenlänge des Lichts:

$$\lambda = \frac{a \cdot b}{k \cdot s} = \frac{10^{-1} \text{ m} \cdot 10^{-4} \text{ m}}{3 \cdot 5 \text{ m}} \approx 667 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Die Wellenlänge des roten Laserlichts beträgt somit rund 667 nm .

Beugung und Interferenz an einem Gitter

In der Praxis verwendet man anstelle eines Doppelspalts üblicherweise ein optisches Gitter. Ein solches besteht aus sehr vielen spaltartige Öffnungen, die regelmäßig im geringem Abstand voneinander angeordnet sind. Gute optische Gitter können etwa eine Anzahl von $N = 1000$ Spalten je Millimeter aufweisen. Für den Abstand g zwischen den den lichtdurchlässigen Bereichen gilt somit:

$$g = \frac{1}{N}$$

Der Gitterabstand beträgt für $N = 1000 \frac{1}{\text{mm}} = 1 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{m}}$ genau $g = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, also einen Mikrometer. Diese „Feinheit“ bewirkt, dass die einzelnen Interferenzmaxima um einen größeren Winkel α aufgefächert werden und so auf dem Schirm weniger „verschmieren“. Sie können auf dem Schirm, etwas umgangssprachlich formuliert, in besserer Auflösung betrachtet werden.

Für die Lichtbeugung an einem optischen Gitter gelten grundsätzlich die gleichen Gesetzmäßigkeiten und Formeln wie bei der Lichtbeugung an einem Doppelspalt; es muss lediglich statt des Doppelspaltsabstands b der Gitterabstand g in die jeweilige Formel eingesetzt werden. Die Wellenlänge eines am Gitter interferierenden, einfarbigen Lichtstrahls kann also – in Analogie zu Gleichung (117) – unmittelbar anhand des Gitterabstands g , dem Abstand s zwischen Gitter und Schirm und dem Abstand a des $k = 1, 2, 3, \dots$ -ten Maximums von der Mittellinie bestimmt werden:

² Auf diese Weise bestimmte [Thomas Young](#) im Jahr 1802 erstmals die Wellenlänge eines einfarbigen Lichtstrahls.

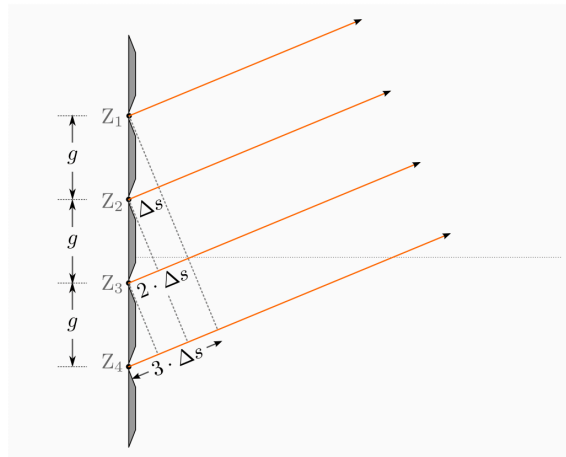


Abb. 147: Lichtbeugung und Interferenz am optischen Gitter.

$$\lambda = \frac{a \cdot g}{k \cdot s} \quad (118)$$

Verwendet man für Interferenzversuche an einem optischen Gitter *kein* Laserlicht, sondern ein anderes monochromatisches Licht, so muss das auf das Gitter einfallende Lichtstrahl zuvor durch einen einzelnen dünnen Spalt (eine schmale Blende) begrenzt werden. Die Spaltöffnung wirkt in diesem Fall in guter Näherung wie eine einzige punktförmige Lichtquelle, so dass die einzelnen Lichtwellen hinter dem Spalt eine (nahezu) konstante Phasenlage zueinander aufweisen, und somit einzelne Wellen gleicher Wellenlänge jeweils *kohärent* sind. Bei der Verwendung von Lasern kann die spaltartige Blende vor dem Gitter weggelassen werden, da Laser aufgrund ihres besonderen Aufbaus bereits von sich aus kohärentes Licht erzeugen.

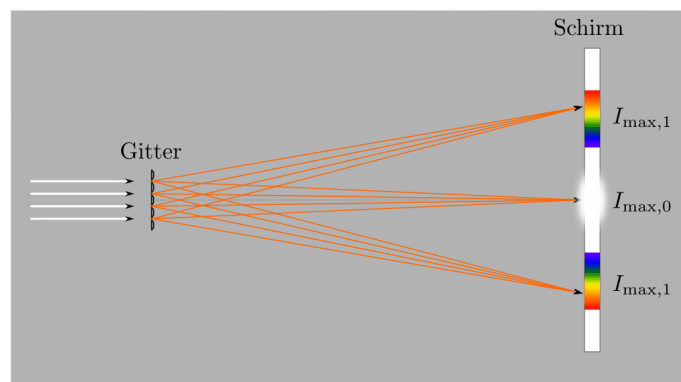


Abb. 148: Interferenzmaxima am optischen Gitter.

Verwendet man weißes Licht als Lichtquelle, das mehrere Farbanteile hat, so fächern sich diese an den Stellen der maximalen Intensitäten auf dem Schirm zu regenbogenartigen Spektren auf; sind manche Wellenlängen in der Lichtquelle nicht enthalten, so bleiben die jeweiligen Stellen im Spektrum dunkel. Nach Gleichung (118) ist die Ablenkung proportional zur Wellenlänge ($a = \frac{k \cdot s}{g} \cdot \lambda$), blaues Licht wird also weniger stark abgelenkt als rotes. Diese Eigenschaft wird beispielsweise zur so genannten Spektralanalyse genutzt.

Lichtdispersion

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in einem optischen Medium ist nicht nur von dessen Brechungsindex, sondern auch von der Lichtfrequenz abhängig. Die unterschiedlichen Spektralanteile werden dadurch beispielsweise beim Durchgang durch ein Prisma unterschiedlich stark gebrochen, so dass sich mittels eines Prismas weißes Licht in seine Farbanteile aufteilen lässt.³

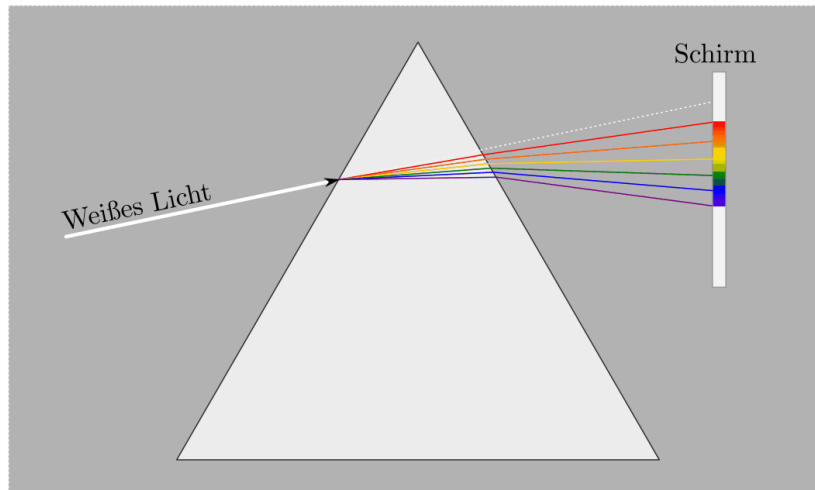


Abb. 149: Lichtdispersion bzw. Spektralzerlegung in einem Prisma.

Technisch lässt sich dieses Prinzip der Spektralzerlegung auf zwei Arten nutzen:

- Bei einem „Monochromator“ wird anstelle eines Schirms eine Blende mit schmaler Öffnung angebracht. Dadurch wird nur ein schmaler Bereich (quasi eine einzelne Farbe) des Spektrums für weitere Versuchszwecke aus dem Lichtspektrum herausgefiltert.
- Bei einem „ref:Prismen-Spektrometer <Spektrometer>“ werden die Lichtanteile des Spektrums anhand einer Skala mit den Lichtanteilen bekannter Lichtquellen verglichen. Eine vergleichsweise einfache Kalibrierung wie bei einem optischen Gitter ist jedoch nicht möglich, da die Dispersion nicht linear mit der Lichtfrequenz bzw. der Wellenlänge zusammenhängt.

Bei einem Prisma, dessen Funktionsprinzip auf der Dispersion des Lichts beruht, wird blaues Licht stärker von der ursprünglichen Richtung abgelenkt als rotes; genau umgekehrt ist es bei einem optischen Gitter. Ein weiterer Unterschied zwischen diesen beiden Arten der Spektralzerlegung besteht darin, dass ein Prisma im Gegensatz zu einem optischen Gitter nur *ein* Spektrum erzeugt, das allerdings lichtintensiver ist als die einzelnen Gitterspektren.

³ Das in Abbildung *Lichtdispersion (Prisma)* dargestellte Spektrum soll die Aufgliederung der Farben schematisch verdeutlichen, ist dabei jedoch nicht maßstabsgetreu gezeichnet. In Luft betragen die Wellenlängen für rotes Licht 780 bis 640 nm, für oranges Licht 640 bis 600 nm, für gelbes Licht 600 bis 580 nm, für grünes Licht 580 bis 495 nm, für blaues Licht 495 bis 440 nm und für violettes Licht 440 bis 380 nm.

Zur Spektralanalyse werden im Allgemeinen dennoch bevorzugt Gitter eingesetzt, zum einen aufgrund ihrer leichteren Kalibrierbarkeit, vor allem jedoch aufgrund der größeren Auffächerung bzw. der besseren „Auflösung“ beim Betrachten der einzelnen Spektrallinien.

Photometrie

Die Farbwahrnehmung des Menschen

Die menschliche Farbwahrnehmung beruht auf speziellen Sinneszellen, die sich auf der Netzhaut des Auges befinden. Insgesamt hat ein Mensch rund 125 000 000 so genannte Zäpfchen, die für das Farb-Sehen sorgen, und rund 7 000 000 so genannte Stäbchen, die auf eine Hell-Dunkel-Wahrnehmung ausgerichtet sind.

Bei den Zäpfchen gibt es drei verschiedene Typen, die ihre maximale Empfindlichkeit im roten, grünen oder blauen Farbbereich haben. Jede derartige Sinneszelle hat ihre maximale Empfindlichkeit bei einer bestimmten Wellenlänge, bei größeren oder kleineren Wellenlängen nimmt die Empfindlichkeit stetig ab. Insgesamt umfasst der menschliche Farbwahrnehmungsbereich ein Wellenlängen-Spektrum von ca. 380 nm bis 680 nm.

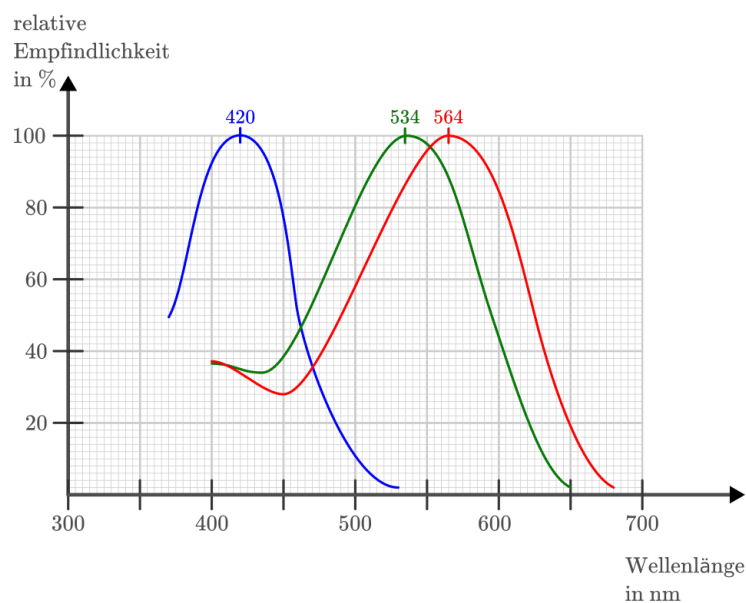


Abb. 150: Relative Empfindlichkeit der Zäpfchen für blaues, grünes und rotes Licht beim menschlichen Auge.

Additive und subtraktive Farbmischung

Das Gehirn kombiniert die einzelnen Sinneseindrücke für rotes, grünes und blaues Licht zu einer wahrgenommenen Gesamtfarbe. Nehmen wir alle drei Farben gleichzeitig wahr, so empfinden wir das Licht als weiß. Fehlt ein Farbanteil, so wird das Licht als Mischfarbe der beiden anderen Farben empfunden. Bei dieser „additiven“ Farbmischung sind die

Grundfarben also Rot, Grün und Blau. Eine Mischung von Rot und Grün ergibt Gelb, eine Mischung von Rot und Blau ergibt Magenta, eine Mischung von Grün und Blau ergibt die Farbe Cyan.

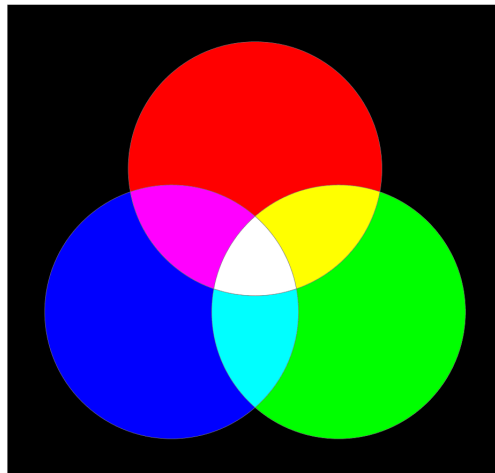


Abb. 151: Farbkombinationen bei einer additiven Farbmischung.

Additive Farbmischung tritt beispielsweise bei mehrfarbigen Leuchtdioden (LEDs) auf. Lässt man eine Duo-LED gleichzeitig Rot und Grün leuchten, so ergibt sich ein gelblicher Farbton. Dieser Effekt wird nicht nur bei Computer-Displays verwendet, sondern tritt allgemein immer dann auf, wenn ein Material in einer Lichtquelle zum Leuchten angeregt wird. Beobachtet man ein so genanntes Emissions-Spektrum beispielsweise einer Leuchtstoffröhre, so erkennt man einzelne Farbanteile, die sich in der Summe zu einem weißlichen Licht addieren.

Neben der additiven Farbmischung kennt man vom Malen mit Wasserfarben auch die „subtraktive“ Farbmischung. Wird ein Farbanteil des weißen Lichts von einem Material absorbiert, so wird die Mischung der restlichen Farbanteile („Komplementärfarbe“) reflektiert und vom Auge wahrgenommen. Die Grundfarben dieser subtraktiven Farbmischung sind Gelb, Rot und Blau. Bei einer Mischung aus Gelb und Rot entsteht Orange, bei einer Mischung von Gelb und Blau entsteht Grün, und bei einer Mischung aus Rot und Blau entsteht Violett. Mischt man alle Grundfarben, so ergibt sich bei einer vollen Deckkraft die Farbe schwarz.

Subtraktive Farbmischung tritt ebenso auf, wenn weißes Licht durch ein transparentes, aber gefärbtes optisches Medium geht (beispielsweise eine Sonnenbrille). Beobachtet man ein sich so ergebendes Absorptionsspektrum, so hinterlassen die absorbierten Farben im Farbspektrums schwarze Linien (oder sogar schwarze Bereiche). Auf diese Weise kann beobachtet werden, welche Lichtanteile „herausgefiltert“ werden, was Rückschlüsse auf Materialeigenschaften oder chemische Substanzen zulässt.

Tag- und Nachtsehen

Die Zäpfchen für die rote, grüne und blaue Farbwahrnehmung sind nicht gleichmäßig auf der Netzhaut verteilt. Während sich im zentralen Bereich der Netzhaut überwiegend Zäpfchen für rotes und grünes Licht befinden, gibt es im äußeren Bereich der Netzhaut mehr

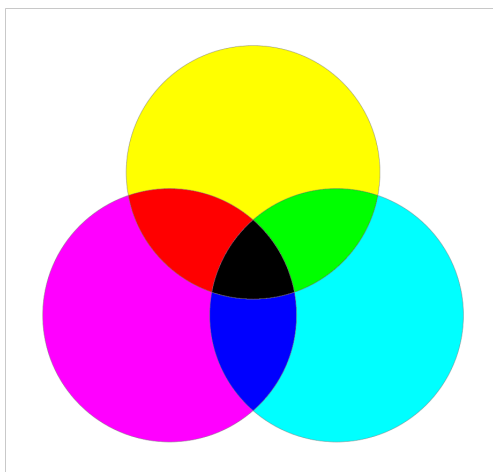


Abb. 152: Farbkombinationen bei einer subtraktiven Farbmischung.

blaue Zäpfchen. Bei hoher Helligkeit ist die Pupille als Blende eher geschlossen (klein), so dass das einfallende Licht vorwiegend im zentralen Bereich der Netzhaut auftrifft. Bei dem so genannten „Tagsehen“ hat das menschliche Auge die höchste Empfindlichkeit bei einer Wellenlänge von 555 nm, also im grünen Farbbereich.

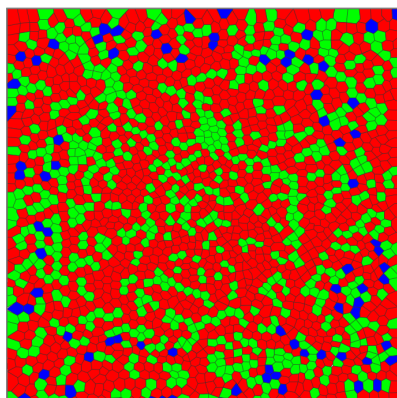


Abb. 153: Verteilung der für rote, grüne und blaue Farbnehmung zuständigen Zäpfchen auf der Netzhaut.

Bei zunehmender Dunkelheit vergrößert sich die Pupille, so dass mehr Licht in das Auge gelangen kann. Dabei trifft ein größerer Lichtanteil auf die äußeren Bereiche der Netzhaut. In diesem Fall tragen die am sensibelsten auf Licht reagierenden Zäpfchen für blaues Licht stärker zur gesamten Lichtempfindlichkeit des Auges bei. Die höchste Empfindlichkeit verschiebt sich bei dem so genannten „Nachtsehen“ zu einer Wellenlänge von 507 nm.

Lichttechnische Einheiten

In der Optik sind insgesamt acht lichttechnische Einheiten üblich. Aus historischen Gründen wird nach wie vor das Candela als Lichtstärke einer gewöhnlichen Kerze als Standard-Größe verwendet, auch wenn es aus heutiger Sicht sinnvoller erscheint, von der Strahlungs-

leistung einer Lichtquelle, gemessen in Watt, auszugehen. Je nachdem, ob die gesamte Strahlungsleistung einer Lichtquelle gemessen wird, oder nur derjenige Anteil, den sie als Lichtkegel in einen bestimmten Raumwinkel abstrahlt, sind die folgenden beiden Lichtgrößen grundlegend:

- Der Strahlungsfluss Φ gibt an, welche Lichtleistung P_{out} insgesamt von einer Lichtquelle ausgeht:

$$\Phi = P_{\text{out}}$$

Die Einheit des Strahlungsflusses ist Watt (W).

- Die Strahlstärke I gibt denjenigen Anteil $\Delta\Phi$ der Lichtleistung an, die eine Lichtquelle in den Raumwinkel $\Delta\Omega$ abstrahlt:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}$$

Die Einheit der Strahlstärke ist Watt je Steradian ($\frac{\text{W}}{\text{sr}}$).

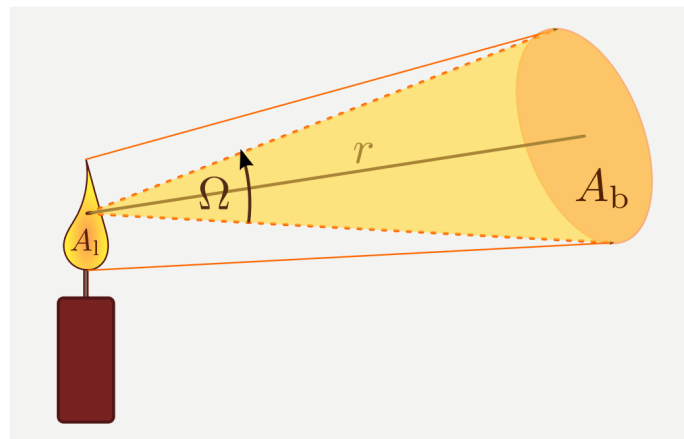


Abb. 154: Beleuchtete und leuchtende Fläche als Bezugsgrößen bei der Definition der Bestrahlungsstärke und Strahldichte.

Diese zwei Größen werden als nächstes in Bezug zur beleuchteten beziehungsweise leuchtenden Fläche gesetzt. Damit ergeben sich folgende zwei weitere Einheiten:

- Die Bestrahlungsstärke E gibt an, wie viel Watt an Lichtleistung auf eine beleuchtete Fläche A_b auftreffen:

$$E = \frac{\Phi}{A_b}$$

Die Einheit der Bestrahlungsstärke ist Watt je Quadratmeter ($\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$).

- Die Strahldichte L gibt an, wie viel Watt an Lichtleistung von einer leuchtenden Fläche A_1 im Raumwinkel Ω ausgehen:

$$L = \frac{I}{A_1}$$

Die Einheit der Strahldichte ist Watt je Quadratmeter und Steradian ($\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{sr}}$).

Die obigen Größen beziehen sich allgemein auf die abgestrahlte Leistung einer Lichtquelle. Das menschliche Auge allerdings ist nicht für alle Lichtfrequenzen (Farben) gleich empfindlich: Im grünen Farbbereich ($\lambda \approx 555 \text{ nm}$) ist das Auge beim Tagsehen am empfindlichsten.

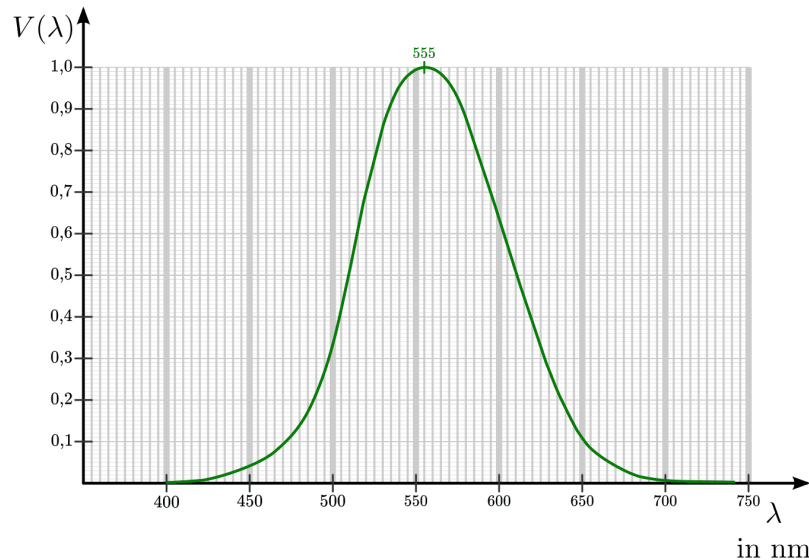


Abb. 155: Spektrale Empfindlichkeit des Auges beim Tagsehen.

Um das Helligkeitsempfinden des menschlichen Auges zu berücksichtigen, werden die vier obigen Größen jeweils mit einem von der Wellenlänge abhängigen Faktor $K(\lambda)$ multipliziert, der die spektrale Empfindlichkeit des Auges angibt:

$$K(\lambda) = V(\lambda) \cdot K(\lambda_{\max}) \quad (119)$$

Der Gewichtungsfaktor $V(\lambda)$ hat keine Einheit, sein Wert liegt zwischen 0 und 1. Der zweite Faktor $K(\lambda_{\max})$, auch photometrischen Äquivalent genannt, ist für das Tagsehen auf $K(\lambda_{\max}) = 683 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$ festgelegt. Dieser Wert wurde so gewählt, weil bei dieser Strahlungsleistung eine monochromatische Lichtquelle mit $\lambda = 555 \text{ nm}$ Wellenlänge als ebenso hell empfunden wird wie eine Lichtquelle mit einer Lichtstärke von 1 Candela.¹

- Für den Lichtstrom Φ_ν gilt:

$$\Phi_\nu = K(\lambda) \cdot \Phi$$

Die Einheit des Lichtstroms ist Lumen (lm). Es gilt:

$$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$$

¹ Tatsächlich konnte auf diese Weise die zunächst sehr willkürliche Einheit Candela („Helligkeit einer üblichen Kerze“) nachträglich präzise festgelegt werden: 1 Candela ist inzwischen als diejenige Lichtstärke definiert, die von einer monochromatischen Lichtquelle mit einer Wellenlänge von 555 nm und einer Strahlstärke von $\frac{1}{683} \frac{\text{W}}{\text{sr}}$ abgegeben wird.

Für das Nachtsehen ist $\lambda_{\max} = 507 \text{ nm}$ und $K(\lambda_{\max}) = 1699 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$.

- Für die Lichtstärke I_ν gilt:

$$I_\nu = K(\lambda) \cdot I$$

Die Einheit der Lichtstärke ist die SI-Basiseinheit Candela (cd).

- Für die Beleuchtungsstärke E_ν gilt:

$$E_\nu = K(\lambda) \cdot E$$

Die Einheit der Beleuchtungsstärke ist Lux (lx). Es gilt:

$$1 \text{ lx} = 1 \frac{\text{cd} \cdot \text{sr}}{\text{m}^2}$$

- Für die Leuchtdichte L_ν gilt:

$$L_\nu = K(\lambda) \cdot L$$

Die Einheit der Beleuchtungsstärke ist Nit (nt). Es gilt:

$$1 \text{ nt} = 1 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$$

Funktionsprinzip von Spektrometern

Das, was man üblicherweise als (farbiges) „Licht“ bezeichnet, ist nur ein kleiner Teil des Spektrums elektromagnetischer Strahlung. In der folgenden Abbildung ist dies schematisch dargestellt.

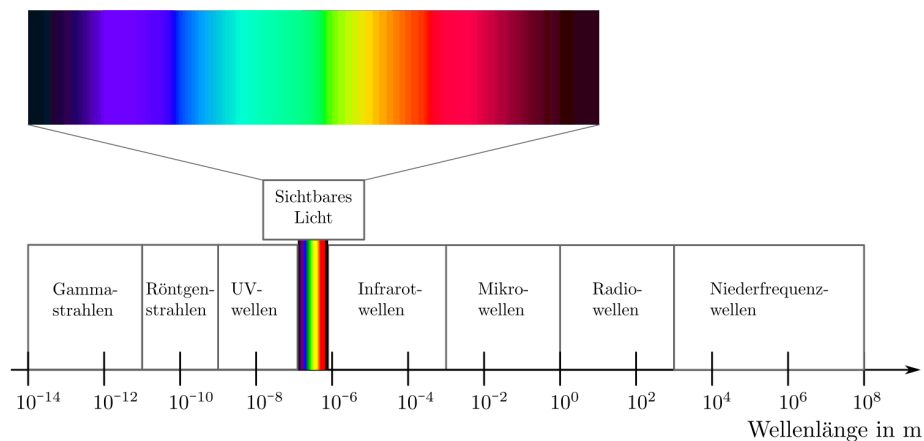


Abb. 156: Spektrum des Lichts und der elektromagnetischen Wellen.

Sonnenlicht enthält Licht aus dem gesamten sichtbaren Farbspektrum, es erscheint uns daher, wie bereits oben beschrieben, als weiß. Trifft ein dünner Lichtstrahl weißen Lichts auf ein *Prisma* oder ein *optisches Gitter*, so wird er in seine Spektralfarben aufgefächert; das Licht erscheint als Regenbogen.

Mittels einer fein eingestellten Blende kann man damit gezielt Licht mit einer bestimmten Wellenlänge aus dem Spektrum auswählen. Man erhält somit eine einfarbige („monochromatische“) Lichtquelle, allerdings mit einstellbarer Wellenlänge. Strahlt man nun mit einer derartigen Lichtquelle auf eine Material-Probe (welche oftmals in gelöster Form vorliegt und daher in eine Glas-Küvette gegeben wird), so wird das Licht von dieser je nach Substanz der Probe unterschiedlich stark absorbiert. Misst man die Absorption der Probe bei verschiedenen Wellenlängen, so erhält man ein für die jeweilige Substanz charakteristisches Bild, also quasi einen „Fingerabdruck“ der Probe.

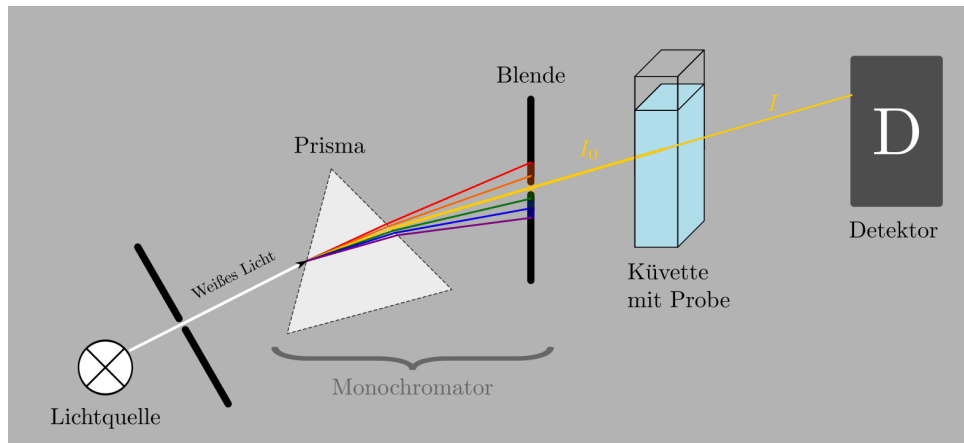


Abb. 157: Schematischer Aufbau eines Spektrometers

Ein Spektrometer, wie es heute zur Materialanalyse genutzt wird, besteht also im Wesentlichen aus vier Teilen:

Einer Lichtquelle, Monochromator, Probe und Detektor.

- Eine **Lichtquelle**, in der Regel eine Halogenlampe, sendet weißes („polychromatisches“) Licht aus.
- Ein **Monochromator** „zerlegt“ dieses Licht in monochromatisches Licht, also Strahlung einer bestimmten, einstellbaren Wellenlänge. Die Zerlegung kann entweder mittels eines Prismas oder mittels eines optischen Gitters erfolgen.

Ein Prisma erzeugt nur *ein* Spektrum und ermöglicht daher eine höhere Leuchtkraft, ist aber nur schwer kalibrierbar. Ein optisches Gitter fächert das Licht in eine Vielzahl von Einzel-Spektren auf, ist dafür jedoch aufgrund des bereits im Abschnitt *Wellenoptik* beschriebenen Zusammenhangs wesentlich einfacher kalibrierbar.

Mittels einer schmalen, verschiebbaren Blende kann gezielt eine Lichtfarbe beziehungsweise ein nur sehr schmaler Bereich von Wellenlängen selektiert werden.

- Die **Probe**, häufig in einer Flüssigkeit gelöst, absorbiert einen Teil des Lichts. Während die die Lichtstärke des vom Monochromator ausgehenden Strahls noch I_0 beträgt, verlässt der Strahl die Probe mit einer verringerten Intensität I .
- Ein **Detektor** misst die durch die Probe gehende Intensität der Lichtstrahlung und leitet die gemessenen Daten zur Auswertung an einen Computer weiter.

Das Lambert-Beersche Gesetz

Mit einem Spektrometer wird gemessen, wie stark Licht bei einer genau festgelegten Wellenlänge beim Durchgang durch eine mit einer flüssigen Probe gefüllten Küvette geschwächt wird. Beim Durchgang durch die Lösung wird das Licht exponentiell geschwächt, denn die in einer bestimmten „Schichttiefe“ absorbierte Lichtmenge ist proportional zur dort vorhandenen Lichtmenge. Immer, wenn die Änderung einer Größe proportional zum jeweiligen Wert der Größe ist, lässt sich die Zu- beziehungsweise Abnahme der Größe mittels einer Exponentialfunktion beschreiben.

Der Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Intensität I_0 des Lichts vor der Probe und der Intensität I , die durch die Probe hindurchgeht beziehungsweise den Schirm erreicht, kann also folgendermaßen beschrieben werden:

$$I = I_0 \cdot e^{-k \cdot d}$$

Hierbei bezeichnet d die Schichtdicke der Probe, also die (innere) Breite der Küvette. Der Proportionalitätsfaktor k heißt „Extinktionskoeffizient“ und hängt von der Art und Konzentration der flüssigen Probe sowie von der Wellenlänge des Lichts ab.

Die Schwächung („Extinktion“) des Lichts ergibt sich aus dem Quotienten von I und I_0 :

$$\frac{I}{I_0} = e^{-k \cdot d}$$

Bildet man auf beiden Seiten dieser Gleichung den Kehrwert, so erhält man die Extinktion $\frac{I_0}{I}$:

$$\frac{I_0}{I} = e^{k \cdot d}$$

Um diese Gleichung nach dem Extinktionskoeffizienten k auflösen zu können, müssen beide Seiten der Gleichung **logarithmiert** werden. Man erhält:

$$\ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = k \cdot d$$

Üblicherweise wird in der Photometrie nicht mit dem natürlichen Logarithmus, sondern mit dem dekadischen gerechnet; für die Umrechnung gilt:

$$\begin{aligned} \log_{10}\left(\frac{I_0}{I}\right) &= \frac{\ln\left(\frac{I_0}{I}\right)}{\log_{10}(e)} \approx 0,43 \cdot \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) \\ &= 0,43 \cdot k \cdot d = \varepsilon \cdot c \cdot d \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet man den Faktor ε als molaren dekadischen Extinktionskoeffizient der betreffenden gelösten Substanz für die verwendete Wellenlänge; mit c wird die molare Konzentration der gelösten Substanz angegeben. Dieser Zusammenhang, dass die Konzentration des gelösten Stoffes proportional zum Logarithmus der Extinktion $\frac{I_0}{I}$ ist, wird nach ihren Entdeckern **Lambert-Beer'sches-Gesetz** genannt.

Spektralanalyse

Die Spektralanalyse ist, wie bereits erwähnt, ein wichtiges Verfahren zur Identifikation und/oder Konzentrationsbestimmung unbekannter Substanzen.

Kontinuierliche und diskrete Spektren

Emissions- und Absorptionsspektren

... to be continued ...

Wärmelehre

Die Wärmelehre (auch „Thermodynamik“ genannt) ist die Wissenschaft der Zustandsänderungen von Körpern durch Zufuhr oder Abgabe von Wärme, sowie der Energieumwandlungen, bei denen Wärme beteiligt ist.

Temperatur und Wärme

Die Temperatur kennzeichnet den Wärmezustand eines Körpers, das heißt die mittlere Bewegungsenergie seiner Teilchen.

- *Makroskopische* Betrachtungsweise:

Jeder Körper besitzt direkt beobachtbare Eigenschaften. Die Temperatur eines Körpers wird durch die von ihm aufgenommene oder abgegebene Wärmemenge charakterisiert.

- *Mikroskopische* Betrachtungsweise:

Jeder Körper ist aus Teilchen aufgebaut, die in ständiger Bewegung sind. Der Wärmezustand eines Körpers wird durch eine bestimmte (mittlere) Geschwindigkeit dieser Teilchen charakterisiert.

Beide Betrachtungsweisen sind gleichermaßen gültig.

Abgeschlossene und isolierte Systeme

Ein System ist ein (zumindest gedanklich) von seiner Umgebung abgetrennter Bereich. Je nach Art der Grenzen eines Systems von seiner Umgebung unterscheidet man zwischen verschiedenen Arten von Systemen:

- Ein offenes System kann sowohl Energie wie auch Materie mit seiner Umgebung austauschen. Beispiele hierfür sind der menschliche Körper oder ein Verbrennungsmotor eines Kraftfahrzeugs. Physikalische Vorgänge in offenen Systemen sind meist schwierig zu berechnen, da hierfür die Materie- beziehungsweise Energieströme numerisch modelliert werden müssen.
- Ein geschlossenes System kann Energie, aber keine Materie mit seiner Umgebung austauschen. Beispiele hierfür sind Sonnenkollektoren, Kühlschränke oder Wärmepumpen.

- Ein isoliertes System kann weder Energie noch Wärme mit seiner Umgebung austauschen. In der Praxis lässt sich ein solches System kaum realisieren, doch stellen gut isolierte, verschlossene Thermosgefäße eine gute Näherung für ein solches System dar.

In den folgenden Kapiteln werden ausschließlich physikalische Eigenschaften von abgeschlossenen oder isolierten Systemen behandelt.

Zustands- und Prozessgrößen

In der Wärmelehre gibt bestimmte physikalische Größen, die den Zustand eines Systems beschreiben, beispielsweise Volumen, Druck oder Temperatur. So kann beispielsweise die Dichte eines Gases direkt mittels gegebenen Volumen-, Druck- und Temperaturwerten berechnet werden.

Weitere physikalische Größen, wie die von einem System aufgenommene oder abgegebene Wärmemenge oder eine am System oder vom System verrichtete mechanische Arbeit sind so genannte Prozessgrößen. Derartige Größen können zwar nicht den Zustand eines Systems charakterisieren, ermöglichen es aber, Vorgänge im System oder Austauschvorgänge mit der Umgebung beschreiben.

Vereinbarungsgemäß wird bei einer an einem thermischen System verrichteten Arbeit als positiv gewertet, wenn diese dem System zugeführt wird, und negativ, wenn diese vom System verrichtet wird. Diese Vorzeichen-Konvention, die ebenso für Wärmemengen gilt, erinnert an ein Bankkonto, in dem Einnahmen positiv und Ausgaben negativ verbucht werden.

In isolierten Systemen erfolgen zwar keine Austausch-Prozesse mit der Umgebung, jedoch können thermodynamische Prozesse auch innerhalb eines Systems stattfinden.

Thermometer

Fast alle Materialien dehnen sich bei Erwärmung aus. Dieses Verhalten der Körper wird genutzt, um Thermometer, d.h. Messgeräte für die Temperatur herzustellen.¹

Beispiele:

- Flüssigkeits-Thermometer zeigen die Temperatur durch die Länge der Flüssigkeitssäule in einem dünnen Glasröhrchen („Kapillare“) an. Sie enthalten meist nur wenig Flüssigkeit, da das Abkühlen oder Erwärmen einer großen Flüssigkeitsmenge (zu) lange dauern würde. Die Kapillare ist oben zugeschmolzen, damit die Flüssigkeit nicht verdunsten kann.

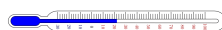


Abb. 158: Aufbau eines Thermometers.

¹ Neben den oben genannten Beispielen kann man die Temperatur eines Körpers auch aufgrund seiner Wärmestrahlung oder mit elektronischen Temperatur-Sensoren bestimmen.

- Bimetall-Thermometer bestehen aus einem Bimetall-Streifen, der zu einer Spirale gebogen ist. Bei Erwärmung erweitert sich die Spirale, bei Abkühlung verengt sie sich. Von der Spirale wird ein Zeiger bewegt, der auf einer Skala die Temperatur anzeigt.

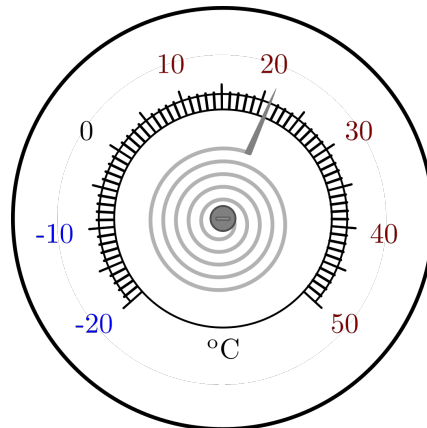


Abb. 159: Aufbau eines Bimetall-Thermometers.

Um mit einem Thermometer konkrete Temperaturmessungen durchführen zu können, müssen die Messwerte anhand einer bestimmten Temperatur-Skala ablesbar sein.

Temperatur-Skalen

Um Temperaturangaben (auch international) vergleichbar zu machen, wurden im Laufe der Geschichte verschiedene Temperatur-Skalen entwickelt. Dabei werden zwei fest vorgegebene Temperaturwerte als „Fixpunkte“ festgelegt, und der Temperaturbereich zwischen beiden Fixpunkten in gleiche Abschnitte unterteilt. Die wichtigsten drei Temperatur-Skalen sind:

- *Celsius*-Skala:

Bei der Celsius-Skala (benannt nach [Anders Celsius](#)) liegt der erste Fixpunkt bei 0 °C und entspricht der Schmelztemperatur von Eis; der zweite Fixpunkt liegt bei 100 °C und entspricht der Siedetemperatur von Wasser.² Temperaturen unter 0 °C werden durch ein vorgesetztes Minuszeichen (–) gekennzeichnet.

- *Kelvin*-Skala:

Bei der Kelvin-Skala (benannt nach [Baron Kelvin](#)) ist der Abstand von Grad zu Grad mit dem der Celsius-Skala identisch. Als unterer (und einziger) Fixpunkt wird bei der Kelvin-Skala jedoch die tiefste physikalisch mögliche Temperatur verwendet. Dieser absolute Nullpunkt liegt bei etwa

² Bei der Festlegung der Fixpunkte wird bei der Celsius-Skala gefordert, dass der Luftdruck dem „Normal-Luftdruck“ (1013,25 hPa) entspricht. Ein Grad Celsius entspricht dann genau $\frac{1}{100}$ des Temperaturabstands zwischen der Schmelz- und Siedetemperatur von Wasser.

-273 °C (exakt: $0\text{ K} = -273,15\text{ °C}$).³ Die Umrechnung zwischen Temperaturen in Celsius (°C) und Kelvin (K) erfolgt nach folgendem Schema:

$$\text{Temperatur in K} = \text{Temperatur in °C} + 273$$

$$\text{Temperatur in °C} = \text{Temperatur in K} - 273$$

Bei der Angabe von Temperaturunterschieden $\Delta T = T_2 - T_1$ sind Grad Celsius und Kelvin gleichwertig.

- *Fahrenheit*-Skala:

Bei der Fahrenheit-Skala (benannt nach **Daniel Fahrenheit**) liegt der erste Fixpunkt bei $32\text{ °F} = 0\text{ °C}$, der zweite Fixpunkt liegt bei $212\text{ °F} = 100\text{ °C}$.⁴ Die Umrechnung zwischen Temperaturen in Celsius (°C) und Fahrenheit (°F) erfolgt nach folgendem Schema:

$$\text{Temperatur in °F} = (\text{Temperatur in °C} \cdot 1,8) + 32$$

$$\text{Temperatur in °C} = (\text{Temperatur in °F} - 32) / 1,8$$

Weltweit wird inzwischen die Celsius-Skala am häufigsten verwendet. Die Kelvin-Skala wird sehr häufig im wissenschaftlichen Bereich genutzt, die Fahrenheit-Skala ist nur (noch) in Amerika und einigen weiteren Ländern in Gebrauch.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Wärmekapazität und Phasenübergänge

Wärme kann als eine Energieform aufgefasst werden. Führt man in einem isolierten System einem Gegenstand eine Wärmemenge Q zu, so erhöht sich dessen Temperatur T . Eine Voraussetzung dafür ist allerdings, dass sich der Aggregatzustand des Gegenstands während der Wärmezufuhr nicht ändert, also kein *Phasenübergang* (Schmelzen, Verdunsten, Sublimieren) stattfindet.

Wärmemenge und Wärmekapazität

Wie viel Wärme bei einem konkreten Gegenstand für eine bestimmte Erwärmung nötig ist, hängt vom Material des Gegenstands und seiner Masse ab: Eine Tasse Wasser benötigt für eine gleiche Erwärmung wesentlich weniger Energie als ein ganzes Schwimmbad. Die

³ Temperaturangaben in K sind somit stets positiv (≥ 0).

⁴ Ursprünglich legte Fahrenheit den unteren Fixpunkt seiner Skala bei 0 °F fest, der bis dato tiefsten Temperatur in seiner Heimatstadt Danzig ($-18,7\text{ °C}$); den oberen Fixpunkt legte er auf 100 °F fest, der „normalen Körpertemperatur eines gesunden Menschen“ (ca. 37 °C). Da beide Werte kaum exakt reproduzierbar waren, ließen sich Thermometer damit nur schwerlich kalibrieren. Um diesen Mangel zu beseitigen, wählte man ebenfalls die Schmelztemperatur (32 °F) und Siedetemperatur (212 °F) des Wassers als neue Fixpunkte. Dadurch konnten die damals weit verbreiteten und „gewohnten“ Temperaturangaben weiter genutzt werden.

Menge an Wärme, die man einem konkreten Gegenstand der Masse m zuführen muss, um ihn um $\Delta T = 1 \text{ K}$ zu erwärmen, wird als Wärmekapazität C des Gegenstands bezeichnet; ihre Einheit ist $\frac{\text{J}}{\text{K}}$. Für die zur Erwärmung nötige Wärmemenge Q gilt:

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T$$

Die spezifische Wärmekapazität

Um Gegenstände aus unterschiedlichen Materialien hinsichtlich ihrer Wärmekapazität vergleichen zu können, gibt man die materialspezifische Wärmekapazität üblicherweise bezogen auf ein Kilogramm des jeweiligen Materials an.

Definition:

Die Menge ΔQ an Wärme, die nötig ist, um $m = 1 \text{ kg}$ eines Stoffes um $\Delta T = 1 \text{ K}$ zu erwärmen, wird als spezifischen Wärmekapazität c bezeichnet:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T} \quad (120)$$

Die Einheit der spezifischen Wärmekapazität ist gemäß der obigen Formel $1 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

Beispiele:

- Um $m = 1 \text{ kg}$ Wasser um $\Delta T = 1 \text{ K}$ zu erwärmen, sind $\Delta Q = 4182 \text{ J} \approx 4,2 \text{ kJ}$ an Wärme nötig.
- Eisen benötigt je Kilogramm nur $\Delta Q = 452 \text{ J} \approx 0,45 \text{ kJ}$, um eine Erwärmung von einem Kelvin zu bewirken. Es hat damit (wie alle bekannten Stoffe) eine deutlich kleinere spezifische Wärmekapazität als Wasser.

Tab. 14: Spezifische Wärmekapazitäten verschiedener Stoffe

Stoff	Wärmekapazität c in $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
Aluminium	0,90
Blei	0,13
Eis	2,10
Eisen	0,45
Ethanol	2,43
Holz (trocken)	$\approx 1,5$
Kupfer	0,38
Petroleum	2,14
Quecksilber	0,14
Silber	0,24
Wasser	4,18
Wolfram	0,13
Zinn	0,23

Spezifische Wärmekapazität bei Gasen

Bei Gasen hängt die spezifische Wärmekapazität von der Art der Erwärmung ab. Je nachdem, ob während der Erwärmung der Druck p oder das Volumen V konstant gehalten wird, unterscheidet man zwischen den Wärmekapazitäten c_p und c_V :

- Die spezifische Wärmekapazität c_V eines Gases gibt an, wie viel Energie zur Erwärmung eines Kilogramms um ein Grad nötig ist, wenn das Volumen des Gases konstant bleibt. Die zugeführte Wärmemenge führt ausschließlich zu einer Erhöhung der mittleren Energie der Moleküle.
- Die spezifische Wärmekapazität c_p eines Gases gibt an, wie viel Energie zur Erwärmung eines Kilogramms um $\Delta T = 1 \text{ K}$ nötig ist, wenn der Druck des Gases konstant bleibt. Die zugeführte Wärmemenge erhöht hierbei einerseits die mittlere Energie der Moleküle, andererseits muss auch eine so genannte „Ausdehnungsarbeit“ am Gas verrichtet werden.

Ein gute Modellvorstellung hierfür liefert ein kubischer Gasbehälter, der nach oben durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen ist. Auf dem Kolben wird ein Gewicht angebracht, das den Kolben so weit nach innen drückt, bis durch die Kompression des Gases ein entsprechend großer Gegendruck entsteht. Der durch das Gewicht bewirkte Kolbendruck ist dann mit dem Gasdruck im Gleichgewicht.

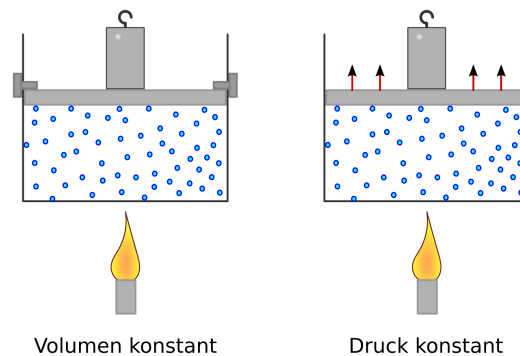


Abb. 160: Erwärmung von Gasen bei konstantem Volumen (links) und konstantem Druck (rechts).

Bei einer Erwärmung mit konstantem Volumen wird der Kolben bei dieser Anordnung nach oben hin mit zwei Bolzen fixiert, so dass sich das Gas auch bei zunehmender Temperatur nicht ausdehnen kann. Ohne Fixierung hingegen kann sich das Gas hingegen nach oben hin ausdehnen, bis sich wiederum ein Gleichgewicht zwischen dem Kolben- Gasdruck einstellt.

Dehnt sich das Gas bei konstantem Druck p um das Volumen ΔV aus, so gilt für die vom Gas verrichtete Ausdehnungsarbeit:

$$p \cdot \Delta V = \frac{F}{A} \cdot \Delta V \quad (121)$$

Hat der kubische Gasbehälter die Seitenlänge s , so gilt $A = s^2$, und $V = s^3$. Insgesamt ergibt sich also $p \cdot \Delta V = F \cdot \Delta s$, was mit der Definition der *Arbeit* übereinstimmt.

Allgemein gilt für beliebige Gase stets $c_p > c_v$, da bei konstantem keine Energie für die Ausdehnung des Gases zugeführt werden muss. Bei konstantem Druck steht der Anteil der zugeführten Energie, der zur Verrichtung der Ausdehnungsarbeit benötigt wird, nicht für die Erwärmung des Gases zur Verfügung, es muss also mehr Energie für eine gleiche Erwärmung investiert werden.

Bei Flüssigkeiten ist die Wärmeausdehnung wesentlich geringer als bei Gasen, so dass hierbei häufig nur ein c -Wert angegeben wird.

Mischungsvorgänge

Bei Mischungsvorgängen in einer isolierten Umgebung wird vom wärmeren Objekt genauso viel Wärme abgegeben, wie vom kälteren Objekt aufgenommen wird. Dies gilt für Festkörper, Flüssigkeiten und Gase gleichermaßen. Dieser Sonderfall des Energieerhaltungssatzes wird auch **Richmannsche Mischungsregel** bezeichnet:

$$\begin{aligned} -Q_{\text{abgegeben}} &= Q_{\text{aufgenommen}} \\ -m_1 \cdot c_1 \cdot (T_M - T_1) &= m_2 \cdot c_2 \cdot (T_M - T_2) \end{aligned}$$

Mit T_M wird die Mischungstemperatur bezeichnet, die sich nach dem Mischungsvorgang ergibt. Die Vorzeichen der Wärmebilanz ergeben sich daraus, dass aufgenommene Wärmemengen der Konvention nach positiv gezählt, abgegebene Wärmemengen hingegen negativ gewertet werden. Auf beiden Seiten wurden in der obigen Gleichung die Wärmemengen dann mittels der Formel (120) für die spezifische Wärmekapazität ausgedrückt. Die linke Seite der Gleichung kann etwas umgestellt werden, indem das Minus-Zeichen in die Klammer übernommen wird:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot c_1 \cdot (-T_1 + T_M) &= m_2 \cdot c_2 \cdot (T_M - T_2) \\ m_1 \cdot c_1 \cdot (T_1 - T_M) &= m_2 \cdot c_2 \cdot (T_M - T_2) \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nach der gesuchten Größe T_M aufgelöst werden. Dazu werden beide Seiten der Gleichung ausmultipliziert und anschließend sortiert:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 - m_1 \cdot c_1 \cdot T_M &= m_2 \cdot c_2 \cdot T_M - m_2 \cdot c_2 \cdot T_2 \\ m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2 &= m_1 \cdot c_1 \cdot T_M + m_2 \cdot c_2 \cdot T_M \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung kann T_M ausgeklammert werden; für die Mischtemperatur ergibt sich damit folgende Formel:

$$T_M = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2} \quad (122)$$

Haben die Wärme austauschenden Objekte eine gleiche Wärmekapazität, so kann diese im Zähler sowie im Nenner ausgeklammert und gekürzt werden. Damit vereinfacht sich die Formel folgendermaßen:

$$T_M = \frac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2}{m_1 + m_2}$$

Man kann an dieser Formel erkennen, dass bei gleichen Wärmekapazitäten die Massenanteile $\frac{m_1}{m_{\text{ges}}}$ und $\frac{m_2}{m_{\text{ges}}}$ Gewichtungsfaktoren für die Mischtemperatur sind: Eine große Masse von m_1 (im Vergleich zu m_2) führt zu einer Verschiebung der Mischtemperatur in Richtung von T_1 . Sind die Wärmekapazitäten der gemischten Substanzen verschieden, so treten diese zusätzlich als Gewichtungsfaktoren auf.

Sind mehr als zwei Gegenstände beziehungsweise Substanzen am Mischungsvorgang beteiligt, so müssen die dabei umgesetzten Wärmemengen ebenfalls berücksichtigt werden. Allgemein gilt somit:

$$c_1 \cdot m_1 \cdot T_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot T_2 + \dots = T_M \cdot (c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2 + \dots) \quad (123)$$

Mittels der obigen Formeln kann experimentell wahlweise die spezifische Wärmekapazität eines Gegenstands oder seine Anfangstemperatur bestimmt werden. Isolierte Anordnungen, die zu genau diesem Zweck konstruiert sind, heißen Kalorimeter.

Phasenübergänge

In welchem Zustand ein Stoff vorliegt, hängt von seiner Temperatur und dem Druck seiner Umgebung ab. Je nachdem, wie groß die thermische Bewegungsenergie der einzelnen Teilchen gegenüber der Stärke ihrer Bindungen mit den Nachbarpartikeln ist, können (fast) alle Stoffe als fest, flüssig oder gasförmig vorkommen.¹

Wechsel zwischen den drei Aggregatzuständen fest, flüssig und gasförmig werden als Phasenübergänge bezeichnet.

Schmelzen und Erstarren

Wird ein Festkörper erwärmt, so schwingen seine Teilchen immer stärker um ihre Ruhelage. Zu einem bestimmten Zeitpunkt reichen die im Objekt wirkenden Kohäsionskräfte nicht mehr aus, um die Teilchen an ihre Plätze zu binden – der Festkörper schmilzt.

Wird einer Flüssigkeit Wärme entzogen, so geht sie bei einer bestimmten Temperatur wieder in den festen Aggregatzustand über. Dieser Vorgang heißt Erstarren.

Grundsätzlich gilt für beliebige Schmelz- und Erstarrungsvorgänge:

- Wärme, die einem Festkörper während des Schmelzens zugeführt wird, ist zum Aufbrechen der Festkörper-Strukturen nötig und steht somit nicht für eine Temperaturerhöhung zur Verfügung. Die Temperatur bleibt während des Schmelzvorgangs stets konstant.
- Die Schmelz- und Erstarrungstemperatur eines Stoffes sind identisch. Ebenso sind die zum Schmelzen nötige beziehungsweise die beim Erstarren frei werdenden Wärmemengen (Schmelzenergie beziehungsweise Erstarrungsenergie) identisch.

¹ Gibt ein Objekt im umgekehrten Fall Wärme ab, so verringert sich unter den gleichen Bedingungen (konstantes Volumen, gleicher Aggregatzustand) seine Temperatur.

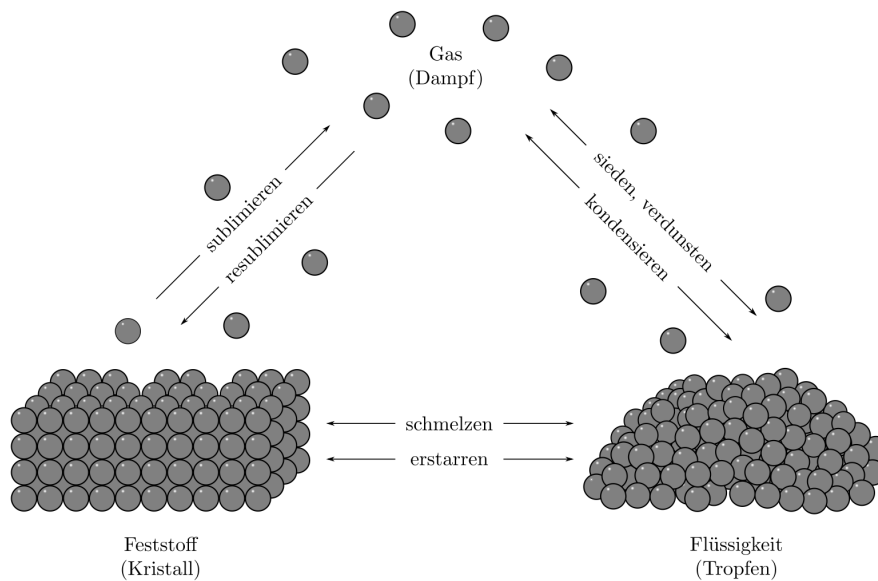


Abb. 161: Teilchenmodell von Festkörpern, Flüssigkeiten, und Gasen sowie Phasenübergänge zwischen den drei Aggregatzuständen.

Die meisten Materialien dehnen sich beim Schmelzen aus und ziehen sich beim Erstarren zusammen (Ausnahme: *Die Anomalie des Wassers*).

Tab. 15: Schmelztemperaturen verschiedener Stoffe bei Normaldruck (1013 hPa)

Stoff	Schmelztemperatur in °C
Aluminium	660
Blei	327
Eis	0
Eisen	1530
Kupfer	1083
Quecksilber	-39
Silber	960
Wolfram	3380
Zinn	232

Manche Stoffe, beispielsweise Glas, haben keine bestimmte Schmelztemperatur:

- Glas erweicht bei 700 °C und wird bei 1 300 °C dünnflüssig. Man kann Glas als eine Flüssigkeit ansehen, die bei Zimmertemperatur äußerst zäh ist.²
- Andere Stoffe, beispielsweise Holz, verbrennen, wenn man sie an Luft stark erwärmt.

² Alte Fenster werden beispielsweise im Laufe der Zeit oben um wenige Atomlagen etwas dünner, unten dafür um wenige Atomlagen dicker. Dass viele antike Fenster im unteren Teil deutlich dicker sind als im oberen, hängt hingegen mit dem damaligen [Herstellungsprozess](#) zusammen.

Die Schmelzwärme

Um einen bestimmten Feststoff zum Schmelzen zu bringen, muss ihm eine entsprechende Wärmemenge zugeführt werden. Die Menge an Wärme ist von der Art des Stoffs und seiner Masse abhängig.

Definition:

Die spezifische Schmelzwärme q_s eines Materials gibt an, welche Wärmemenge Q nötig ist, um ein Kilogramm des Stoffes bei seiner Schmelztemperatur zu schmelzen:

$$q_s = \frac{\Delta Q}{m}$$

Die spezifische Schmelzwärme wird üblicherweise in kJ kg^{-1} angegeben. Beim Erstarren wird die gleiche Menge an Wärme wieder an die Umgebung abgegeben.

Tab. 16: Schmelzwärmen verschiedener Stoffe

Stoff	Schmelzwärme q_s in $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
Aluminium	397
Blei	23
Eis	344
Eisen	277
Kupfer	205
Quecksilber	12
Silber	105
Wolfram	192
Zinn	60

Sieden und Kondensieren

Wird ein flüssiger Stoff auf seine Siedetemperatur erhitzt, so bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen mit sehr großer Geschwindigkeit. Sie können dadurch die Kohäsionskräfte überwinden. Innerhalb der Flüssigkeit entstehen Dampfblasen, der Stoff geht in den gasförmigen Aggregatzustand über. Dabei muss Wärme zugeführt werden.

Wird Dampf Wärme entzogen, so geht er bei einer bestimmten Temperatur wieder in den flüssigen Aggregatzustand über. Dieser Vorgang heißt Kondensieren.

- Während des Siedens ändert sich die Temperatur des Materials trotz Wärmezufuhr nicht.
- Die Siedetemperatur und Kondensationstemperatur eines Stoffes sind identisch.

Tab. 17: Siedetemperaturen verschiedener Stoffe bei Normaldruck (1013) hPa

Stoff	Siedetemperatur in °C
Aluminium	2450
Blei	1750
Eisen	2735
Ethanol	78
Kupfer	2590
Meerwasser	104
Quecksilber	357
Silber	2180
Wasser	100
Wolfram	5500
Zinn	2690

Die Verdampfungswärme

Um eine bestimmte Flüssigkeit zum Sieden zu bringen, muss ihr – ebenso wie beim Schmelzen – eine entsprechende Wärmemenge zugeführt werden. Die Menge an Wärme ist wiederum von der Art der Flüssigkeit und ihrer Masse abhängig.

Definition:

Die spezifische Verdampfungswärme q_v einer Flüssigkeit gibt an, welche Wärmemenge Q nötig ist, um ein Kilogramm der Flüssigkeit bei ihrer Siedetemperatur zu verdampfen:

$$q_v = \frac{\Delta Q}{m}$$

Beim Kondensieren wird die gleiche Menge an Wärme wieder an die Umgebung abgegeben.

Tab. 18: Verdampfungswärmen verschiedener Stoffe

Stoff	Verdampfungswärme q_v in $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
Aluminium	10 900
Benzol	394
Blei	8 600
Eisen	6 339
Ethanol	840
Kupfer	4 790
Quecksilber	285
Silber	2 350
Wasser	2 257
Wolfram	4 350
Zinn	2 450

Geht bei Sublimations- beziehungsweise Resublimationsvorgängen ein Stoff unmittelbar von der festen in die gasförmige Phase über (oder umgekehrt), so ist die spezifische Wärme gleich der Summe der Schmelz- und Verdampfungswärme des jeweiligen Stoffs.

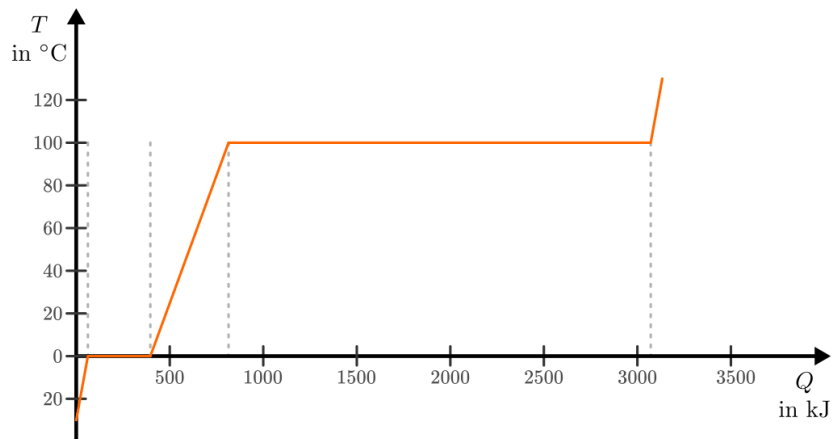


Abb. 162: Benötigte Energiemenge zur Erwärmung von $m = 1$ kg Wasser von -30°C (Eis) bis $+130^{\circ}\text{C}$ (Dampf).

Anhand der Werte aus den Tabellen zur Schmelz- und Verdampfungswärme erkennt man, dass für die Phasenübergänge große Mengen an Wärme zugeführt werden müssen. Da sich die Temperatur während des Schmelzens und Siedens nicht ändert, nennt man die bei Phasenübergängen umgesetzte Wärmemenge auch „latente Wärme“.

Verdunsten

Flüssigkeiten können bereits unterhalb ihrer Siedetemperatur in den gasförmigen Aggregatzustand übergehen. Beim Verdunsten müssen die Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche die Kohäsionskräfte der anderen Teilchen überwinden. Das ist möglich, weil sich nicht alle Flüssigkeitsteilchen mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen. Nur Teilchen mit großer Geschwindigkeit sind in der Lage, die Flüssigkeit zu verlassen, wenn sie an die Oberfläche gelangen.

Die in der Flüssigkeit verbleibenden Teilchen haben eine geringere durchschnittliche Geschwindigkeit als die verdunstenden; somit entschwindet beim Verdunsten mit den schnellen, aus der Flüssigkeit entweichenden Teilchen auch Wärme. Die verbleibende Flüssigkeit kühlt sich daher ab („Verdunstungskälte“).³

Das Verdunsten einer Flüssigkeit kann folgendermaßen beeinflusst werden:

- Je höher die Temperatur und je größer die Oberfläche, desto schneller verdunstet eine Flüssigkeit.
- Wird der entstehende Dampf fortgeführt, so verdunstet die Flüssigkeit ebenfalls schneller.

³ Eine ausführlichere Erklärung hierfür liefert die in einem späteren Abschnitt näher beschriebene *kinetische Gastheorie*.

Ebenfalls relevant für den Verdunstungsvorgang ist die Dampfmenge in der umgebenden Luft; im Fall von Wasserdampf spricht man von Luftfeuchtigkeit.

Die Menge an Wasserdampf, die ein bestimmtes Volumen an Luft maximal aufnehmen kann, ist stark abhängig von der Temperatur der Luft. Wie man an den Werten aus der obigen Tabelle beziehungsweise am folgenden Diagramm sehen kann, nimmt diese so genannte „Sättigungsmenge“ mit der Temperatur überproportional zu.

Temperatur in °C	Sättigungsmenge (Wasser) in $\frac{\text{g}}{\text{m}^3}$
-15	1,4
-10	2,3
-5	3,3
0	4,9
5	6,8
10	9,4
15	12,8
20	17,3
25	23,1
30	30,3
40	51,1
50	82,8

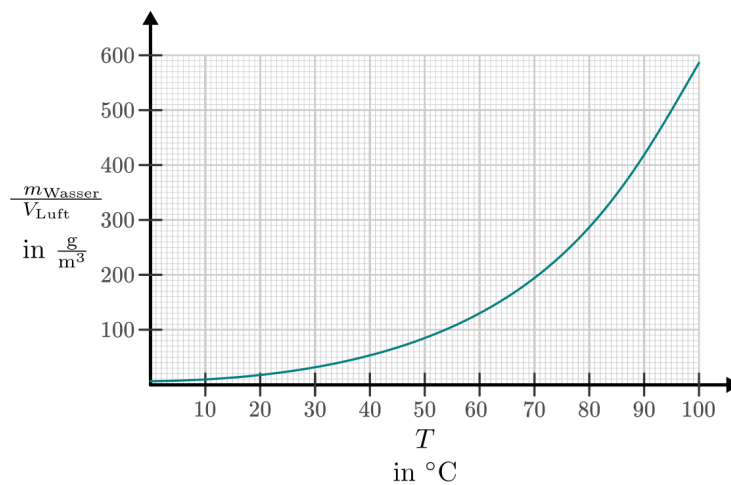


Abb. 163: Sättigungsmenge von Wasserdampf in Luft bei verschiedenen Temperaturen.

Die „absolute“ Feuchtigkeit von Luft gibt an, wie viel Gramm Wasserdampf aktuell je Kubikmeter enthalten sind; die „relative“ Luftfeuchtigkeit hingegen gibt diesen Wert im Verhältnis zur beschriebenen Sättigungsmenge an. Da die absolute Feuchtigkeit und der Sättigungsdruck jeweils in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ angegeben werden, ist die relative Luftfeuchtigkeit dimensionslos; sie wird üblicherweise in Prozent angegeben. Mit speziellen Messgeräten (so genannten „Hygrometern“) wird meist die relative Luftfeuchtigkeit gemessen.

Beispiele:

- In einem Volumen von $V = 1 \text{ m}^3$ ist bei einer Temperatur von $T = 20^{\circ}\text{C}$ eine Wassermenge von 10 g enthalten. Wie hoch ist die relative Luftfeuchtigkeit?

Die Sättigungsmenge an Wasserdampf bei $T = 20\text{ °C}$ beträgt gemäß der obigen Tabelle beziehungsweise des obigen Diagramms ca. $17 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$. Teilt man die angegebene absolute Luftfeuchtigkeit von $10 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ durch diesen Sättigungswert, so erhält man eine relative Luftfeuchtigkeit von $\frac{10}{17} \approx 59\%$.

- Wie viel Gramm Wasser sind in einem Raum $l = 5\text{ m}$ langen, $b = 4\text{ m}$ breiten und $h = 2,5\text{ m}$ hohen Raum bei einer Temperatur von $T_1 = 25\text{ °C}$ und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 75% enthalten? Was passiert, wenn sich die Temperatur auf $T_2 = 15\text{ °C}$ abkühlt?

Das Volumen des Raums beträgt $V = (5 \cdot 4 \cdot 2,5)\text{ m}^3 = 50\text{ m}^3$; die Sättigungsmenge von Wasserdampf in Luft liegt bei einer Temperatur von 25 °C bei rund $23 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$. Je Kubikmeter ist somit bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 75% eine Menge von $0,75 \cdot 23\text{ g} = 17,25\text{ g}$ an Wasserdampf enthalten. Insgesamt enthält die Luft in dem Raum damit $50\text{ m}^3 \cdot 17,25 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} \approx 862,5\text{ g}$.

Nimmt die Temperatur der Luft ab, so sinkt auch die darin maximal mögliche Menge an Wasserdampf: Bei 15 °C beträgt die Sättigungsmenge nur noch rund $13 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$. Da in der Luft jedoch $17,25 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ enthalten sind, werden je Kubikmeter $17,25 - 13\text{ g} = 4,25\text{ g}$ an Wasserdampf in Form von feinen Nebeltröpfchen kondensieren; insgesamt $(50 \cdot 4,25)\text{ g} = 212,5\text{ g}$. Es wird folglich neblig, und die neue relative Luftfeuchtigkeit beträgt 100%.

- Welche absolute Luftfeuchtigkeit hat Luft bei einer Temperatur von $T_1 = 0\text{ °C}$ und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 100%? Welche relative Luftfeuchtigkeit stellt sich ein, wenn diese Luft auf $T_2 = 20\text{ °C}$ erwärmt wird?

Bei einer Temperatur von 0 °C beträgt die Sättigungsmenge an Wasserdampf knapp $5 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$; da die Luft eine relative Luftfeuchtigkeit von 100% hat, enthält sie eben diese Menge an Wasserdampf.

Bei einer Temperatur von 20 °C beträgt die Sättigungsmenge hingegen rund 17 g . Die relative Luftfeuchtigkeit der Luft beträgt nach dem Erwärmen somit etwa $\frac{5}{17} \approx 29,4\%$.

Wie das letzte Beispiel zeigt, kann auch bei kalter und nebliger Außenluft ein kurzzeitiges Lüften ratsam, um die relative Luftfeuchtigkeit in einem Raum zu senken. In Wohnräumen sind Luftfeuchtigkeiten zwischen 40% und 70% üblich. Luftfeuchtigkeiten von unter 25% und über 95% werden generell als unangenehm empfunden; in Gebäuden muss bei einer konstanten Luftfeuchtigkeit von über 80% mit Schimmelbildung gerechnet werden. In gefährdeten Räumen kann diesem durch häufiges, kurzzeitiges Lüften und/oder durch kontinuierliches Lüften mit Wärmerückgewinnung („Wärmetauscher“) vorgebeugt werden.

Phasendiagramme

Phasendiagramme werden üblicherweise in so genannten Phasendiagrammen dargestellt. In einem derartigen Diagramm werden die Existenzbereiche der einzelnen Phasen einer chemischen Substanz in Abhängigkeit von der (absoluten) Temperatur T und dem vorherrschenden Druck p für jeweils dargestellt.

In einem Phasendiagramm sind die verschiedenen Bereiche, in denen jeweils nur ein Aggregatzustand existieren kann, durch Linien voneinander getrennt. Entlang der Linien

kommt es zur so genannten Phasen-Koexistenz, in der jeweils zwei Phasen gleichberechtigt nebeneinander existieren. In jedem Phasendiagramm sind zudem zwei Punkte von besonderer Bedeutung:

- Der so genannte „Tripelpunkt“ gibt ein Temperatur-Druck-Wertepaar an, bei dem alle drei Aggregatzustände (fest, flüssig und gasförmig) gleichzeitig nebeneinander existieren. Bei Wasser beispielsweise liegt der Tripelpunkt bei einer Temperatur von $T = 0,01\text{ °C}$ und einem Druck von $p = 0,06\text{ bar}$.
- Der so genannte „Kritische Punkt“ beschreibt das Ende der Siedepunktkurve, also der Linie zwischen dem flüssigen und gasförmigen Aggregatzustand. Oberhalb von diesem Punkt kann nicht mehr zwischen dem flüssigen und gasförmigen Aggregatzustand unterschieden werden; man bezeichnet diesen Zustand auch als „überkritisch“. Bei Wasser beispielsweise liegt der kritische Punkt bei einer Temperatur von $T = 374\text{ °C}$ und einem Druck von $p = 221\text{ bar}$.

In der folgenden Abbildung ist links ein „typisches“ Phasendiagramm für eine gewöhnliche Substanz (als Beispiel Kohlenstoffdioxid), rechts ist ein Phasendiagramm für Wasser dargestellt. Die Besonderheit an dem Phasendiagramm von Wasser liegt darin, dass die Schmelzkurve (die Linie zwischen festem und flüssigen Aggregatzustand) eine negative Steigung aufweist. Daran kann man die Anomalie des Wassers erkennen: Es dehnt sich, anders als alle anderen bekannten Substanzen, beim Gefrieren aus.

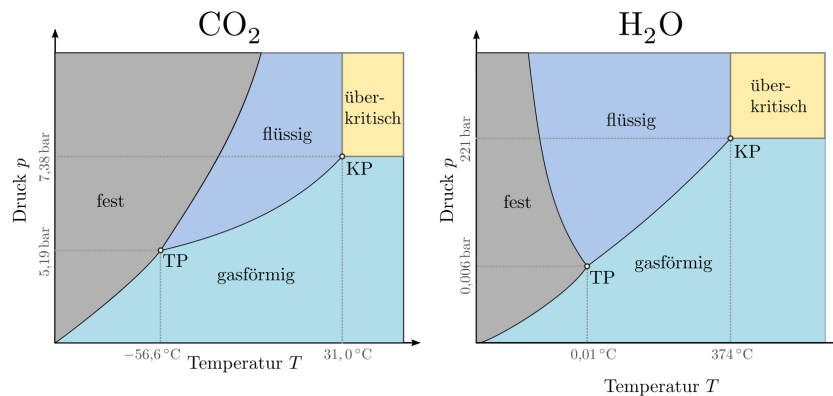


Abb. 164: Schematische Phasendiagramme von Kohlenstoffdioxid (links) und Wasser (rechts).

Erhöht man vom Tripelpunkt ausgehend bei konstanter Temperatur den Druck beziehungsweise geht man im Diagramm vom Tripelpunkt aus senkrecht nach oben, so gelangt man gewöhnlich in die flüssige Phase; dies liegt daran, dass jedes physikalische System gern äußeren Zwängen ausweicht. Einem zunehmendem äußeren Druck weicht ein Stoff allgemein aus, indem er eine Phase annimmt, in der er weniger Volumen benötigt. Bei allen Substanzen außer Wasser wird durch einen hohen Druck somit das Erstarren begünstigt, bei Wasser hingegen das Schmelzen.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Ausbreitung von Wärme

Ein von selbst ablaufender Austausch von Wärme erfolgt stets von einem Objekt höherer Temperatur zu einem Objekt niedriger Temperatur, bis beide Objekte die gleiche Temperatur erreicht haben („Wärmeleichgewicht“). Die vom kalten Objekt aufgenommene Wärmemenge Q_1 ist hierbei gleich der vom warmen Objekt abgegebenen Wärmemenge Q_2 .

Die Ausbreitung von Wärme kann auf drei Arten geschehen, die im folgenden Abschnitt näher beschrieben werden.

Die Wärmeleitung

Wird Wärme übertragen, obwohl der Körper selbst in Ruhe bleibt, so spricht man von Wärmeleitung. Dabei geben die schnellen Teilchen, aus denen der Körper besteht, ihre Energie allerdings durch Zusammenstöße an benachbarte, langsamere Teilchen ab. So gelangt Wärme von Orten mit hoher Temperatur zu Orten mit tieferer Temperatur. In Festkörpern breitet sich die Wärme vorwiegend durch Wärmeleitung aus. In Flüssigkeiten und Gasen tritt ebenfalls, jedoch nur in geringem Maße, Wärmeleitung auf. Unterschiedliche Materialien können folglich die Wärme unterschiedlich gut leiten:

- Alle Metalle sind gute Wärmeleiter. Allgemein haben alle Materialien, die eine hohe elektrische Leitfähigkeit σ aufweisen, auch eine hohe Wärmeleitfähigkeit λ .¹ Der Grund hierfür sind freie Elektronen, die sowohl elektrische Ladung als auch Wärme transportieren können.

In der Technik werden Metalle beispielsweise als Kühlkörper an Motoren und Computerchips eingesetzt. In chemischen Laboren werden zur Verwendung von Bunsenbrennern feinmaschige Drahtgitter eingesetzt, um die Flamme nach oben hin zu begrenzen: Das Gitter leitet die Wärme ab, so dass das Gas auf der oberen Seite die Zündtemperatur nicht erreicht.

- Glas, Porzellan, Plastik, Schaumstoff und Holz sind schlechte Wärmeleiter. Schaumstoff, Styropor u.s.w. wird in Bauwerken als Isolationsmaterial eingesetzt. Holzgriffe dienen an Werkzeugen und Töpfen als Wärmedämmung.
- Flüssigkeiten sind schlechte, Gase sogar sehr schlechte Wärmeleiter. Dünne Luftschichten bis etwa 3 cm dienen beispielsweise in Luftmatratzen als Isolationschicht. In dickeren Schichten kann Luft zirkulieren (Wärmeströmung), wodurch die Isolationsfähigkeit erheblich absinkt.

¹ Die Proportionalität zwischen Wärmeleitwert λ und elektrischem Leitwert σ lässt sich durch die Gleichung $\frac{\lambda}{\sigma} = \text{konst} \cdot T$ beschreiben. Dieser Zusammenhang wird nach ihren Entdeckern [Gustav Wiedemann](#) und [Rudolph Franz](#) auch als „Wiedemann-Franz'sches Gesetz“ bezeichnet.

Tab. 19: Wärmeleitfähigkeiten verschiedener Materialien

Material	λ in $\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$
Silber	407
Kupfer	389
Aluminium	220
Eisen	74
Eis	2, 2
Schaumstoffe, Glas, Porzellan, Beton	$\approx 1, 0$
Ziegelstein	$\approx 0, 6$
Holz (trocken)	0, 1 bis 0, 2
Wasser	0, 6
Ethanol	0, 17
Benzin	0, 12
Luft	0, 026

Die hohe Wärmedämm-Fähigkeit von Stroh ($\lambda = 0,038$), Styropor ($\lambda = 0,036$), Kork ($\lambda = 0,036$), Mineralwolle ($\lambda = 0,035$) oder Hohlziegeln beruht ebenfalls auf der schlechten Wärmeleitfähigkeit der eingeschlossenen Luft. Im Vakuum kann überhaupt keine Wärmeleitung stattfinden.

Quantitativ lässt sich die Wärmeleitung durch die in einer bestimmten Zeit transportierte Wärme beschreiben. Für den so genannten Wärmestrom I_Q gilt also:

$$I_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (124)$$

Der Wärmestrom wird in Watt (Joule je Sekunde) gemessen.

Der Wärmestrom I_Q ist einerseits proportional zum Temperaturunterschied ΔT zwischen der heißen und der kalten Seite des Wärmeleiters, andererseits auch proportional zur Wärmeleitfähigkeit λ des Wärme leitenden Materials. Zusätzlich ist I_Q direkt proportional zur Querschnittsfläche A und indirekt proportional zur Länge beziehungsweise Schichtdicke l des Wärmeleiters. Insgesamt gilt also:

$$I_Q = -\lambda \cdot \frac{A}{l} \Delta T \quad (125)$$

Das Minuszeichen gibt an, dass der Wärmestrom stets in Richtung der kälteren Materialseite stattfindet.²

Reihen- und Parallelschaltung von Wärmeleitern

Oftmals besteht ein Wärme leitender Körper, beispielsweise eine Wand mit Dämmschicht, aus mehr als einem Material. Werden dabei einzelne Schichten mit gleichen Flächen, aber

² Der Wärmestrom I_Q wird von einem Temperaturgefälle ΔT ebenso angetrieben wie ein elektrischer Strom I von einer elektrischen Spannungsdifferenz ΔU . Die gleiche Gesetzmäßigkeit gilt außerdem auch bei Diffusionsströmen, die wird Konzentrationsdifferenzen Δc angetrieben werden.

unterschiedlichen Schichtdicken $l_1, l_2, \text{ usw.}$ und unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten $\lambda_1, \lambda_2, \text{ usw.}$ durchlaufen, so handelt es sich um eine „Reihenschaltung“ mehrerer Wärmeleiter.

Um den Wärmestrom in diesem Fall zu berechnen, muss man – wie beim *Ohmschen Gesetz* der Elektrizitätslehre – die „Wärmewiderstände“ der einzelnen Schichten addieren. Dazu definiert man den so genannten Wärmedurchlasswiderstand $R = \frac{l}{\lambda \cdot A}$, mit dem sich die obige Gleichung für den Wärmestrom folgendermaßen formulieren lässt:³

$$I_Q = \frac{\lambda \cdot A}{l} \cdot \Delta T = \frac{1}{R} \cdot \Delta T$$

Besteht die Anordnung aus n hintereinander liegenden Schichten, so gilt für R :

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n R_i = \frac{l_1}{\lambda_1 \cdot A_1} + \frac{l_2}{\lambda_2 \cdot A_2} + \dots + \frac{l_n}{\lambda_n \cdot A_n} \quad (126)$$

Die Einheit des Wärmewiderstands ist $\frac{\text{K}}{\text{W}}$. Bei einer Reihenschaltung von Wärmewiderständen, beispielsweise einem doppelt verglastem Fenster oder einer Mauer mit Dämmschicht, sind die Querschnittsflächen der einzelnen Wärmewiderstände oftmals identisch; A kann in diesem Fall ausgeklammert werden. Allgemein gilt für den Wärmestrom $I_{Q,RS}$ bei einer Reihenschaltung:

$$I_{Q,RS} = \frac{1}{R_{\text{ges}}} \cdot \Delta T = \frac{1}{\left(\frac{l_1}{\lambda_1 \cdot A_1} + \frac{l_2}{\lambda_2 \cdot A_2} + \dots + \frac{l_n}{\lambda_n \cdot A_n} \right)} \cdot \Delta T \quad (127)$$

³ Die Analogie zum Ohmschen Gesetz der Elektrizitätslehre besteht darin, dass dieses folgendermassen geschrieben werden kann:

$$I = \frac{\Delta Q_{\text{el}}}{\Delta t} = \frac{U}{R_{\text{el}}}$$

Für die Wärmeleitung gilt:

$$I_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \left(\frac{\lambda \cdot A}{l} \right) \cdot \Delta T$$

Die Wärmestrom entspricht somit der elektrischen Stromstärke, nur dass keine elektrische Ladungsmenge Q_{el} , sondern eine Wärmemenge (ebenfalls mit Q bezeichnet) innerhalb einer bestimmten Zeit t transportiert wird. Die Temperaturdifferenz ΔT hat für die Wärmeleitung die gleiche Bedeutung wie die elektrische Spannung U für den elektrischen Stromfluss: Ohne Temperaturdifferenz gibt es keinen Wärmestrom.

Der elektrische Widerstand kann mittels des *spezifischen Widerstands* ρ des leitenden Materials ausgedrückt werden als:

$$R_{\text{el}} = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

Verwendet man anstelle des spezifischen Widerstands ρ die spezifische Leitfähigkeit $\sigma = \frac{1}{\rho}$ als materialspezifische Kenngröße, so gilt für den elektrischen Widerstand:

$$R_{\text{el}} = \frac{l}{\sigma \cdot A}$$

Die elektrische Wärmeleitfähigkeit σ entspricht der Wärmeleitfähigkeit λ ; der Term $\frac{\lambda \cdot A}{l}$ kann somit als Kehrwert des Wärmewiderstands R angesehen werden.

Sind die einzelnen Wärmeleiter nicht hintereinander, sondern nebeneinander angeordnet, so spricht man von einer „Parallelschaltung“ mehrerer Wärmeleiter. In diesem Fall addieren sich die Kehrwerte der Wärmewiderstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstands:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{\lambda_1 \cdot A_1}{l_1} + \frac{\lambda_2 \cdot A_2}{l_2} + \dots + \frac{\lambda_n \cdot A_n}{l_n}$$

Haben alle parallel zueinander liegenden Wärmeleiter, wie beispielsweise bei einem Heizkörper oder einem Röhrenkollektor, die gleiche Querschnittsfläche A , so kann diese bei der Berechnung des Gesamtwiderstands ausgeklammert werden. Allgemein gilt für den Wärmestrom $I_{Q,PS}$ bei einer Parallelschaltung:

$$I_{Q,PS} = \frac{1}{R_{\text{ges}}} \cdot \Delta T = \left(\frac{A_1 \cdot \lambda_1}{l_1} + \frac{A_2 \cdot \lambda_2}{l_2} + \dots + \frac{A_n \cdot \lambda_n}{l_n} \right) \cdot \Delta T \quad (128)$$

Diese Gleichung kann auch für eine Anordnung mehrerer paralleler Wärmeleiter mit unterschiedlich großen Flächen genutzt werden, beispielsweise einer Außenwand mit einem Fenster oder mehreren Fenstern. Gibt es mehrere Systemgrenzen mit unterschiedlichen Temperaturdifferenzen (beispielsweise Innenwände und Außenwände), so müssen die Wärmeströme durch die einzelnen Bereiche separat berechnet und ihre Werte addiert werden:

$$I_{Q,PS} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{l_i} \cdot A_i \cdot \Delta T_i$$

Die Wärmeströmung

Strömende Flüssigkeiten und Gase können Wärme mitführen. Diese Art der Wärmeausbreitung, bei der die am Wärmetransport beteiligten Teilchen ihre Lage ändern, wird Wärmeströmung genannt.

Beispiele:

- Winde und Meeresströmungen transportieren die Wärme vom Äquator in Richtung der Pole.
- In einem Fön wird durch ein Windrad Luft angesaugt und an elektrisch beheizten Heizdrähten vorbei geleitet. So entsteht ein warmer Luftstrom. Mit dem Luftstrom gelangt Wärme an den gewünschten Ort.
- Bei einer Warmwasserheizung wird die Wärme durch das Wasser von der Zentralheizung aus in die Heizkörper transportiert.

Eine Vorrichtung zur Strömungserzeugung wie bei einem Fön ist dabei nicht nötig: An der erwärmten Stelle dehnt sich das Wasser aus, seine Dichte nimmt ab. Das erwärmte Wasser steigt deshalb nach oben. Kühleres Wasser strömt von der Seite her nach, so dass sich ein „Kreislauf“ bildet.

- Jede Flamme ruft in ihrer Umgebung eine Wärmeströmung hervor. Staub oder andere leichte Körper werden entlang dieser Strömung fort getragen. Durch die Wärmeströmung wird auch ständig frische Luft, die zur Verbrennung notwendig ist, zur Flamme transportiert.

Wärmeströmungen entstehen, weil sich Flüssigkeiten und Gase beim Erwärmen stark ausdehnen und dadurch ihre Dichte verringern. In Vakuum oder ruhenden Körpern kann keine Wärmeströmung stattfinden.

Quantitativ lässt sich die durch Wärmeströmung übertragene Wärmemenge nur schwer erfassen, da die mathematischen Zusammenhänge bei Strömungsvorgängen sehr kompliziert sind. In einem vereinfachten Modell kann jedoch angenommen werden, dass der Wärmestrom $I_{Q,cv}$ bei auftretender Konvektion proportional zur Oberfläche A , zum Temperaturunterschied ΔT zwischen Fluid und begrenzender Kontaktfläche sowie zu einem so genannten Wärmeübertragungskoeffizienten h_{cv} ist:

$$I_{Q,cv} = h_{cv} \cdot A \cdot \Delta T \quad (129)$$

Der Wärmeübertragungskoeffizient h_{cv} wird in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ angegeben. Multipliziert man diesen mit der Temperaturdifferenz ΔT der Kontaktflächen und ihrer Fläche A , so erhält man den Wärmestrom beziehungsweise die abgegebene Heizleistung in Watt. Für technische Anwendungen – beispielsweise in der Bauphysik – sind vor allem laminare Wärmeströmungen in Luft von Interesse. Für eine horizontal verlaufende warme Fläche kann hierbei näherungsweise $h_{cv} \approx 9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ angenommen werden, für eine vertikale ist $h_{cv} \approx 5,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$.

Die Wärmestrahlung

Heiße Körper senden stets Wärmestrahlung aus. Durch diese Strahlung kann Wärme ohne Mitwirkung von Materie übertragen werden.

Wärmestrahlung kann Luft durchdringen, ebenso ist sie hinter Fensterscheiben wahrnehmbar. Die meisten Körper jedoch absorbieren Wärmestrahlung und werden durch sie erwärmt. Allgemein kann auftreffende Wärmestrahlung von einem Körper absorbiert, reflektiert, oder durchgelassen werden; Die Summe dieser drei Anteile ergibt stets 100%.

Beispiele:

- Körper mit dunkler Oberfläche absorbieren einen größeren Teil der Strahlung als Körper mit heller Oberfläche; sie erwärmen sich daher schneller. Der übrige Teil der Strahlung wird reflektiert.
- Glänzende Metalloberflächen reflektieren einen großen Teil der Wärmestrahlung, die restliche Wärmestrahlung wird absorbiert.
- Durchsichtiges Glas absorbiert nur einen kleinen Teil der Wärmestrahlung. Die Wärmestrahlung wird zum Teil reflektiert, zum Teil kann sie das Glas durchdringen. Ebenso erwärmen sich stehende Gewässer durch Sonnenstrahlen nur in der Nähe der Oberfläche; Wärmestrahlung kann dicke Wasserschichten nicht durchdringen.

Quantitativ kann die von einem heißen Gegenstand ausgestrahlte Wärmestrahlung – ähnlich wie bei den anderen Wärmetransportarten – durch den Wärmestrom $I_{Q,s}$ beschrieben werden:

$$I_{Q,s} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Diese Größe wird bisweilen auch „Bestrahlungsstärke“ genannt, ihre Einheit ist Watt je Quadratmeter. Beispielsweise kann in Mitteleuropa die Sonne an einem wolkenlosen Sommertag eine Bestrahlungsstärke von rund $1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ erreichen.⁴

Jedes Objekt, das Wärmestrahlung absorbieren kann, emittiert diese auch entsprechend effizient. Ein idealer „schwarzer Körper“, wie er in der Wärmelehre oft als vereinfachendes Modell angenommen wird, kann einerseits die auftreffende Wärmestrahlung zu 100% absorbieren und andererseits die seiner Temperatur entsprechende Wärmestrahlung bestmöglich abstrahlen. Für einen solchen Körper gilt das nach den Entdeckern [Josef Stefan](#) und [Ludwig Boltzmann](#) benannte Strahlungsgesetz, wonach die Intensität der Wärmestrahlung proportional zur vierten Potenz der absoluten Temperatur (gemessen in Kelvin) ist:

$$I_{\text{Q,s}} = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad (130)$$

Die dabei auftretende Konstante $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$ wird dabei als „Stefan-Boltzmann-Konstante“ bezeichnet. Bei der Wärmestrahlung selbst handelt es sich – wie auch bei Licht – um elektromagnetische Wellen. Von einem heißen Körper wird allerdings nicht nur eine einzelne Wellenlänge, sondern vielmehr ein kontinuierliches Spektrum an unterschiedlichen Wellenlängen abgestrahlt. Die Verteilung der abgestrahlten Energiemengen bei einer bestimmten Temperatur ist dabei wiederum von der Wellenlänge λ abhängig.

Kann ein Objekt Wärmestrahlung nicht zu 100% absorbieren oder emittieren, so muss in der obigen Formel (130) auf der rechten Gleichungsseite noch ein Zahlenfaktor $0 \leq \varepsilon \leq 1$ eingefügt werden, der den Emissions- beziehungsweise Absorptionsgrad des Objekts berücksichtigt:

$$I_{\text{Q,s}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad (131)$$

Der Emissions- beziehungsweise Absorptionsgrad ε eines Objekts kann bei unterschiedlichen Wellenlängen unterschiedlich groß sein.

Mit steigender Temperatur verschiebt sich das Spektrum der Strahlung zu kürzeren Wellenlängen. Während bei geringen Temperaturen die abgestrahlten Wellenlängen überwiegend im infraroten Bereich liegen, beginnt eine heiße Oberfläche ab einer Temperatur von mindestens $T = 700 \text{ °C}$ (rund 1000 K) für das menschliche Auge sichtbar zu glühen. Quantitativ lässt sich dieser Zusammenhang durch das nach seinem Entdecker [Wilhelm Wien](#) benannte „Wiensche Verschiebungsgesetz“ beschreiben:

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2897,8 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{T} \quad (132)$$

Hierbei beschreibt λ_{max} das Maximum der spektralen Energiedichte bei einer bestimmten (absoluten) Temperatur T . Für eine Temperatur von etwa 5800 K stimmt die Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers in sehr guter Näherung mit dem Strahlungsspektrum der Sonne überein.

⁴ Außerhalb der Lufthülle der Erde beträgt die Strahlungsintensität der Sonne im Jahresmitte $1367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$; diese Größe wird mitunter auch als „Solarkonstante“ bezeichnet.

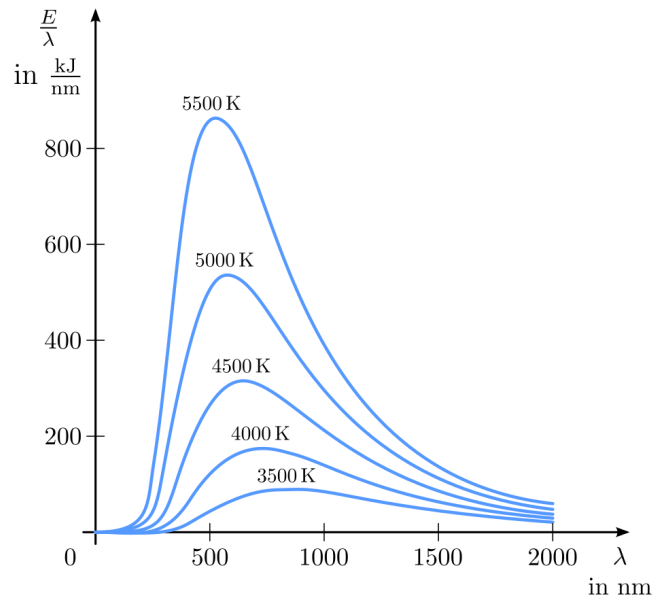


Abb. 165: Die spektrale Energiedichte (abgestrahlte Energie je Wellenlänge) der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers bei verschiedenen Temperaturen.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Ausdehnung bei Erwärmung

Die meisten festen, flüssigen und gasförmigen Körper dehnen sich beim Erwärmen aus und ziehen sich beim Abkühlen zusammen. Gase dehnen sich bei Erwärmung am meisten, feste Stoffe am wenigsten aus.

Ausdehnung von Festkörpern

Ändert sich die Temperatur eines festen Körpers um einen bestimmten Betrag, so ändert sich entsprechend auch seine Länge beziehungsweise seine Fläche und sein Volumen. Mit steigender Temperatur nimmt die Länge zu, mit sinkender Temperatur nimmt die Länge ab.

Formel:

Die Längenänderung Δl eines Festkörpers der Länge l ist proportional zur Temperaturänderung ΔT sowie zum (vom Material abhängigen) thermischen Längenausdehnungskoeffizient α :¹

¹ Genau genommen stellen die Wärmeausdehnungs-Formeln „nur“ Näherungen dar; für die meisten Anwendungen sind sie allerdings völlig ausreichend. Siehe auch [Wärmeausdehnung \(Wikipedia\)](#) beziehungsweise [Ausdehnungskoeffizient \(Wikipedia\)](#)

$$\Delta l = \alpha \cdot \Delta T \cdot l \quad (133)$$

Für die neue Länge $l_{\text{neu}} = l + \Delta l$ nach der Temperaturänderung gilt damit:

$$l_{\text{neu}} = l \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad (134)$$

Tab. 20: Längenausdehnungskoeffizienten fester Stoffe

Stoff	α in $10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$
Aluminium	23,1
Beton	12,0
Blei	29,0
Eisen	11,8
Quarzglas	0,5
Holz	8,0
Kupfer	16,5
Messing	18,0
Silber	18,9
Silicium	2,6
Titan	8,6
Wolfram	4,5
Ziegel	5,0
Zinn	22,0

Beispiel:

- Eine $l = 10$ m lange Eisenstange wird um $\Delta T = 50$ K erwärmt. Mit dem thermischen Längenausdehnungskoeffizient $\alpha_{\text{Fe}} = 11,8 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$ lässt sich die Längenänderung der Stange berechnen:

$$\Delta l = \alpha_{\text{Stahl}} \cdot \Delta T \cdot l = 11,8 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}} \cdot 50 \text{ K} \cdot 10 \text{ m} \approx 0,006 \text{ m}$$

Die Längenausdehnung beträgt somit rund 6 mm.

Auf ähnliche Weise wie in Gleichung (134) kann die neue Fläche A_{neu} beziehungsweise das neue Volumen V_{neu} eines festen Körpers der Fläche A beziehungsweise des Volumens V bei einer Temperaturänderung um ΔT berechnet werden. Dabei geht man davon aus, dass sich der betrachtete Festkörper in alle Richtungen gleich ausdehnt:²

$$l_{\text{neu}} = l \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$$A_{\text{neu}} = A \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)^2$$

$$V_{\text{neu}} = V \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)^3$$

² Tatsächlich gibt es spezielle Festkörper-Kristalle, die in unterschiedlichen Raumrichtungen unterschiedliche physikalische Eigenschaften aufweisen. Die Untersuchung und Berechnung derartiger Besonderheiten ist ein Teilgebiet der Festkörperphysik.

In sehr guter Näherung kann die Volumenausdehnung von Festkörpern auch folgendermaßen geschrieben werden:³

$$V_{\text{neu}} = V \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

Hierbei ist $\gamma \approx 3 \cdot \alpha$ der so genannte Volumen-Ausdehnungskoeffizient.

Im Wesentlichen ist temperaturbedingte Längen- beziehungsweise Volumenzunahme eines Festkörpers darauf zurückzuführen, dass die Atome beziehungsweise Moleküle des Festkörpers mit zunehmender Temperatur stärker um ihre Ruhelage schwingen. Dadurch vergrößern sich die Abstände zwischen den einzelnen Teilchen, und das Volumen des Körpers nimmt zu; zugleich nehmen die *Kohäsionskräfte*, welche die Atome beziehungsweise Moleküle des Festkörpers zusammen halten, geringer.

In der Technik versucht man geeignete Materialkombinationen zu nutzen, um mechanische Spannungen aufgrund von (unterschiedlich starken) Wärmeausdehnungen zu vermeiden. Beispielsweise werden in den Übergangskonstruktionen von Brücken Dehnungsfugen und Gleitlager eingesetzt, um temperaturbedingte Spannungen zu minimieren.

Ausdehnung von Flüssigkeiten

Ändert sich die Temperatur einer Flüssigkeit um einen bestimmten Betrag, so ändert sich entsprechend auch ihr Volumen. Mit steigender Temperatur nimmt das Volumen zu, mit sinkender Temperatur nimmt das Volumen ab.

Formel:

Die Volumenänderung ΔV einer Flüssigkeit des Volumens V ist proportional zur Temperaturänderung ΔT sowie zum (vom Stoff abhängigen) thermischen Volumenausdehnungskoeffizient γ :

$$\Delta V = \gamma \cdot \Delta T \cdot V \tag{135}$$

³ Die Näherungsformel erhält man, wenn man den Term $(1 + \alpha \cdot \Delta T)^3$ ausmultipliziert:

$$(1 + \alpha \cdot \Delta T)^3 = 1 + 3 \cdot (\alpha \cdot \Delta T)^1 + 3 \cdot (\alpha \cdot \Delta T)^2 + 1 \cdot (\alpha \cdot \Delta T)^3$$

Dadurch, dass die Werte von α sehr klein sind (Größenordnung: Ein Millionstel), können die höheren Potenzen von α im obigen Ergebnis in sehr guter Näherung vernachlässigt werden, da sie gegenüber dem linearen Term um ein vielfaches geringer sind. Es gilt somit bei Festkörpern stets $\gamma \approx 3 \cdot \alpha$.

Tab. 21: Volumenausdehnungskoeffizienten flüssiger Stoffe

Stoff	γ in $10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$
Aceton	1,46
Benzin	1,06
Essigsäure	1,08
Ethanol	1,40
Glycerin	0,52
Quecksilber	0,18
Wasser	0,21

Im Wesentlichen ist temperaturbedingte Volumenzunahme von Flüssigkeiten darauf zurückzuführen, dass die Geschwindigkeit der Atome beziehungsweise Moleküle in der Flüssigkeit zunimmt. Die Teilchen beanspruchen so mehr Raum innerhalb der Flüssigkeit, das Volumen nimmt zu.

Ändert sich das Volumen einer bestimmten Flüssigkeitsmenge, so ändert sich auch die Dichte der Flüssigkeit.⁴ Im Allgemeinen nimmt die Dichte von Flüssigkeiten mit wachsender Temperatur ab.

Formel:

Durch eine Temperaturänderung um ΔT ändert sich die Dichte ρ einer Flüssigkeit umgekehrt proportional zum Volumenausdehnungskoeffizient γ . Für die neue Dichte ρ_{neu} der Flüssigkeit gilt:

$$\rho_{\text{neu}} = \frac{\rho}{1 + \gamma \cdot \Delta T}$$

Die Anomalie des Wassers

Eine große Besonderheit („Anomalie“) des Wassers liegt darin, dass es bei 4 °C seine größte Dichte hat. Unterhalb dieser Temperatur dehnt es sich wieder aus, bis es bei 0 °C zu Eis erstarrt.

Beispiel:

- Im Sommer ist die Oberfläche eines Sees warm. Die Temperatur sinkt mit zunehmender Tiefe.
- Im Herbst kühlt das Wasser an der Oberfläche ab und sinkt nach unten. Das Tiefenwasser steigt empor und wird an der Oberfläche ebenfalls abgekühlt. Schließlich herrscht überall im Wasser die Temperatur 4 °C.
- Im Winter wird das Wasser an der Oberfläche weiter abgekühlt, sinkt aber nicht mehr ab. Bei 0 °C bildet sich an der Oberfläche des Sees eine (isolierende) Eisdicke, die Wassertemperatur am Grund des Sees beträgt weiterhin 4 °C. Bei starkem

⁴ Dies gilt genauso auch für Festkörper; da jedoch die Wärmeausdehnung bei Festkörpern wesentlich geringer ist als bei Flüssigkeiten, kann die temperaturbedingte Dichteänderung von Festkörpern meist vernachlässigt werden.

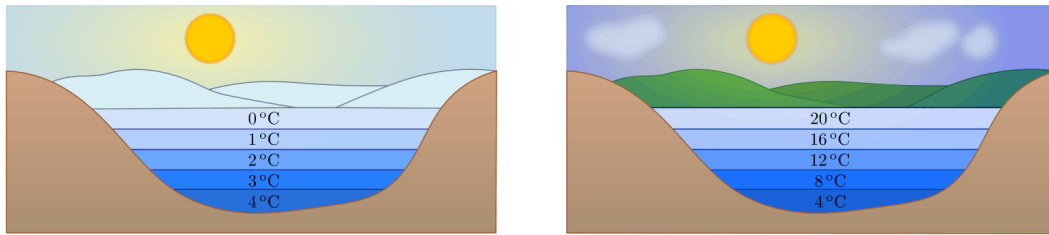


Abb. 166: Die Anomalie des Wassers am Beispiel eines Sees (links: Winter, rechts: Sommer).

und lang anhaltendem Frost wird die Eisdecke zunehmend dicker; flache Gewässer können dann von oben bis zum Grund gefrieren.

Eine zweite Besonderheit des Wassers liegt darin, dass es im erstarrten Zustand (Eis) eine geringere Dichte hat als im flüssigen Zustand. Dies hat einerseits zur Folge, dass Eis in Wasser schwimmt; andererseits dehnt sich Wasser beim Erstarren stark aus. Dabei kann es große Kräfte ausüben – mit Wasser gefüllte Gefäße können beim Gefrieren des Wassers platzen („Sprengwirkung“ des Eises). Bei Kraftfahrzeugen werden daher Frostschutzmittel in das Kühlwasser gemischt, welche die Erstarrungstemperatur absenken und ein Erstarren der Kühlflüssigkeit verhindern sollen.

Ausdehnung von Gasen

Bei Erwärmung dehnen sich Gase wesentlich stärker aus als Flüssigkeiten. Bleibt der Druck eines Gases während der Erwärmung konstant, so dehnt es sich proportional zur absoluten Temperatur aus.

Formel:

Bleibt der Druck p während einer Temperaturänderung konstant, so ist die Volumenänderung ΔV eines Gases mit Volumen V proportional zur Temperaturänderung ΔT sowie zum thermischen Volumenausdehnungskoeffizient γ :

$$\Delta V = \gamma \cdot \Delta T \cdot V \quad (136)$$

Dabei gilt in guter Näherung für alle Gase:

$$\gamma_{\text{Gas}} = \frac{1}{273,15 \text{ K}} \approx 3,66 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}} \quad (137)$$

Der Volumenausdehnungskoeffizient γ_{gas} bei konstantem Druck ist somit näherungsweise für alle Gase gleich.

Beispiel:

- Werden $V = 201$ Luft von $T_0 = 0^\circ\text{C}$ auf $T_1 = 10^\circ\text{C}$ erwärmt, so ändert sich das Volumen der Luft um

$$\Delta V = \gamma \cdot \Delta T \cdot V = \frac{1}{273} \frac{1}{\text{K}} \cdot 10 \text{ K} \cdot 201 \approx 0,731$$

Das Luftvolumen nimmt somit um etwa 0,731 zu.

Die temperaturbedingte Volumenzunahme von Gasen ist – wie bei Flüssigkeiten – im wesentlichen darauf zurückzuführen, dass die Geschwindigkeit der Atome beziehungsweise Moleküle im Gas zunimmt. Dadurch beanspruchen die Teilchen mehr Raum, das Volumen des Gases nimmt zu. Experimentell lässt sich eine Ausdehnung bei konstantem Druck beispielsweise mittels eines (Luft-)Ballons in einem Wasserbad oder mittels eines Zylinders mit beweglichem Kolben verwirklichen. In beiden Fällen bleibt die Menge der Gasteilchen innerhalb des Gefäßes konstant, es handelt sich also um geschlossene Systeme.

Kann ein Gas während einer Temperaturänderung um ΔT sein Volumen V nicht ändern, weil es beispielsweise in einem festen Behälter eingesperrt ist, so ändert sich anstelle dessen sein Druck p .

Definition:

Bleibt das Volumen V während einer Temperaturänderung konstant, so ist die Druckänderung Δp eines Gases mit Druck p proportional zur Temperaturänderung ΔT sowie zum (vom Stoff abhängigen) thermischen Volumenausdehnungskoeffizient γ :

$$\Delta p = \gamma \cdot \Delta T \cdot p \quad (138)$$

Die Zustandsgleichung eines idealen Gases

Unter Normaldruck und weit oberhalb des Siedepunkts verhalten sich alle Gase näherungsweise wie ein ideales Gas, d.h. das Volumen der einzelnen Gasteilchen kann (im Vergleich zum Gesamtvolumen) ebenso vernachlässigt werden wie die Wechselwirkung der einzelnen Teilchen untereinander.

Für das thermische Verhalten eines Gases sind neben der Temperatur T auch der Druck p und das Volumen V von Bedeutung.

Formel:

Bleibt die Masse eines (idealen) Gases konstant, so ist das Produkt aus Druck p und Volumen V , geteilt durch die absolute Temperatur T , konstant:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{konstant} \quad (139)$$

Die Gleichung (139) wird als „Zustandsgleichung eines idealen Gases“ bezeichnet und gilt unter Normalbedingungen auch in sehr guter Näherung für reale Gase. Sie wird häufig auch in folgender Form geschrieben:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

Dabei werden mit p_1, T_1, V_1 die thermischen Größen eines Gases *vor* einer Zustandsänderung beschrieben, entsprechend stellen p_2, T_2, V_2 die thermischen Größen *nach* der Zustandsänderung dar. Bei Kenntnis von fünf der sechs vorkommenden Größen kann somit jederzeit auch die sechste Größe berechnet werden.

Beispiel:

- Ein Gas mit einem Volumen von $V_1 = 50 \text{ cm}^3$, einem Druck von $p_1 = 2,5 \text{ bar}$ und einer Temperatur von $T_1 = 0^\circ \text{C} \approx 273 \text{ K}$ wird erwärmt. Dabei beträgt die neue Temperatur $T_2 = 30^\circ \text{C} \approx 303 \text{ K}$, gleichzeitig wird der Druck auf $p_2 = 6 \text{ bar}$ erhöht. Mit Hilfe der Zustandsgleichung für ideale Gase kann das neue Volumen V_2 berechnet werden:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Leftrightarrow V_2 = \frac{p_1 \cdot T_2 \cdot V_1}{p_2 \cdot T_1}$$

$$V_2 = \frac{2,5 \text{ bar} \cdot 303 \text{ K} \cdot 50 \text{ cm}^3}{6 \text{ bar} \cdot 273 \text{ K}} \approx 23,12 \text{ cm}^3$$

Das neue Luftvolumen V_2 beträgt somit rund $23,12 \text{ cm}^3$.

Aufgrund der vielen auftretenden Variablen ist die (allgemeine) Zustandsgleichung eines idealen Gases (139) etwas „unübersichtlich“. Anschaulicher wird die Bedeutung der Gleichung, wenn man die drei möglichen Spezialfälle betrachtet, die sich ergeben, wenn jeweils eine der Zustandsgrößen (p, T, V) konstant bleibt:

- Wird das Volumen V konstant gehalten („isochore“ Zustandsänderung), so ist das Verhältnis aus Druck und Temperatur konstant:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Wird beispielsweise die (absolute) Temperatur eines Gases bei gleich bleibendem Volumen verdoppelt, so verdoppelt sich auch der Druck im Gas.

- Wird der Druck p konstant gehalten („isobare“ Zustandsänderung⁵), so ist das Verhältnis aus Volumen und Temperatur konstant:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Wird die Temperatur eines Gases bei gleich bleibendem Druck erhöht, erhöht sich auch das Volumen und umgekehrt. Wird beispielsweise die Temperatur eines Gases verdoppelt, so verdoppelt sich auch sein Volumen.

Die Bestätigung dieses Zusammenhangs durch zahlreiche Experimente ist Grundlage der Festlegung der absoluten Temperatur auf $-273,15^\circ \text{C} = 0 \text{ K}$: Bei dieser

⁵ Der Zusammenhang $\frac{V}{T} = \text{konstant}$ für $p = \text{konstant}$ wird zu Ehren des Entdeckers Joseph Gay-Lussac auch als „Gesetz von Gay-Lussac“ bezeichnet.

Temperatur würde ein ideales Gas kein Volumen mehr besitzen. Praktisch wird dieser „absolute Nullpunkt“ nicht erreicht; reale Gase kondensieren vorher zu einer Flüssigkeit.

- Wird die Temperatur T konstant gehalten („isotherme“ Zustandsänderung⁶), so ist bei Gasen das Produkt aus Druck und Volumen konstant:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

Wird das Volumen eines Gases bei gleich bleibender Temperatur verkleinert, erhöht sich der Druck und umgekehrt. Wird beispielsweise das Volumen eines Gases bei konstanter Temperatur halbiert, so verdoppelt sich der Druck.

Eine Erweiterung der Zustandsgleichung für ideale Gase stellt die allgemeine Gasgleichung dar.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Die allgemeine Gasgleichung

Die *Zustandsgleichung für ideale Gase* in einem geschlossenen System kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$p \cdot V = \text{konst.} \cdot T$$

Betrachtet man 1 mol eines Gases, so ist der konstante Faktor auf der rechten Seite der obigen Gleichung gleich der allgemeinen Gaskonstante $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$; betrachtet man n mol an Teilchen, so ist die Konstante entsprechend n -mal so groß. Es gilt somit für beliebige Gasmengen innerhalb eines geschlossenen Systems:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad (140)$$

Diese Gleichung wird als „allgemeine Gasgleichung“ bezeichnet und gilt in sehr guter Näherung bei nicht allzu hohen Drücken auch für reale Gase.

Normalvolumen eines Gases:

Mit der Gleichung (140) kann beispielsweise bestimmt werden, welches Volumen V_0 die Stoffmenge $n = 1$ mol eines idealen Gases unter Normalbedingungen, also bei einem Druck von $p = 101,3 \text{ kPa}$ und einer Temperatur von $T = 273,15 \text{ K}$ einnimmt:

$$V_0 = \frac{1 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 273 \text{ K}}{101,3 \cdot 10^3 \text{ Pa}} \approx 0,0224 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 0,0224 \text{ m}^3 = 22,4 \text{ l}$$

⁶ Der Zusammenhang $p \cdot V = \text{konstant}$ für $T = \text{konstant}$ wird zu Ehren der Entdecker Robert Boyle und Edme Mariotte auch als „Gesetz von Boyle-Mariotte“ bezeichnet.

Bei der obigen Rechnung wurde die Einheit Joule als Newton mal Meter und die Einheit Pascal als Newton je Quadratmeter geschrieben. Als Ergebnis erhält man fest, dass ein Mol eines idealen Gases (und in guter Näherung auch ein Mol eines realen Gases) unter Normalbedingungen ein Volumen von rund 22,4 Litern einnimmt.

Teilchenzahl und molare Masse

Die allgemeine Gasgleichung stellt nicht nur einen Zusammenhang zwischen den drei Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur her, sondern gibt zusätzlich auch noch eine Beziehung zur Teilchenanzahl an. Da eine Stoffmenge von $n = 1$ mol einer Anzahl von $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen entspricht („Avogadro-Konstante“), folgt als weiterer Zusammenhang zwischen Stoffmenge n und Teilchenzahl N :

$$n = \frac{N}{N_A} \quad (141)$$

In einer Stoffmenge von n mol eines Gases sind also $n \cdot N_A$ Teilchen enthalten. Die Stoffmenge n lässt sich wiederum bestimmen, wenn man die Masse m eines Gases und seine molare Masse m_{Mol} kennt:

$$n = \frac{m}{m_M}$$

Die molare Masse m_M eines Gases kann anhand der relativen Atommasse u eines Elements aus einem *Periodensystem der Elemente* abgelesen werden. Bei Edelgasen, deren Teilchen aus einzelnen Atomen bestehen, ist die molare Masse mit der relativen Atommasse identisch. Bei Gasen wie Sauerstoff (O_2) oder Stickstoff (N_2), deren Teilchen aus zwei-atomigen Molekülen bestehen, entspricht die molare Masse der doppelten relativen Atommasse des Elements.

Beispiele:

- Wie groß ist die molare Masse m_M von Helium (He), Stickstoff (N_2), Sauerstoff (O_2) und Argon (Ar)?

Helium hat eine relative Atommasse von $4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Da Helium-Atome als einzelne Atome in Heliumgas auftreten, gilt auch für die molare Masse von Helium:

$$m_{\text{M,Helium}} = 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Stickstoff hat eine relative Atommasse von $14 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, Sauerstoff eine relative Atommasse von $16 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Sowohl Stickstoff wie auch Sauerstoff treten als zweiatomige Moleküle auf. Die molare Masse dieser Gase ist somit doppelt so gross wie die relative Atommasse der Elemente:

$$m_{\text{M,Stickstoff}} = 2 \cdot 14 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$m_{\text{M,Sauerstoff}} = 2 \cdot 16 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Argon hat eine relative Atommasse von $40 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Da Argon ebenso wie Helium als ein-atomiges Gas auftritt, gilt für die molare Masse von Argon:

$$m_{\text{M,Argon}} = 40 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

- Wie groß ist die molare Masse von Luft?

Luft besteht näherungsweise aus 78% Stickstoff, 21% Sauerstoff und 1% Argon. Die molare Masse von Luft entspricht der durchschnittlichen molaren Masse ihrer Bestandteile, wobei die unterschiedlichen Mengenverhältnisse als Gewichtungsfaktoren berücksichtigt werden:

$$m_{M,\text{Luft}} = 0,78 \cdot 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}} + 0,21 \cdot 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}} + 0,01 \cdot 40 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Anhand der molaren Masse eines Gases kann mittels der allgemeinen Gasgleichung beispielsweise dessen Dichte bei einem bestimmten Druck und einer bestimmten Temperatur bestimmt werden:

$$p \cdot V = \frac{m}{m_M} \cdot R \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot m_M}{R \cdot T}$$

Für Luft gilt beispielsweise unter Normalbedingungen, also bei $p = 101,3 \text{ kPa}$ und $T = 273 \text{ K}$:

$$\rho_{\text{Luft}} = \frac{101,3 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 273 \text{ K}} \approx 1294,9 \frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{g}}{\text{N} \cdot \text{m}} = 1294,9 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} \approx 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Hierbei wurde für die Einheit Pascal durch Newton je Quadratmeter und die Einheit Joule durch Newton mal Meter ersetzt. Der so berechnete Dichte-Wert von Luft stimmt mit experimentellen Messungen sehr gut überein.

Gasgemische und Partialdrücke

Bei Gasgemischen, wie beispielsweise Luft, kann die allgemeine Gasgleichung für jede einzelne Komponente aufgeschrieben werden:

$$p_i \cdot V = n_i \cdot R \cdot T$$

In dieser Gleichung gibt n_i die Stoffmenge der i -ten Komponente an. Die zu Grunde liegende Idee hierbei ist wiederum, dass sich die Gasteilchen nicht gegenseitig beeinflussen, die gleiche Temperatur haben sowie das gleiche Volumen einnehmen. Man kann die obige Gleichung auch so deuten, dass jede der i Komponenten zu einem eigenen „Partialdruck“ p_i führt:

$$p_i = \frac{n_i \cdot R \cdot T}{V}$$

Der Gesamtdruck eines Gasgemisches ist dann die Summe aller Partialdrücke der einzelnen Komponenten. Dieses Prinzip wird nach ihrem Entdecker auch als Gesetz von Dalton bezeichnet:

$$p_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots$$

Luft besteht beispielsweise zu 78% aus Stickstoff (N_2), zu 20,95% aus Sauerstoff (O_2) und zu 0,5% aus anderen Gasen (z.B. Argon und Kohlenstoffdioxid). Die Partialdrücke

der einzelnen Gase entsprechen den Mol-Anteilen $\frac{n_i}{n}$ der einzelnen Substanzen. Bei einem Normal-Luftdruck von 1,01 bar ergibt sich folglich ein Partialdruck von 0,78 bar für Stickstoff, ein Partialdruck von 0,2095 bar für Sauerstoff usw.

Luft kann zudem Wasserdampf aufnehmen, die dem Sättigungs-Dampfdruck von Wasser entspricht – dieser ist temperaturabhängig und beträgt bei 20 ° etwa 0,023 bar.

Die Van-der-Waals-Gleichung

Die allgemeine Gasgleichung (140) gilt in guter Näherung nur für Gase mit geringer Dichte. Bei großen Gasdichten, beispielsweise bei gesättigtem Dampf, können reale Gase nicht mehr als „ideale“ Gase betrachtet werden. In diesem Fall muss einerseits die Wechselwirkung zwischen den Gasmolekülen, andererseits auch das Eigenvolumen der Gasteilchen berücksichtigt werden. Aus der allgemeinen Gasgleichung ergibt sich mit den entsprechenden Korrektur-Termen die so genannte Van-der-Waals-Gleichung, die für n Mole eines Gases folgendermaßen lautet:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = n \cdot R \cdot T$$

Hierbei bezeichnet b das Eigenvolumen der Gasteilchen; durch den Korrekturterm $\frac{a}{V^2}$ wird der durch die Wechselwirkungen der Gasteilchen verursachte Binnendruck berücksichtigt.

In einem $p(V)$ -Diagramm verlaufen die Isothermen oberhalb einer bestimmten, als „kritisch“ bezeichneten Temperatur T_{kr} ebenso wie die Isothermen von idealen Gasen. Unterhalb von T_{kr} sind die Isothermen S-förmig gebogen.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Die kinetische Gastheorie

Viele reale Gase können unter Standardbedingungen in guter Näherung mittels des Modells der idealen Gase beschrieben werden: Die Anziehungskräfte zwischen den einzelnen Teilchen ist meist vernachlässigbar gering, und ebenso ist das Volumen der einzelnen Teilchen klein im Vergleich zum Gesamtvolumen des Gases. Geht man von diesen Annahmen aus, so kann ein Gas als große Anzahl einzelner Atome oder Moleküle angesehen werden, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in unterschiedliche Richtungen bewegen, wobei die einzelnen Bewegungsrichtungen und Geschwindigkeiten statistisch gleich verteilt sind.

In einem einfachen Modell kann man von einem einzelnen Gasteilchen ausgehen, das sich in einem kubischen Behälter in x -Richtung auf die linke Wand des Behälters zu bewegt. Bezeichnet man mit m die Masse des Gasteilchens und mit $-v_x$ seine ursprüngliche Geschwindigkeit, so gilt für die *Impulsänderung*, die das Teilchen bei einem elastischen Stoß mit der Wand erfährt:

$$\Delta(m \cdot v) = m \cdot v_x - (-m \cdot v_x) = 2 \cdot m \cdot v_x$$

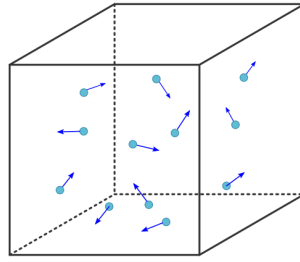


Abb. 167: Geschwindigkeitsverteilung von Gasteilchen in einem kubischen Behälter.

Bis das Teilchen wieder auf die linke Wand trifft, muss es eine Strecke von $s_x = 2 \cdot l$ zurücklegen, wenn l die Länge des Würfels ist. Bis zum nächsten Stoß mit der linken Wand vergeht somit folgende Zeit Δt :

$$\Delta t = \frac{s_x}{v_x} = \frac{2 \cdot l}{v_x}$$

Die Kraft, die das Teilchen auf die Wand ausübt, ist gleich der Impulsänderung je Zeit:

$$F = \frac{\Delta(m \cdot v)}{\Delta t} = \frac{2 \cdot m \cdot v_x}{\frac{2 \cdot l}{v_x}} = \frac{m \cdot v_x^2}{l}$$

Der Druck, der von dem einzelnen Teilchen auf die linke Wand ausgeübt wird, ist gleich dem Quotienten aus Kraft und Wandfläche:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot v_x^2}{A \cdot l} = \frac{m \cdot v_x^2}{V}$$

Im letzten Rechenschritt wurde die Beziehung $V = A \cdot l$ verwendet. Geht man nun nicht von einem einzelnen, sondern von N Teilchen aus, die sich in x -Richtung mit den Geschwindigkeiten $v_{x,1}, v_{x,2}, \dots, v_{x,n}$ hin- und herbewegen, so addieren sich die einzelnen Beiträge zum Gesamtdruck:

$$p = \frac{m}{V} \cdot (v_{x,1}^2 + v_{x,2}^2 + \dots + v_{x,n}^2)$$

Da in einem Gasvolumen üblicherweise sehr viele Teilchen vorkommen, ist es wesentlich sinnvoller, anstelle von N einzelnen Geschwindigkeits-Quadraten mit N -mal dem mittleren Geschwindigkeits-Quadrat der Teilchen zu rechnen. Dieses entspricht dem arithmetischen Mittel der einzelnen Werte:

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x,1}^2 + v_{x,2}^2 + \dots + v_{x,n}^2}{N} \iff v_{x,1}^2 + v_{x,2}^2 + \dots + v_{x,n}^2 = N \cdot \overline{v_x^2}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$p = \frac{m}{V} \cdot N \cdot \overline{v_x^2}$$

$$\Rightarrow p \cdot V = N \cdot m \cdot \overline{v_x^2}$$

Bei der Bewegung der Gasteilchen im Behälter tritt keine Geschwindigkeitsrichtung bevorzugt auf. Wenn sich im Durchschnitt gleich viele Gasteilchen in x -, y - und z -Richtung bewegen, muss $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ gelten.

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \iff \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{v^2}$$

Somit kann die obige Gleichung in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} p \cdot V &= \frac{1}{3} \cdot N \cdot m \cdot \overline{v^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot N \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2} \end{aligned}$$

Im letzten Rechenschritt wurde der Term auf der rechten Seite mit $1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$ multipliziert, was den Wert des Terms zwar unverändert lässt, es allerdings ermöglicht, den Faktor $\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2}\right)$ als mittlere kinetische Energie \bar{E}_{kin} der Gasteilchen aufzufassen. Formt man die Gleichung weiter um, so folgt:

$$p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \bar{E}_{\text{kin}}$$

Der Ausdruck $p \cdot V$ auf der linken Gleichungsseite entspricht nach der *allgemeinen Gasgleichung* gerade $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$. Anstelle der allgemeinen Gaskonstante R kann auch $R = N_A \cdot k_B$ geschrieben werden, wobei $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ die so genannte **Boltzmann-Konstante** ist.¹ Für $n = 1$ mol eines Gases gilt:

$$N_A \cdot k_B \cdot T = \frac{2}{3} \cdot N_A \cdot \bar{E}_{\text{kin}}$$

Somit erhält man als Ergebnis der kinetischen Gastheorie schließlich folgende Gleichung:

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T \tag{142}$$

Die kinetische Energie der Gasteilchen nimmt also direkt proportional mit der (absoluten) Temperatur des Gases zu. Mit Hilfe der Gleichung (142) kann einerseits bestimmt werden, welche kinetische Gesamtenergie die Teilchen einer Gasmenge bei einer bestimmten Temperatur aufweisen, andererseits allerdings auch berechnet werden, wie groß die durchschnittliche Geschwindigkeit der einzelnen Gasteilchen bei einer bestimmten Temperatur ist.

Beispiele:

- Wie groß ist die kinetische Gesamtenergie aller Moleküle eines idealen Gases bei einer Temperatur von 0°C und einer Stoffmenge von $n = 1$ mol?

Nach der kinetischen Gastheorie gilt für die durchschnittliche kinetische Energie eines einzelnen Gasteilchens:

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 273 \text{ K} \approx 5,65 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

¹ Mit $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ ist die sogenannte Avogadro-Konstante gemeint, welche die Anzahl an Teilchen je mol eines chemischen Stoffes angibt.

Multipliziert man diesen Wert mit der Anzahl $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ an Teilchen je Mol, so erhält man als Gesamtenergie für ein Mol an Teilchen:

$$\bar{E}_{\text{kin,ges}} = 5,65 \cdot 10^{-21} \text{ J} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \approx 3403 \frac{\text{J}}{\text{mol}}$$

Unter Normalbedingungen nimmt ein Mol eines idealen Gases ein „*Normalvolumen*“ von 22,4 l ein. Die darin enthaltene kinetische Energie $E_{\text{kin,ges}} \approx 3,4 \text{ kJ}$ aller Teilchen entspricht in etwa der kinetischen Energie eines $m = 1 \text{ kg}$ schweren Gegenstands, der sich mit einer Geschwindigkeit von $v = 82,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 297 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ bewegt. Diese beachtliche Energiemenge ist beispielsweise der Grund dafür, weshalb Wärmepumpen einen Teil der kinetischen Teilchen-Energien einer kälteren Umgebung „abzapfen“ und einer wärmeren Umgebung zuführen können.

Freiheitsgrade mehratomiger Gasteilchen

Nach Gleichung (142) ist die absolute Temperatur ein Maß für die mittlere Bewegungsenergie eines Gasteilchens. Ein einatomiges Gas kann sich translatorisch in jeder der drei Richtungen des Raumes bewegen; man sagt hierfür, dass ein solches Gasteilchen drei Translations-Freiheitsgrade besitzt. Zusätzlich kann sich ein atomares Gasteilchen um seinen Schwerpunkt drehen (ähnlich wie eine starre Kugel), es besitzt also auch drei Rotations-Freiheitsgrade.

- Einatomige Gase kann man sich modellhaft als „glatte“ Kugeln vorstellen; sie tauschen bei Zusammenstößen keine Rotationsenergie aus. Für einatomige Gase sind somit nur die drei Translations-Freiheitsgrade von Bedeutung.
- Gasteilchen, die aus zwei Atomen bestehen, kann man sich modellhaft wie „Hanteln“ vorstellen. Man hat experimentell festgestellt, dass bei derartigen Molekülen unter gewöhnlichen Bedingungen neben den drei Translations-Freiheitsgraden nur *zwei* Rotations-Freiheitsgrade in Erscheinung treten: Das Molekül kann bei normalen Temperaturen um beide Querachsen rotieren, nicht jedoch um die Längsachse; den dritten Rotations-Freiheitsgrad bezeichnet man als „eingefroren“.² Insgesamt weisen zweiatomige Gasteilchen somit 5 Freiheitsgrade auf.
- Dreiatomige Gase, deren Atome nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und mehratomige Gase besitzen drei (oder sogar mehr) Rotations-Freiheitsgrade.

Für die kinetische Gastheorie sind die Freiheitsgrade der Gasteilchen insofern von Bedeutung, als dass man festgestellt hat, dass die mittlere kinetische Energie eines idealen Gases $\frac{1}{2} \cdot k_B \cdot T$ je Mol und Freiheitsgrad beträgt:

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot i \cdot k_B \cdot T \quad (143)$$

² Anschaulich kann man sich die Gasteilchen als „glatte“ Kugeln beziehungsweise Hanteln vorstellen. Durch die glatte Oberfläche können die Teilchen keinen „Spin“ übertragen, ähnlich wie man beim Tischtennis dem Ball keinen Drall mitgeben kann, wenn der Belag des Schlägers glatt und nicht rau beziehungsweise klebrig ist. Eine Übertragung in Form von Rotationsenergie um die Kugelachse ist somit nicht möglich.

Hierbei ist $i = 3$ für einatomige Gase, $i = 5$ für zweiatomige Gase und $i = 6$ für drei- und mehratomige Gase.

Beispiel:

- Wie groß ist die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat $\overline{v^2}$ von Luftmolekülen bei $T = 20\text{ °C}$?

Nach der kinetischen Gastheorie gilt für die durchschnittliche kinetische Energie eines einzelnen Gasteilchens der Masse m :

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2} = \frac{5}{2} \cdot k_{\text{B}} \cdot T \quad \iff \quad \overline{v^2} = \frac{5 \cdot k_{\text{B}} \cdot T}{m}$$

Wie im Abschnitt *Teilchenzahl und molare Masse* gezeigt, beträgt die Masse von einem Mol an Stickstoff-Teilchen 28 g, die Masse von einem Mol an Sauerstoff-Teilchen 32 g. Teilt man diese Werte jeweils durch die Anzahl $N_{\text{A}} = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ an Teilchen je Mol, so erhält man als Masse eines Stickstoff- bzw. Sauerstoff-Teilchens:

$$m_{\text{N}_2} = \frac{28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}} \approx 4,65 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$m_{\text{O}_2} = \frac{32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}} \approx 5,31 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 5,31 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Setzt man diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhält man für die Geschwindigkeiten der Stickstoff- und Sauerstoffmoleküle:

$$\sqrt{\overline{v^2}_{\text{N}_2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot (273 + 20) \text{ K}}{4,6 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} \approx 663 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}_{\text{O}_2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot (273 + 20) \text{ K}}{5,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} \approx 618 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Stickstoffteilchen sind mit rund $663 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2340 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ somit schneller als die Sauerstoffteilchen mit rund $618 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2220 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Je geringer die molare Masse eines Gases ist, desto höher ist bei einer bestimmten Temperatur also die durchschnittliche Geschwindigkeit der enthaltenen Teilchen.

Die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

Die Geschwindigkeitswerte der einzelnen Gasteilchen sind statistisch verteilt, wobei die Verteilung aller vorkommenden Geschwindigkeiten durch eine Verteilungsfunktion $f(v)$ angegeben werden kann. Eine solche Funktion gibt an, mit welcher Häufigkeit eine Anzahl ΔN aller N Gasteilchen eine Geschwindigkeit zwischen v und $v + \Delta v$ besitzt:³

$$\Delta N = N \cdot f(v) \cdot \Delta v$$

³ Der Kurvenverlauf der Maxwell-Boltzmann-Verteilung wird über folgende Funktion festgelegt:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{m}{2 \cdot k_{\text{B}} \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_{\text{B}} \cdot T}} \quad (144)$$

Bei Gasteilchen entspricht die Häufigkeitsverteilung nicht einer Normalverteilung, sondern einer so genannten Maxwell'schen Verteilung. Im folgenden Diagramm ist diese Verteilungsfunktion für drei verschiedene Temperaturen dargestellt.

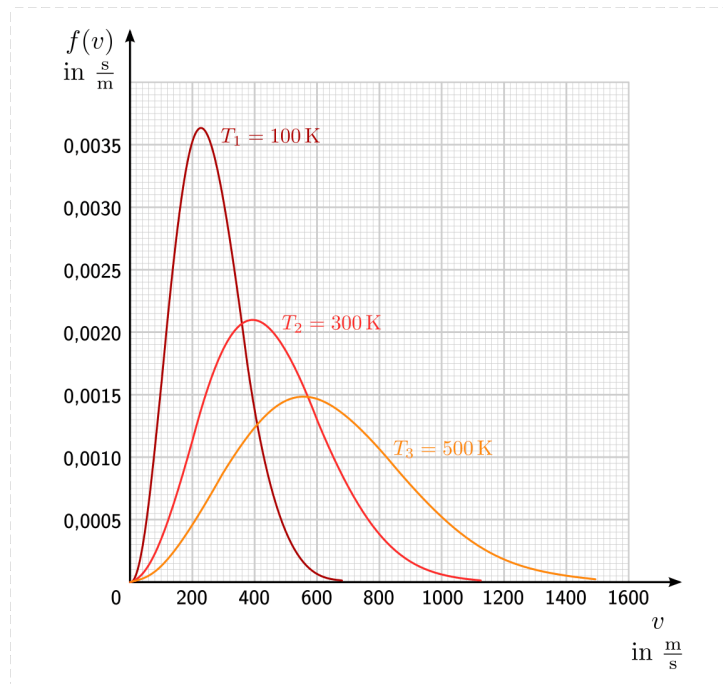


Abb. 168: Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Geschwindigkeiten von Sauerstoffmolekülen bei verschiedenen Temperaturen.

Die Geschwindigkeit, die dem Maximum der jeweiligen Kurve entspricht, wird als wahrscheinlichste Geschwindigkeit \hat{v} bezeichnet; sie stimmt nicht mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} aller Geschwindigkeitswerte überein.

... to be continued ...

Die Hauptsätze der Wärmelehre

Stellt man einen heißen Körper in eine kältere Umgebung, so kühlt er ohne Fremdeinwirkung allmählich ab. Nach einiger Zeit ist er im so genannten thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung, nimmt also im Normalfall die gleiche Temperatur wie seine Umgebung an.¹ Ebenso werden anfänglich kalte Körper durch eine warme Umgebung bis zum thermischen Gleichgewicht erwärmt.

¹ Genau genommen hat ein Körper, der im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung steht, nur dann die gleiche Temperatur wie die Umgebung, wenn keine Verdunstung auftritt. Dieser Vorgang entzieht dem Körper (beispielsweise einem Glas Wasser) nämlich die zum Verdunsten nötige Wärmemenge, so dass sich eine niedrigere Temperatur als die Umgebungstemperatur einstellt.

„Nullter“ Hauptsatz

Steht ein System A im thermischen Gleichgewicht mit einem System B, und steht gleichzeitig das System B im thermischen Gleichgewicht mit einem weiteren System C, so stehen auch die System A und C im thermischen Gleichgewicht. Diese Feststellung mag trivial klingen, stellt jedoch eine wichtige Voraussetzung beispielsweise für Temperatur-Messverfahren dar.

Da historisch gesehen zunächst die anderen drei Hauptsätze formuliert wurden und diese implizit auf die obige Feststellung aufbauen, wurde der genannte Hauptsatz im Nachhinein als „nullter“ Hauptsatz bezeichnet.

Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Energie kann nicht erzeugt oder vernichtet, sondern nur von einer Energieform in eine andere umgewandelt werden. Dieser Erhaltungssatz gilt nicht nur für mechanische Energieformen, sondern auch für Wärmemengen. Wird einem System von außen eine Wärmemenge ΔQ zugeführt oder eine Arbeitsmenge ΔW am System verrichtet, so erhöht sich dessen „innere“ Energie U um genau diesen Betrag:²

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (145)$$

Dieser Zusammenhang, der erstmals von [Julius Robert Mayer](#) und [Hermann von Helmholtz](#) formuliert wurde, wird erster Hauptsatz der Wärmelehre genannt. Ist ein System nach außen hin thermisch isoliert („abgeschlossenes System“), so bleibt die innere Energie U des Systems erhalten. Wird einem System Arbeit oder Wärme zugeführt, so erhalten die entsprechenden Mengen in den obigen Gleichungen üblicherweise ein positives, andernfalls ein negatives Vorzeichen.

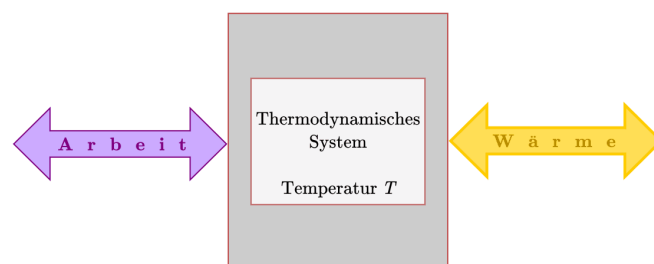


Abb. 169: Erster Hauptsatz: Energiebilanz eines thermodynamischen Systems.

Beispiele:

² Die innere Energie kennzeichnet als Zustandsgröße den energetischen Zustand eines Systems. Sie setzt sich zusammen aus den kinetischen und potentiellen Energien der im System enthaltenen Teilchen sowie den in den einzelnen chemischen Bindungen gespeicherten Bindungsenergien.

Während es schwierig ist, den Absolutwert der inneren Energie eines Systems zu bestimmen, können Änderungen der inneren Energie verhältnismäßig leicht gemessen oder berechnet werden. Für die Beschreibung der meisten thermodynamischen Prozesse ist dies bereits ausreichend.

- Erhitzt man beispielsweise einen Topf mit Wasser auf einer elektrischen Herdplatte, so führt man dem System (Topf) von außen eine Wärmemenge $+Q$ zu. Wird vom Topf weniger Wärme an die Umgebung abgegeben (beispielsweise durch Wärmestrahlung), so erhöht sich seine innere Energie und damit seine Temperatur.

Im umgekehrten Fall gibt jedes System durch *Wärmeleitung* und/oder *Wärmestrahlung* eine Wärmemenge $-Q$ ab, wenn es in eine kältere Umgebung gebracht wird. In beiden Fällen ändert sich die innere Energie, ohne dass mechanische Arbeit verrichtet wird.

- Reibt man sich die Hände, so erhöht sich deren Temperatur, ohne dass von außen Wärme zugeführt wird. In diesem Fall führt die verrichtete Reibungsarbeit zu einer Erhöhung der inneren Energie.

Im umgekehrten Fall kann sich ein System (beispielsweise ein eingeschlossenes Gas) prinzipiell auch innere Energie abgeben, ohne dass es Wärme mit seiner Umgebung austauscht. Beispielsweise hebt das in einem Verbrennungsmotor bei der Zündung des Luft-Treibstoff-Gemisches entstehende Gas den Hubkolben in kürzester Zeit an; dabei verändert sich sein Druck und sein Volumen. Gegenüber der verrichteten Volumenänderungsarbeit ΔW des Gases ist die durch Wärmeleitung bzw. Wärmestrahlung abgegebene Wärmemenge ΔQ bei diesem Prozess vernachlässigbar klein

Vorgänge wie im letzten Beispiel, bei denen innere Energie (im Idealfall) ohne Wärmeaustausch in Arbeit umgewandelt wird, nennt man *adiabatisch*. Sie lassen sich aufgrund stets auftretender Wärmestrahlung und nur endlichen Wärmewiderstandswerten nie vollständig verwirklichen, können aber beispielsweise bei sehr schnell stattfindenden Prozessen zumindest in guter Näherung auftreten.

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre schließt als Energie-Erhaltungssatz die Existenz einer Maschine aus, die ohne Zufuhr von Energie mechanische Arbeit verrichten kann.

Wärmequellen, Heiz- und Brennwert

Gibt ein System Wärme an sein Umgebung ab, so wird es als Wärmequelle bezeichnet. Wird an diesem System keine mechanische Arbeit verrichtet, so stammt die als Wärme frei werdende Energie aus der chemischen Bindungsenergie der im System enthaltenen Teilchen; die Abgabe von Wärme geht also mit einer Verringerung der inneren Energie U des Systems einher.

Die Energiemenge, die beim Verbrennen von Heizstoffen wie Holz, Benzin, Diesel, Kohle oder Erdgas freigesetzt wird, heißt *Verbrennungswärme* Q_H . Sie lässt sich anhand der Masse m des Brennstoffs sowie dessen Heizwert H_i berechnen:

$$Q_H = m \cdot H_i$$

Der Heizwert H_i ist eine materialspezifische Größe und wird bei Festkörpern und Flüssigkeiten üblicherweise in $\frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$, bei Gasen in $\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$ angegeben. Für verschiedene Materialien ist in Tabellenwerken neben dem Heizwert H_i oftmals zusätzlich der Brennwert H_s des Materials angegeben. Letzterer gibt an, wie viel Wärme genutzt werden kann, wenn auch

die *Verdampfungswärme* des im Brennstoff enthaltenen oder bei der Verbrennung entstehenden Wasseranteils mit genutzt werden kann.³ Hierfür muss der bei der Verbrennung frei werdende Wasserdampf wieder an einer geeigneten Stelle kondensieren, was bei Öfen oder Verbrennungsmotoren nur in geringem Umfang möglich ist. Bei der Verbrennung von Nahrungsmitteln in den einzelnen Körperzellen eines Organismus hingegen wird auch dieser Wärmeanteil genutzt, so dass der Energiegehalt von Nahrungsmitteln üblicherweise als Brennwert (ebenfalls in $\frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$) angegeben wird.

Feste und flüssige Brennstoffe	Durchschnittlicher Heizwert in MJ/kg	Gasförmige Brennstoffe	Durchschnittlicher Heizwert in MJ/m ³
Benzin	41	Ammoniak	14
Braunkohle	12	Butan	124
Diesel	42	Methan	36
Ethanol	27	Propan	94
Heizöl	42	Stadtgas	20
Holz	12	Wasserstoff	11
Petroleum	42		
Steinkohle	30		

Da es sich bei vielen Brennstoffen um Substanzen aus dem Bereich der organischen Chemie und/oder um Substanzen mit unterschiedlich möglichen Zusammensetzungen handelt, können die tatsächlichen Heizwerte von den angegebenen Durchschnittswerten geringfügig abweichen. Bei Nahrungsmitteln wird der Brennwert aus den Anteilen der drei Energieträger berechnet: Kohlenhydrate haben einen Brennwert von $17,2 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$, Proteine ebenso; Fette haben sogar einen Brennwert von $38,9 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$. Die Brennwerte von Lebensmitteln sind also ähnlich groß wie die Heizwerte der übrigen gängigen Brennstoffe.

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Der zweite Hauptsatz der Wärmelehre ist im Laufe der Geschichte auf drei verschiedene Arten formuliert worden, wobei sich herausgestellt hat, dass all diese verschiedenen Formulierungen gleichwertig sind.

Formulierung nach Clausius

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre schließt zwar die Existenz einer Maschine aus, die Arbeit ohne Energiezufuhr verrichten kann. Es wäre mit dem ersten Hauptsatz jedoch

³ Der Brennwert eines Materials ist stets größer als sein Heizwert. Früher wurde der Brennwert H_s daher als oberer Heizwert H_o und der Heizwert H_i als unterer Heizwert H_u bezeichnet. Inzwischen haben sich allerdings die entsprechenden lateinischen Bezeichnungen H_s („superior“) und H_i („inferior“) international durchgesetzt.

Auch wenn ein Brennstoff keine Restfeuchte besitzt, kann es bei der Verbrennung zur Bildung von Wasserdampf kommen, wenn einzelne Wasserstoff-Atome des Brennstoffs mit dem Sauerstoff der Luft reagieren. Beim Brennwert wird dann die Wärmemenge mit einbezogen, die diese Menge Wasserdampf beim Kondensieren freisetzt.

denkbar, dass eine Maschine, deren innere Energie U unverändert bleibt, ausschließlich Wärme in Arbeit umwandelt. Beispielsweise wäre es nach dem ersten Hauptsatz möglich, dass ein Schiff auf einem Ozean in der Lage ist mechanische Arbeit zu verrichten alleinig dadurch, dass es dem Ozean Wärme entzieht.

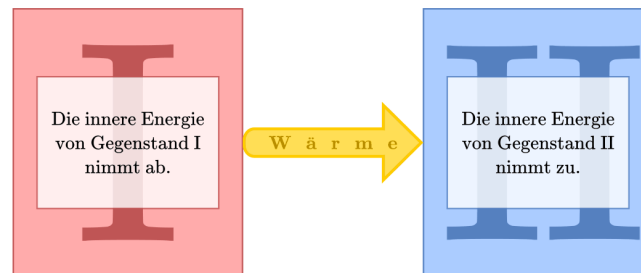


Abb. 170: Richtung des Wärmestroms nach dem zweiten Hauptsatz: Gegenstand I erwärmt Gegenstand II.

Der zweite Hauptsatz schließt die Existenz eines solchen „Perpetuum Mobiles“ aus, indem er vorgibt, in welche *Richtung* eine Übertragung von Wärme stattfindet. Diese Tatsache wurde ursprünglich von **Rudolf Clausius** formuliert:

„Wärme fließt immer vom wärmeren System in Richtung eines kälteren Systems.“

Möchte man mittels einer Maschine Wärme in mechanische Arbeit umwandeln („Wärmekraftmaschine“), so benötigt man zunächst zwei unterschiedlich warme Systeme, so dass überhaupt ein Wärmestrom auftritt. Bringt man diese beiden Systeme in Kontakt, so fließt eine Wärmemenge Q_H vom heißen System in Richtung des kälteren. Von diesem Wärmestrom kann ein (zunächst nicht näher bestimmter) Anteil W an Arbeit „abgezapft“ werden, die restliche Wärme Q_K fließt zum kälteren System.

Quantitativ gilt hierbei:

$$Q_H = W + Q_K$$

Bei einer Wärmekraftmaschine ist man in erster Linie am Anteil der mechanischen Arbeit W interessiert. Man definiert den *Wirkungsgrad* η somit als Quotient der verrichteten mechanischen Arbeit $W = Q_H - Q_K$ und der dafür investierten Wärmemenge Q_H :

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_K}{Q_H} = 1 - \frac{Q_K}{Q_H} \quad (146)$$

Der so definierte Wirkungsgrad kann nicht größer als 1 beziehungsweise 100% sein; der maximale Wirkungsgrad von 100% wird genau dann erreicht, wenn $Q_K = 0$ ist, also keine Wärme an das kältere System fließt.

Formulierung nach Carnot

Bereits in früheren Jahren **Sadi Carnot** in ähnlicher Weise eine Formel hergeleitet, die den maximalen Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine beschreibt. Er kam zu folgendem Ergebnis:

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_K}{T_H} \quad (147)$$

Auch bei dieser Formulierung des zweiten Hauptsatzes kann der Wirkungsgrad einer Wärmemaschine nicht größer als 100% sein; dieser wird genau dann erreicht, wenn $T_K = 0\text{ K}$ ist. Bei jeder anderen Temperatur ist $\eta_{\max} < 1$. Der Wirkungsgrad ist umso größer, desto höher die Temperatur T_H des heißen Systems und desto niedriger die Temperatur T_K des kalten Systems ist.

Carnot hat bei seiner Formulierung zwischen zwei Arten von Prozessen unterschieden:

- *Reversible* Prozesse können in beide Richtungen ablaufen. Die Rückwärtsrichtung entspricht dabei der genauen Umkehrung der Vorwärtsrichtung, als ob eine Videoaufzeichnung rückwärts abgespielt würde. Läuft der Prozess einmal in Hin- und einmal in Rückrichtung ab, so sind beide Systeme anschließend unverändert.
- *Irreversible* Prozesse laufen von selbst nur in eine bestimmte Richtung ab. Um den Prozess in Gegenrichtung ablaufen zu lassen, muss Energie zugeführt werden.

Alle realen Prozesse, in denen Reibung auftritt, sind irreversibel, da die durch Reibungsarbeit erzeugte Wärme nicht wieder zurück in mechanische Arbeit umgewandelt werden kann.

Der maximale Wirkungsgrad η_{\max} nach Gleichung (147) gilt exakt für reversible Prozesse, die zwischen zwei Systemen mit den Temperaturen T_H und T_K stattfinden („Carnot-Prozess“). Bei irreversiblen Prozessen, also Prozessen mit Reibung, ist der tatsächliche Wirkungsgrad bei den gegebenen Temperaturen kleiner als η_{\max} .

Kältemaschinen und Wärmepumpen

Durch Zuführen von (mechanischer) Arbeit kann ein Prozess entgegen seiner natürlichen Richtung, also vom kalten zum heißen System hin, ablaufen.

Je nach Anwendungszweck unterscheidet man zwischen zwei Prozessarten:

- Bei einer Kältemaschine, beispielsweise einem Kühlschrank oder einer Klimaanlage, wird dem kälteren System mittels mechanischer Arbeit Wärme entzogen, damit dieses weiter abkühlt. Die entzogene Wärme wird an das wärmere System abgegeben.
- Bei einer Wärmepumpe wird dem kalten System mittels mechanischer Arbeit Wärme entzogen, um diese als Nutzwärme einem wärmerem System zuzuführen.

In beiden Anwendungsfällen kann, wie bei einer Wärmekraftmaschine, die nutzbare Energiemenge in Relation zur aufgewendeten Energiemenge gesetzt werden. Bei Kältemaschinen und Wärmepumpen kann durch das „Umpumpen“ mehr Wärme genutzt werden, als mechanische Arbeit investiert werden muss. Anstelle von einem Wirkungsgrad, der stets kleiner als 100% ist, spricht man daher von so genannten „Leistungszahlen“:

- Bei einer Kältemaschine ist die interessierende Größe die Wärmemenge Q_K , die dem kalten System entzogen wird. Für die Leistungszahl LZ einer Kältemaschine gilt damit:

$$LZ = \frac{Q_K}{W}$$

- Bei einer Wärmepumpe ist die interessierende Größe die Wärmemenge Q_H , die dem wärmeren System zugeführt wird. Für die Leistungszahl LZ einer Wärmepumpe gilt damit:

$$LZ = \frac{Q_H}{W}$$

In beiden Fällen sind die Leistungszahlen größer als Eins. Gute Wärmepumpen können Leistungszahlen von ≈ 3 erreichen, bei Kältemaschinen sind die Leistungszahlen wegen $Q_K < Q_H$ geringer.

Entropie

Neben den oben beschriebenen Formulierungen von Clausius und Carnot gibt es eine dritte Möglichkeit, den zweiten Hauptsatz der Wärmelehre zu beschreiben; eine zentrale Bedeutung hat hierbei der Begriff der „Entropie“.

Als „Entropie“ S bezeichnet man den „Grad der Unordnung“ eines thermodynamischen Systems. Der zweite Hauptsatz der Wärmelehre schließt hierbei aus, dass bei spontan (also ohne Energiezufuhr) ablaufenden Prozessen aus Unordnung plötzlich Ordnung entsteht. Ein Schreibtisch räumt sich beispielsweise auch nicht von selbst auf, sondern wird im Lauf der Zeit immer chaotischer, bis man selbst mal wieder Arbeit verrichtet und Ordnung herstellt; ebenso entstehen bei einem herunterfallenden Glas von selbst viele chaotisch verteilte Glasscherben, aber beim Herunterfallen von Glasscherben wird sich nicht von selbst wieder ein Glasgefäß bilden.

Auf mikroskopischer Ebene kann man sich mechanische Arbeit als gezielte Verschiebung von Teilchen im Raum vorstellen – Wärme hingegen stellt eine ungerichtete Bewegung von Teilchen dar. Es ist möglich eine gerichtete Bewegung in eine ungerichtete umzuwandeln (Arbeit \rightarrow Wärme), doch es ohne ein Verrichten von Arbeit nicht möglich, eine ungerichtete Bewegung vieler Teilchen eine vollständig gerichtete Bewegung zu erzeugen. Man sagt daher, dass bei einer Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme-Energie diese „entwertet“ wird.

Ähnlich wie bei der potentiellen Energie ist es auch bei der Entropie S nicht einfach, einen konkreten Wert anzugeben; es ist allerdings möglich, die *Änderung* ΔS der Entropie bei einem Prozess quantitativ anzugeben:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (148)$$

In dieser Formel beschreibt ΔQ die während des Prozesses umgesetzte Wärmemenge:

- Ist $\Delta Q > 0$, so wird dem System Wärme zugeführt (wodurch auch die Entropie zunimmt).
- Ist $\Delta Q < 0$, so wird Wärme vom System abgegeben (wodurch sich auch die Entropie wieder verringert).

Mit T wird die absolute Temperatur bezeichnet, bei welcher der Prozess abläuft. Ändert sich die Temperatur während eines Prozesses, so kann man näherungsweise mit der durchschnittlichen Temperatur (in Kelvin) rechnen.⁴

Reversible und nicht reversible Prozesse

Ist die Entropie-Änderung während eines Prozesses gleich Null, so bezeichnet man diesen als „reversibel“: Er kann spontan in beide Richtungen ablaufen. Ein Beispiel für einen solchen Prozess ist das Schmelzen beziehungsweise Gefrieren von Eis:

Beispiel:

- Welche Entropie-Änderung ergibt sich insgesamt, wenn $m = 1,0 \text{ kg}$ Eis schmilzt beziehungsweise gefriert?

Beim Schmelzen beziehungsweise Gefrieren bleibt die Temperatur konstant; bei einem normalen Luftdruck liegt der Gefrierpunkt von Wasser bei $T = 0^\circ\text{C} \approx 273 \text{ K}$. Für die zum Schmelzen des Eises benötigte Schmelzwärme Q_s gilt:

$$Q_s = m \cdot q_s = 1,0 \text{ kg} \cdot 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 334 \text{ kJ}$$

Für die Entropieänderung ΔS_{Fl} des Wassers ergibt sich somit:

$$\Delta S_{\text{Wasser}} = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{334 \text{ kJ}}{273 \text{ K}} \approx 1,22 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Im gleichen Maß, wie die Entropie des Wassers zunimmt, nimmt die Entropie der Umgebung, welcher die Wärme entzogen wurde, ab:

$$\Delta S_{\text{Umgebung}} = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{-334 \text{ kJ}}{273 \text{ K}} \approx -1,22 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Beide Wärme-Umsätze finden bei der gleichen Temperatur statt; da auch die umgesetzten Wärmemengen ΔQ gleich sind, ist die Gesamt-Entropie-Änderung des gesamten Systems (Wasser + Umgebung) bei beiden Vorgängen gleich Null:

$$\Delta S_{\text{ges}} = \Delta S_{\text{Wasser}} + \Delta S_{\text{Umgebung}} = 1,22 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 1,22 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 0$$

Der Vorgang ist somit reversibel – er kann spontan in beide Richtungen ablaufen. Beim Gefrieren ist der Vorgang genau umgekehrt: Das Wasser gibt die Schmelzwärme an die Umgebung ab, wodurch sich die Entropie des Wassers verringert und die Entropie der Umgebung zunimmt; auch hier ist die Entropie-Änderung insgesamt gleich Null.

⁴ Bei einer genaueren Betrachtung muss man den Prozess in kleine Abschnitte unterteilen und jeweils die einzelnen Wärmeumsätze ΔQ_i bei der jeweiligen Temperatur T_i aufsummieren; nutzt man die Integralrechnung, so kann man die Entropieänderung während eines Prozesses mittels $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$ berechnen.

Andere Prozesse, bei denen sich die Entropie ändert, heißen irreversibel: Sie finden ohne eine externe Energiezufuhr stets nur in Richtung zunehmender Entropie statt.

- Welche Entropie-Änderung ergibt sich insgesamt, wenn man in einem isolierten Gefäß $m_1 = 1,0 \text{ kg}$ Wasser mit einer Temperatur von $T_1 = 10^\circ\text{C}$ mit $m_2 = 1,0 \text{ kg}$ Wasser mit einer Temperatur von $T_2 = 30^\circ\text{C}$ vermischt?

Da die beiden zu vermischenden Flüssigkeiten die gleiche Masse und die gleiche Wärmekapazität ($c_{\text{Wasser}} = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$) haben, wird sich als Mischtemperatur der Mittelwert zwischen beiden Ausgangs-Temperaturen einstellen, es muss also $T_M = 20^\circ\text{C}$ sein.

Geht keine Wärme an die Umgebung verloren, so stammt die zur Erwärmung des kalten Wassers nötige Wärmemenge ΔQ von der warmen Flüssigkeit. Mit $|\Delta T| = 10 \text{ K}$ für beide Flüssigkeiten gilt also:

$$|\Delta Q_1| = |\Delta Q_2| = m \cdot c \cdot |\Delta T| = 1,0 \text{ kg} \cdot 10 \text{ K} \cdot 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} = 42 \text{ kJ}$$

Die aufgegebene beziehungsweise abgegebene Wärmemenge ist betraglich gleich; allerdings ist ΔQ_1 positiv, da dieses System Wärme aufnimmt, und ΔQ_2 negativ, da dieses System Wärme abgibt. Beide Teilprozessen (Erwärmen beziehungsweise Abkühlen) finden allerdings bei unterschiedlichen Durchschnitts-Temperaturen statt: Für die sich erwärmende Flüssigkeit gilt:

$$\bar{T}_1 = \frac{T_{1,\text{start}} + T_{1,\text{end}}}{2} = \frac{10 + 20}{2}^\circ\text{C} = 15^\circ\text{C}$$

Für die sich abkühlende Flüssigkeit gilt entsprechend:

$$\bar{T}_2 = \frac{T_{2,\text{start}} + T_{2,\text{end}}}{2} = \frac{30 + 20}{2}^\circ\text{C} = 25^\circ\text{C}$$

Die gesamte Entropie-Änderung ΔS_{ges} entspricht der Summe der Entropie-Änderungen beider Teil-Systeme:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{ges}} &= \Delta S_1 + \Delta S_2 \\ &= \frac{\Delta Q_1}{\bar{T}_1} + \frac{\Delta Q_2}{\bar{T}_2} \\ &= \frac{42 \text{ kJ}}{(273 + 15) \text{ K}} + \frac{-42 \text{ kJ}}{(273 + 25) \text{ K}} \\ &= 0,1458 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} - 0,1409 \frac{\text{kJ}}{\text{K}} = +4,894 \frac{\text{J}}{\text{K}} \end{aligned}$$

Die Entropie des kälteren Teil-Systems nimmt stärker zu, als die des wärmeren Teil-Systems abnimmt. Die gesamte Entropie-Änderung ist folglich positiv, was auf einen irreversiblen Vorgang schließen lässt: Die vermischt Flüssigkeiten werden sich also nicht wiederum spontan (also ohne Aufwenden von Arbeit) in zwei unterschiedlich warme Teil-Flüssigkeiten aufteilen.

Wie diese beiden Beispiele zeigen, erhöht sich durch Wärmezufuhr nicht zwingend die Temperatur, stets aber wegen $\Delta Q = T \cdot \Delta S$ die Entropie des erwärmten Systems.

Dritter Hauptsatz der Wärmelehre

Der dritte Hauptsatz der Wärmelehre, auch *Nernst'sches Wärmetheorem* genannt, macht eine Aussage über das Verhalten von Stoffen in unmittelbarer Nähe des absoluten Nullpunktes, also von 0 K. Man kann diesen Hauptsatz in Kurzform folgendermaßen formulieren:

„Es ist unmöglich, ein System durch irgendeinen Vorgang auf den absoluten Nullpunkt abzukühlen.“

Durch den dritten Hauptsatz der Wärmelehre wird somit ein Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine von 100%, wie er für einen *Carnot-Prozess* theoretisch denkbar wäre, explizit ausgeschlossen.

Verwendet man den Begriff der Entropie, so lässt sich der dritte Hauptsatz der Wärmelehre gleichwertig auch folgendermaßen formulieren:

„Am absoluten Nullpunkt ist die Entropie eines Systems gleich Null.“

Anschaulich kann man sich dies etwa so vorstellen: Eine Entropie von Null ist gleichbedeutend mit einer perfekten Ordnung. Um eine solche perfekte Ordnung zu erreichen, muss Arbeit verrichtet beziehungsweise Energie zugeführt werden. Eine Energiezufuhr bewirkt jedoch, dass die Temperatur nicht den absoluten Nullpunkt erreichen kann. Auch mit dieser Formulierung wird somit (implizit) ausgeschlossen, dass der absolute Temperatur-Nullpunkt erreicht werden kann.

Wärmekraftmaschinen

Druck-Volumen-Diagramm Ein Druck-Volumen-Diagramm, auch Arbeitsdiagramm oder PV-Diagramm genannt, ist die grafische Darstellung der Beziehung zwischen Druck und Volumen, die zeitabhängig während der Motortakte im Zylinder eines Verbrennungsmotors abläuft. Diese Darstellung der Vorgänge in einem Verbrennungsmotor wird häufig dazu verwendet, die Auswirkung eines variablen Zündzeitpunkts auf die Druckverhältnisse im Zylinder darzustellen.

1) Ansaugtakt: Das Einlassventil ist geöffnet, im Zylinder herrscht der Umgebungsluftdruck von ca. 1 bar. Da sich der Zylinder nach unten bewegt, wird das Volumen größer; ein leichter Unterdruck entsteht.

2) Verdichtungstakt Alle Ventile sind geschlossen. Der Zylinder bewegt sich nach oben, das Volumen wird kleiner. Der Druck des Kraftstoff-Luft-Gemisches im Zylinder vergrößert sich.

3a) Arbeitstakt Das Kraftstoff-Luft-Gemisch wird entzündet. Der Druck steigt stark an. Da sich der Kolben im oberen Totpunkt befindet, ist das Volumen noch sehr klein.

3b) Arbeitstakt Das verbrennende Kraftstoff-Luft-Gemisch drückt den Kolben nach unten. Das Volumen vergrößert sich, der Druck sinkt.

4) Auspufftakt Das Auslassventil wird geöffnet (a), das verbrannte Gasgemisch wird ausgestoßen. Das Volumen wird geringer (b) und der Druck in Zylinder fällt bis zum Umgebungsluftdruck ab.

Kreisprozesse

Der Zustand eines Gases kann durch die Angabe seines Druck p , seines Volumens V und seiner Temperatur T beschrieben werden. Ändert sich der Zustand eines Gases, so ändern sich entweder alle drei Größen, oder nur zwei von ihnen, während die dritte Größe konstant gehalten wird: Bei isothermen Zustandsänderungen wird die Temperatur, bei isochoren das Volumen und bei isobaren der Druck konstant gehalten.

In Wärmekraftmaschinen wie Benzin- oder Dieselmotoren werden derartige Zustandsänderungen nacheinander wiederholt durchlaufen. Man nennt einen solchen Vorgang „Kreisprozess“, da das Gas nach jedem Durchgang wieder den ursprünglichen Zustand erreicht.

Der Carnot-Prozess

... to be continued...

Elektrizität und Magnetismus

Die Elektrizitätslehre ist die Wissenschaft der elektrischen Ladungen und der mit ihnen verknüpften elektrischen und magnetischen Felder; gleichzeitig ist sie die Basis der **Elektronik** als anwendungsorientierter Fachrichtung.

Elektrische Ladung

Alle Stoffe, die wir kennen, sind aus Atomen aufgebaut. Jedes dieser Atome besteht wiederum aus noch kleineren Bestandteilen. Für die Elektrizität und den Magnetismus sind insbesondere die positiv geladenen Protonen des Atomkerns sowie die negativ geladenen Elektronen der Atomhülle von Bedeutung.

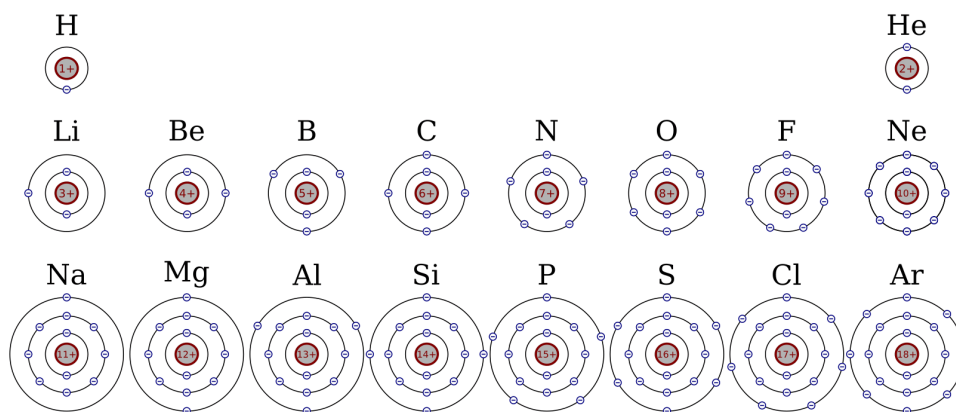


Abb. 171: Die ersten Elemente des Periodensystems im Atomschalenmodell.

Vereinfacht lassen sich Elektronen als kleine Teilchen auffassen, die auf kugelartigen Bahnen den Atomkern umkreisen, ähnlich wie die Planeten unseres Universums die Sonne umkreisen. Da die Elektronen auf den inneren Bahnen („Schalen“) sehr fest an den Atomkern gebunden sind, kommen sie als Ladungsträger für den elektrischen Strom nicht in Frage. Die elektrischen Eigenschaften eines Stoffes werden somit (fast) ausschließlich durch diejenigen Elektronen beeinflusst, die sich auf der äußersten Schalte befinden („Valenzelektronen“).

Allgemein gilt für jedes chemische Element:

- In einem Atom ist die Anzahl der Protonen gleich der Anzahl der Elektronen.

Während die Protonen fest im Atomkern verankert sind, sind die Elektronen je nach Art des Stoffes mehr oder weniger stark gebunden.

Elektronen können ein Atom auch komplett verlassen. Als „Atomrumpf“ bleibt dann ein positiv geladenes Ion („Kation“) zurück. Der Stoff bleibt dabei allerdings unverändert – charakteristisch für jedes chemische Element ist nur die Anzahl der Protonen im Atomkern.

- Protonen und Elektronen sind gleich stark geladen.

Da jedes Atom gleich viele positive wie negative Ladungsträger besitzt, ist seine Gesamtladung, d.h. die Summe aller Ladungen, gleich null. Von außen betrachtet erscheint ein Atom deshalb als ein elektrisch neutrales Teilchen.

Alle in der Realität vorkommenden elektrischen Ladungsmengen setzen sich aus den Ladungen der Elektronen und Protonen zusammen.

Einheit:

Man hat als Einheit der elektrischen Ladung Q eine Ladungsmenge festgelegt, die so groß ist wie die elektrische Ladung von $6,2 \cdot 10^{18}$ Elektronen. Diese Einheit wird Coulomb (C) genannt.

Mittels dieser Festlegung kann man ebenso sagen, dass ein Elektron eine Ladung von $0,000\,000\,000\,000\,000\,16\,C$ besitzt. Diese Ladung ist gleichzeitig die kleinste Ladung, die frei in der Natur vorkommen kann – man nennt sie daher auch „Elementarladung“ e .

Ladungstrennung

Unter bestimmten Bedingungen können Elektronen von einem Körper abgetrennt und von einem anderen Körper zusätzlich aufgenommen werden. Durch derartige Vorgänge werden Körper elektrisch geladen. Dabei gilt stets:

- Ein Körper ist elektrisch neutral, wenn gleich viele positive und negative Ladungen vorhanden sind.
- Ein Körper ist elektrisch positiv geladen (+), wenn ein Mangel an Elektronen vorhanden ist.
- Ein Körper ist elektrisch negativ geladen (-), wenn ein Überschuss an Elektronen vorhanden ist.

Die Gesamtmenge an Ladung bleibt bei jeder Ladungstrennung erhalten. In Festkörpern lassen sich durch Reibung nur Elektronen von einem Körper auf einen anderen übertragen. In Flüssigkeiten und Gasen sind auch die positiven Ladungsträger beweglich.

Beispiel:

- Reibt man ein Stück Hartgummi (Füller, Kamm etc.) an einem Stück Wolle (Schal, Pullover etc.), so gehen Elektronen von der Wolle zu dem Hartgummi über. Trennt man beide voneinander, so bleibt das Hartgummi durch die zusätzlichen Elektronen

negativ geladen. In der Wolle bleiben entsprechend Atome mit fehlenden Elektronen zurück; die Wolle ist aufgrund dieser fehlenden Elektronen positiv geladen.

Ob ein Körper durch einen Reibungsvorgang positiv oder negativ aufgeladen wird, hängt von der Art der beteiligten Stoffe ab. Reibt man zwei Körper aneinander, so gibt der näher am Pluszeichen der so genannten „kontaktelektrischen Spannungsreihe“ stehende Stoff Elektronen ab und wird elektrisch positiv. Der näher am Minuszeichen stehende Stoff nimmt Elektronen auf und wird elektrisch negativ.

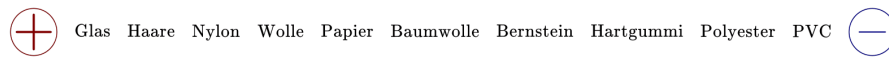


Abb. 172: Die kontaktelektrische Spannungsreihe (Ausschnitt).

Bandgeneratoren

Mit einem Bandgenerator lässt sich eine Ladungstrennung durch Reibung in erheblichem Umfang und beliebig oft wiederholen. Dazu wird ein elastisches Gummiband mit einer Kurbel oder einem Elektromotor angetrieben:

- Das Band streift an zwei Metallbürsten, wobei es aufgrund Reibung Elektronen an die untere Bürste abgibt. Die abgestreiften Elektronen fließen durch eine Leitung zu der kleinen Metallkugel und sammeln sich dort an. Das Gummiband lädt sich dadurch positiv auf.
- An der oberen Bürste übt das positiv geladene Gummiband eine Anziehung auf die Elektronen der Umgebung aus. Einige Elektronen strömen von der großen Metallkugel zur Bürste und entladen das Gummiband. Die große Metallkugel lädt sich dabei positiv auf.

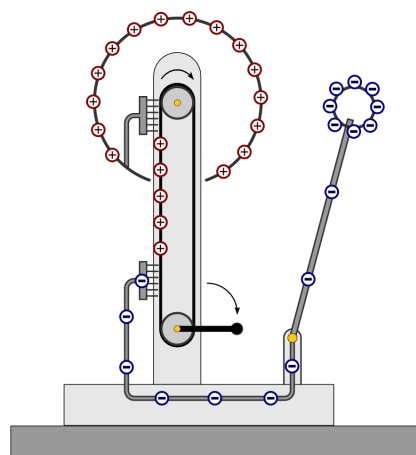


Abb. 173: Aufbau eines Bandgenerators.

Bei kontinuierlichem Betrieb können sich zwischen den Metallkugeln des Bandgenerators so hohe elektrische Spannungen aufbauen, dass kleine Blitze auftreten können: Elektronen

„springen“ dann in einem Sekundenbruchteil und mit hellem Leuchten von der kleinen, elektrisch negativen Kugel auf die große, elektrisch positiv geladene Kugel über. Dabei kommt es zu einem Ladungsausgleich, und beide Kugeln werden entladen.

Ladungsausgleich und Ladungsnachweis

Wird ein geladener Körper über einen Metalldraht oder einen ähnlichen leitenden Kontakt mit dem Erdboden verbunden, so kommt es zu einer Entladung. Diesen Vorgang bezeichnet man als „Erden“.

- Wird ein negativ geladener Körper geerdet, so können überschüssige Elektronen vom Körper ins Erdreich abfließen. Die elektrische Spannung wird dabei abgebaut.
- Wird ein positiv geladener Körper geerdet, so fließen Elektronen vom Erdreich auf den Körper und gleichen den dort herrschenden Elektronenmangel aus.

Da die Erde über einen gigantischen Vorrat an leicht beweglichen Elektronen verfügt und dadurch jeder Ladungsunterschied unmittelbar ausgeglichen wird, ist eine elektrische Aufladung der Erde selbst bei Kontakt mit größeren Ladungsmengen unmessbar klein. Die Erde kann daher stets als elektrisch neutral betrachtet werden.¹

Experimentell nachweisen kann man Ladungen beispielsweise anhand der Kräfte, die zwischen geladenen Körpern wirken:

- Gleichartig geladene Körper (Plus und Plus beziehungsweise Minus und Minus) stoßen einander ab.
- Unterschiedlich geladene Körper (Plus und Minus) ziehen einander an.

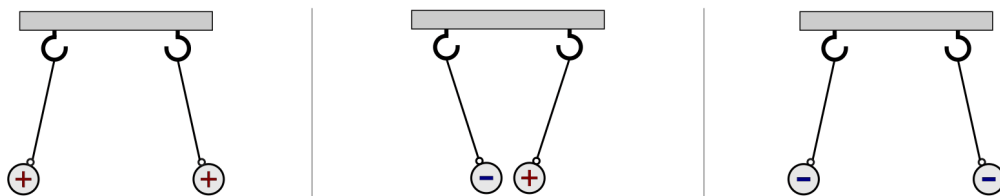


Abb. 174: Kraftwirkung zwischen elektrisch geladenen Körpern.

Je stärker zwei Körper elektrisch geladen sind, desto stärker sind die Kräfte, die zwischen ihnen wirken. Quantitativ kann die zwischen zwei geladenen Körpern wirkende elektrostatische Kraft durch das *Coulombsche Gesetz* bestimmt werden, das im Abschnitt *Elektrische Felder* näher beschrieben ist.

¹ Die enorme Ladungskapazität der Erde kann man sich anschaulich wie ein großes Becken mit ruhendem Wasser vorstellen. Wird daraus beispielsweise ein Eimer Wasser entnommen oder hinzu gegossen, so sinkt beziehungsweise steigt der Wasserspiegel nahezu unmerklich; die Oberfläche jedoch passt sich zeitgleich so an, dass an jeder Stelle die gleiche Füllhöhe vorliegt. Entsprechend ist auch die Ladungsmenge der „Erdung“ nahezu konstant und an allen Stellen der Erde gleich.

Elektroskope

Ein Elektroskop besteht aus einem (meist gebogenen) Metallstab, an dem ein Zeiger leicht drehbar angebracht ist. Der Metallstab besitzt am oberen Ende eine Kontaktfläche und ist durch eine Halterung aus Kunststoff isoliert. Der drehbare Zeiger ist unten etwas schwerer, so dass er im Grundzustand senkrecht ausgerichtet ist.

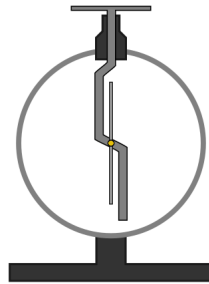


Abb. 175: Aufbau eines Elektroskops.

- Berührt man die Kontaktfläche des Elektroskops mit einem *negativ* geladenen Stab, so breiten sich die frei beweglichen Elektronen mit ihren negativen elektrischen Ladungen entlang des Metallstabs aus. Stab und Zeiger werden gleichartig aufgeladen und stoßen sich gegenseitig ab. Je stärker die Ladung ist, desto stärker ist der Zeigerausschlag.
- Nähert man der Kontaktfläche des Elektroskops einen *positiv* geladenen Stab, so werden die frei beweglichen Elektronen des Metallstabs zum positiv geladenen Stab hingezogen. Im unteren Bereich des Elektroskops bleiben die fest verankerten, positiv geladenen Atomrümpfe zurück. Stab und Zeiger sind wiederum gleichartig geladen und stoßen sich gegenseitig ab.

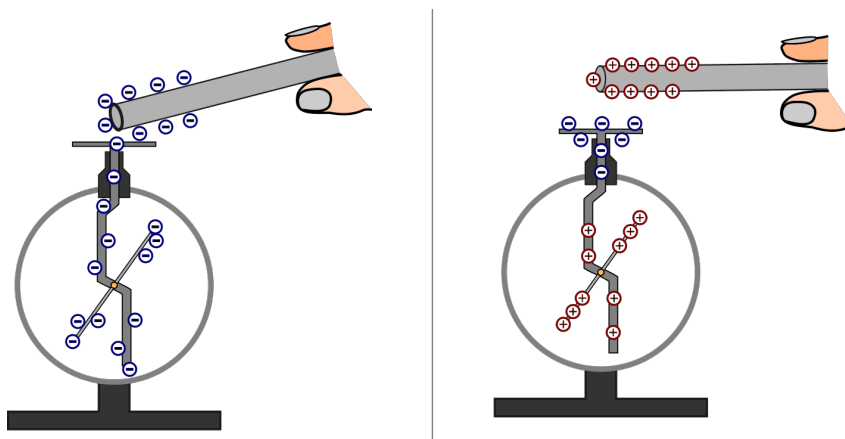


Abb. 176: Funktionsweise eines Elektroskops.

- Berührt man ein negativ geladenes Elektroskop mit einem positiv geladenen oder geerdeten Körper, so wird es wieder entladen. (Ein positiv geladenes Elektroskop lässt sich entsprechend durch Berührung mit einem negativ geladenen oder geerdeten Körper entladen.)

Mit einem Elektroskop kann man somit die Menge einer elektrischen Ladung messen, jedoch nicht, ob es sich um positive oder negative Ladung handelt.

Glimmlampen

Eine Glimmlampe besteht aus einem Glaskolben, in dem zwei Metalldrähte so eingeschmolzen sind, daß sie einander dicht gegenüberstehen, sich jedoch nicht berühren. Der Glaskolben ist mit einem Gas, meist Neon, unter geringem Druck gefüllt.

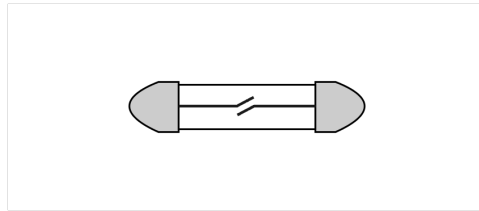


Abb. 177: Aufbau einer Glimmlampe.

Glimmlampen werden zum Ladungsnachweis bei hohen elektrischen Spannungen (mindestens 180 Volt) eingesetzt. Berührt man mit einem leitenden Kontakt der Glimmlampe einen negativ geladenen Körper, beispielsweise die kleine Metallkugel eines geladenen Bandgenerators, so leuchtet die Umgebung des anliegenden Metalldrahts in der Glimmlampe auf.

Mit einem Elektroskop oder einer Glimmlampe kann nur nachgewiesen werden, *ob* ein Körper elektrisch geladen ist oder nicht. Eine quantitative Aussage, *wie stark* ein Körper elektrisch geladen ist, ist mit diesen beiden Hilfsmitteln jedoch nicht möglich.

Zur besseren Handhabung werden Glimmlampen – ähnlich wie Batterien – häufig mit einer Fassung versehen. Auf diese Art kann eine Glimmlampe mit geeigneten Steckern in einen Stromkreis eingebaut werden und als „Kontroll-Leuchte“ für eine anliegende Netzspannung dienen.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Stromstärke, Spannung und Widerstand

Damit ein elektrischer Strom durch einen Körper fließen kann, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

- In ihm müssen frei bewegliche Ladungsträger (beispielsweise Elektronen) vorhanden sein.
- An ihm muss eine elektrische Spannung (Ladungsdifferenz) anliegen.

Modell:

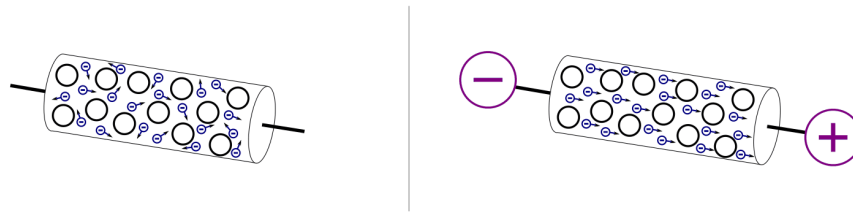


Abb. 178: Durch das Anlegen einer elektrischen Spannung wird aus einer ungeordneten Elektronenbewegung („Wärmebewegung“) ein geordneter Elektronenstrom.

Ähnlich wie Wasser durch eine Pumpe in Bewegung versetzt werden kann, lassen sich Elektronen durch Stromquellen („Elektronenpumpen“) in Bewegung versetzen.

Während Wasser mit einer Wasserpumpe in eine Wasserleitung gepresst wird, erzeugt eine Stromquelle (Batterie oder Generator) an einem ihrer Pole eine erhöhte Konzentration an Elektronen und damit eine elektrische Spannung.

Die Stromstärke

Ein elektrischer Strom tritt auf, wenn sich elektrische Ladungen bewegen. Die elektrische Stromstärke ist ein Maß dafür, welche Menge an elektrischer Ladung in einer bestimmten Zeit durch einen Körper fließt.

Modell:

Wird ein Wasserhahn aufgedreht, so beginnt Wasser zu fließen. Umso weiter der Wasserhahn aufgedreht wird, desto mehr Wasser strömt in einer bestimmten Zeit aus ihm heraus. Diese Kenngröße könnten wir als „Wasserstromstärke“ bezeichnen.

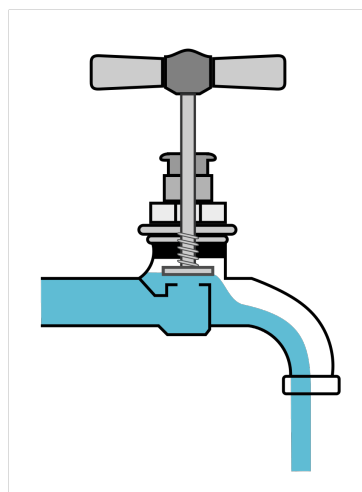


Abb. 179: Die Wasserstromstärke als Modell für die elektrische Stromstärke.

Entsprechend führt die geordnete Bewegung von elektrischen Ladungen zu einem elektrischen Stromfluss: Umso mehr Elektronen (oder Ionen) ein Leiterstück in einer bestimmten Zeit durchlaufen, desto höher ist die auftretende elektrische Stromstärke. So wie die maximale Wassermenge, die in einer Wasserleitung fließen kann, von dem Durchmesser des Wasserrohres abhängt, so kann in einem dickeren Stromleiter ein stärkerer Strom fließen als in einem dünnen.

Definition:

Die elektrische Stromstärke I ist gleich der Menge an elektrischer Ladung ΔQ , die in einer Zeitspanne Δt transportiert wird:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (149)$$

Einheit:

Die elektrische Stromstärke wird in Ampere (A) angegeben. Eine Stromstärke von 1 Ampere bedeutet, dass an jeder Stelle im Leiter je Sekunde 1 Coulomb an Ladung (etwa 6 Trillionen Elektronen!) transportiert wird.

Tab. 22: Stromstärken in Natur und Technik.

Elektronisches Gerät	Stromstärke in Ampere
Elektrische Armbanduhr	0,0001
Glimmlampe, Kopfhörer	0,001
Industrielle Sensoren	0,005 bis 0,02
Glühbirne	bis zu 0,5
Bügeleisen	2 bis 5
Elektrischer Ofen	5 bis 10
Elektrisches Schweißen	100
Straßenbahnmotor	150
Überlandleitung	100 bis 1000
Elektro-Lokomotive	1000
Aluminium-Schmelzofen	15 000
Blitz	bis zu 100 000

Physikalische und technische Stromrichtung

Die Bewegung von Ladungsträgern konnte erstmals in elektrisch leitenden Flüssigkeiten („Elektrolyten“) in Form von positiv geladenen Ionen beobachtet werden. Anhand dieser historischen Entdeckung wurde die Stromrichtung als diejenige Richtung festgelegt, entlang der sich positiv geladene Ladungsträger in einem Leiter bewegen: Sie gehen stets vom Plus-Pol einer Stromquelle aus und bewegen sich in Richtung Minus-Pol.

Diese Konvention wurde beibehalten, obwohl man später feststellte, dass in leitenden Festkörpern vor allem die Bewegung der negativ geladenen Elektronen von entscheidender Bedeutung für den Stromfluss ist. Da diese vom Minus-Pol ausgehen und sich in Richtung Plus-Pol bewegen, muss man stets zwischen der ursprünglich festgelegten („technischen“) und der tatsächlichen („physikalischen“) Bewegungsrichtung der geladenen Teilchen unterscheiden:

- Die „technische“ Stromrichtung verläuft stets von Plus nach Minus.
- Die „physikalische“ Stromrichtung gibt die tatsächliche Bewegungsrichtung der geladenen Teilchen an. Für positive Ladungsträger ist sie mit der technischen Stromrichtung identisch, für negative Ladungsträger zeigt sie in die entgegengesetzte Richtung.

In der heutigen Elektronik wird stets die technische Stromrichtung als Norm für Schaltpläne und Beschriftungen verwendet. Auch wenn der Ladungstransport durch Elektronen erfolgt, so sagt man, dass der Strom „von Plus nach Minus“ fließe. Dies mag physikalisch unkorrekt sein; entscheidend ist allerdings vielmehr, dass von der Polung abhängige Bauteile (beispielsweise **Dioden** und **Transistoren**) immer nach dem gleichen Schema hergestellt werden.¹

Stromdichte

Neben der Stromstärke I wird in der Elektrotechnik bisweilen auch mit der so genannten Stromdichte j gerechnet. Diese ergibt sich, wenn man die Stromstärke I durch die Querschnittsfläche A des Leiters dividiert:

$$j = \frac{I}{A} \quad (150)$$

Als Einheit für die Stromdichte wählt man üblicherweise aufgrund der gängigen Leiter-Querschnitte A/mm^2 . Mittels der Stromdichte kann beispielsweise erklärt werden, weshalb der Draht in einer Glühbirne leuchtet, nicht jedoch die Zuleitungen: Obwohl die Stromstärke gleich ist, ist in dem wesentlich dünneren Draht im Inneren der Glühbirne die Stromdichte und somit auch die Wärme-Entwicklung höher.

Die elektrische Spannung

Elektrischer Strom fließt nicht von selbst, sondern benötigt eine elektrische Spannung als Ursache. Elektrische Spannung wiederum ist das Ergebnis einer *Ladungstrennung*, beispielsweise einer Erhöhung der Konzentration an Elektronen an einer Stelle gegenüber einer anderen Stelle.

Modell:

In einem Wassertank hängt der Druck, der auf den Wasserhahn ausgeübt wird, ausschließlich von der Füllhöhe im Tank ab: Umso höher der Behälter gefüllt wurde, desto höher ist der Wasserdruck am unteren Ende.

Entsprechend ist für das Fließen eines elektrischen Stromes eine gezielte Anhäufung von elektrischer Ladung notwendig. Umso stärker die Elektronen an einer Stelle verdichtet werden, also je mehr Arbeit bei der Ladungstrennung investiert wird, desto steiler ist das Konzentrationsgefälle an elektrischer Ladung und damit die elektrische Spannung.

¹ Auch beim Autoverkehr ist weniger entscheidend, ob ein Links- oder ein Rechtsverkehr vorherrscht, sondern vielmehr, dass sich alle Verkehrsteilnehmer an die gleichen Grundregeln halten.. ;-)

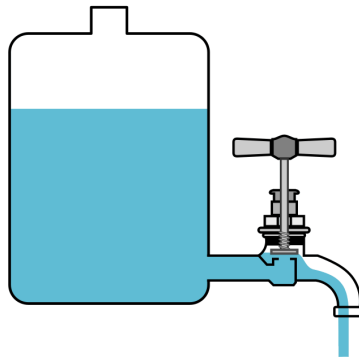


Abb. 180: Der Druck einer Wassersäule als Modell für die elektrische Spannung.

Definition:

Die elektrische Spannung U ist gleich der Menge an Arbeit W , die bei der Ladungstrennung auf eine Ladungsmenge Q aufgewendet wird:

$$U = \frac{W}{Q} \tag{151}$$

Einheit:

Die elektrische Spannung wird in Volt (V) angegeben. Eine Spannung von 1 Volt bedeutet, dass für je 1 Coulomb an Ladung eine Arbeit von 1 Joule zur Ladungstrennung aufgewendet wird.

Tab. 23: Spannungen in Natur und Technik

Elektronisches Gerät	Spannung in Volt
Zink-Kohle-Batterie (je Zelle)	1,5
Fahrrad-Dynamo	6
Autobatterie	12 bis 24
Netzspannung	230
Drehstrom	400
Generator in Kraftwerk	ca. 10 000
Hochspannung	bis 380 000
Blitz	bis 100 000 000

Das elektrische Potential

Die Spannung ist keine absolute Größe, man kann also streng genommen nicht angeben, wie groß die Spannung an einer bestimmten Stelle ist. Spannung bezieht sich vielmehr stets auf zwei Punkte: Man kann mit einem Spannungswert also nur angeben, wie groß die Spannung *zwischen* zwei Punkten ist. Gemäß der technischen Konvention, dass Strom stets „von Plus nach Minus“ fließt, kann die Spannungsdifferenz zwischen zwei Punkten als Maß dafür angesehen werden, wie stark und in welche Richtung der Strom vom einen Punkt zum anderen fließen möchte.

Um dennoch einen Absolutwert für die Menge einer Ladungsanhäufung angeben zu können, hat man daher den Begriff „elektrisches Potential“ Φ eingeführt. Das elektrische Potential ist vergleichbar mit der Höhe eines Punktes über dem Meeresspiegel. Ein solcher Wert kann tatsächlich für jeden einzelnen Punkt angegeben werden. Vergleicht man dann zwei verschiedene Punkte hinsichtlich ihrer elektrischen Potentiale, so kann die Differenz $\Delta\Phi$ dieser Potentiale als elektrische Spannung U zwischen den beiden Punkten aufgefasst werden:

$$U = \Delta\Phi \quad (152)$$

Im alltäglichen Sprachgebrauch werden trotz dieses Unterschieds die Begriffe Spannung und elektrisches Potential häufig als gleichwertig verwendet. Der Grund dafür liegt darin, dass als Bezugspunkt („Masse“, „Ground“, „Nullpotential“) für das elektrische Potential häufig der Minus-Anschluss der Stromquelle verwendet wird und dieser willkürlich den Wert Null erhält. Gegenüber diesem Bezugspunkt ist das elektrische Potential eines Punktes mit dem Spannungswert identisch. Haben hingegen zwei Punkte (beispielsweise in einer elektronischen Schaltung) jeweils von Null verschiedene elektrische Potentiale, so ist nur die Differenz der jeweiligen elektrischen Potentiale (umgangssprachlich: „Spannungsdifferenz“) als Ursache für einen Stromfluss von Bedeutung.

Die Gleichspannung

Eine elektrische Gleichspannung entsteht, wenn durch eine Stromquelle an einer Stelle ein Überschuss an elektrischer Ladung erzeugt wird. Wird der Stromkreis geschlossen, so strömen die frei beweglichen Elektronen im Leiter von der Stelle mit der höheren zu der Stelle mit der niedrigeren Ladungskonzentration, um einen Ladungsausgleich zu bewirken.

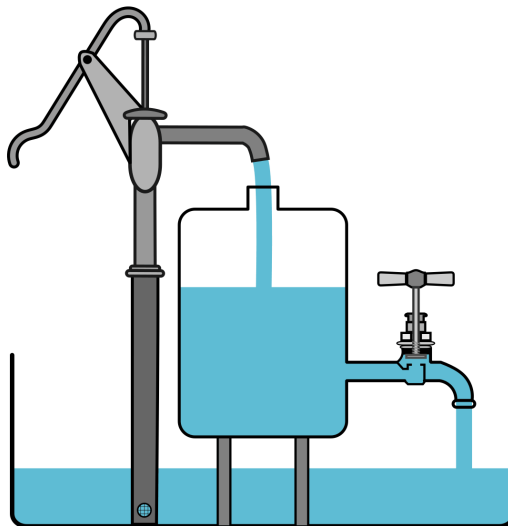


Abb. 181: Eine Wasserpumpe als Modell für eine Gleichstromquelle.

Eine zeitlich konstante Gleichspannung bewirkt in einem Leiter einen zeitlich konstanten Strom („Gleichstrom“).² Es wird allerdings auch dann von einer Gleichspannung gesprochen, wenn sie im zeitlichen Verlauf zwar unterschiedlich große Werte annimmt, dabei jedoch stets die gleiche Polung beibehält. Das Resultat ist in diesem Fall ein so genannter „pulsierender Gleichstrom“.

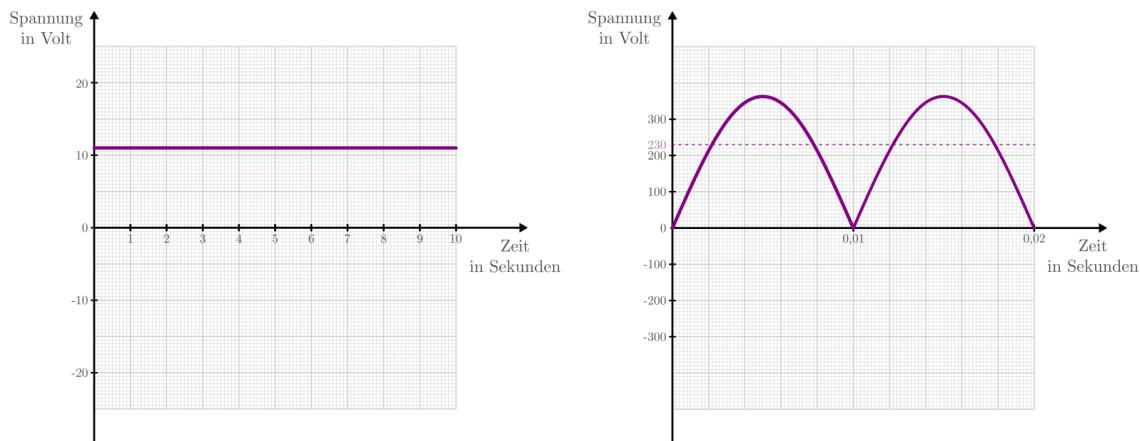


Abb. 182: Diagramme einer „echten“ 12 V-Gleichspannung und einer „pulsierenden“ 230 V-Gleichspannung.

Die Wechselspannung

Manche elektrische Generatoren, beispielsweise Fahrrad-Dynamos, bewirken einen Strom, der einmal „von rechts nach links“, dann wieder „von links nach rechts“ fließt.³ Die Ursache dafür ist eine Spannung, die ihre Richtung (beziehungsweise ihr Vorzeichen) regelmäßig wechselt und daher als Wechselspannung bezeichnet wird.

Die bekannteste Wechselspannung ist die sinusförmige Spannung des Stromnetzes, die periodisch zwischen $+325\text{ V}$ und -325 V hin und her wechselt. Aufgrund der Schwankungen kann jedoch nur soviel elektrische Leistung umgesetzt werden wie bei einer Gleichspannung von $U_{\text{eff}} = 230\text{ V}$.⁴ Diese so genannte „effektive Spannung“ einer sinusförmigen Wechselspannung lässt sich allgemein nach folgender Formel berechnen:⁵

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

Die Frequenz der Wechselspannung im Stromnetz beträgt $f = 50\text{ Hz}$; in einer Sekunde durchläuft die Wechselspannung also 50 Perioden. Hieraus ergibt sich eine Schwingungsdauer von $T = \frac{1}{50}\text{ s} = 0,02\text{ s}$.

² Im englischen Sprachbereich wird Gleichstrom als „direct current“ (DC) bezeichnet.

³ Im englischen Sprachbereich wird Wechselstrom als „alternating current“ (AC) bezeichnet.

⁴ Diese Werte gelten für das europäische Stromnetz. In Nordamerika beispielsweise beträgt die Effektivspannung im Stromnetz 120 V bei einer Netzfrequenz von 60 Hz.

⁵ Da $\sqrt{2} \approx 1,41$ ist, kann man sich als praktische Faustregel merken, dass der Spitzenwert einer Wechselspannung stets um das 1,41-fache höher liegt als ihr Effektivwert.

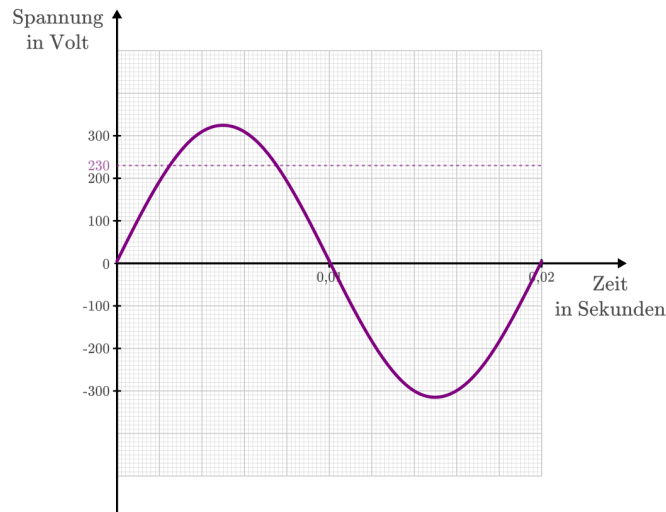


Abb. 183: Diagramm einer 230 V-Wechselspannung.

Der Vorteil einer Wechselspannung gegenüber einer (zeitlich konstanten) Gleichspannung liegt darin, dass sich der Wert der Wechselspannung mittels eines passenden **Transformators** leicht auf einen anderen beliebigen Spannungswert einstellen lässt.

Der elektrische Widerstand

In einem idealen elektrischen Leiter können sich die Ladungsträger völlig frei bewegen. In einem realen Leiter hingegen treten stets Wechselwirkungen zwischen den sich bewegenden Elektronen und den zurückbleibenden Atomrümpfen auf. Ähnlich wie bei der mechanischen Reibung wird dabei elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt (siehe auch Abschnitt *Wärmeentwicklung in elektrischen Bauteilen*).

Bei schlechten Leitern (beispielsweise Eisen) ist die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Atomen stärker als bei guten Leitern (beispielsweise Kupfer). Zum einen erwärmen sich schlechte Leiter dadurch schneller als gute Leiter, zum anderen muss an ihnen eine höhere elektrische Spannung angelegt werden, um den gleichen Stromfluss zu erreichen.

Definition:

Unter dem elektrischen Widerstand R eines Stromkreises versteht man das Verhältnis aus der Spannung U zwischen den Enden eines Leiters und der Stärke des Stromes I im Leiter:

$$R = \frac{U}{I} \quad (153)$$

In gleicher Form lässt sich auch der elektrische Widerstand einzelner Bauteile angeben.

Einheit:

Der elektrische Widerstand wird in Ohm (Ω) angegeben. Ein elektrischer Widerstand von $R = 1 \Omega$ bedeutet, dass eine Spannung von $U = 1 \text{ V}$ aufgewendet werden muss, um eine Stromstärke von $I = 1 \text{ A}$ zu erreichen:

$$1 \text{ Ohm} = 1 \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}}$$

Das Ohmsche Gesetz

Der Zusammenhang zwischen elektrischer Spannung, Stromstärke und Widerstand wurde im Jahr 1826 durch **Georg Simon Ohm** entdeckt. Ihm zu Ehren wird auch heute noch die Widerstandsgleichung (153) als „Ohmsches Gesetz“ bezeichnet und in folgender Form angegeben:

$$U = R \cdot I \tag{154}$$

Das Ohmsche Gesetz (154) ist in seiner Gültigkeit auf homogene Materialien begrenzt. In zahlreichen Fällen kann es dennoch, beispielsweise bei **Reihen- und Parallelschaltungen**, beim Ermitteln von Spannungen oder Stromstärken helfen, wenn die jeweiligen elektrischen Widerstände bekannt sind.

Neben den beiden bisher genannten Formen (153) und (154) kann der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung auch folgendermaßen angegeben werden:⁶

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

Bei einer höheren Spannung ist somit auch die Stromstärke höher, die durch einen Stromkreis oder ein elektronisches Bauteil fließt. Die entsprechende Kennlinie entspricht, wie in Abbildung *Ohmsches Gesetz* zu erkennen ist, einer Geraden, die umso steiler verläuft, desto niedriger der Widerstandswert R ist.

In der Elektronik bezeichnet man Bauteile, die zumindestens näherungsweise diese Charakteristik erfüllen, ebenfalls als **Widerstände**.

Nicht-Ohmsche Widerstände

In Halbleiter-Bauteilen (z.B. **Diode**n, **Transistoren**, usw.) ist der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung nicht linear; vielmehr ist in diesen Bauteile erst ab einer bestimmten Spannung ein Stromfluss möglich, der bei einer weiteren Erhöhung der Spannung überproportional ansteigt (Abbildung *Kennlinie einer Diode in Durchlass-Richtung*).

Das Ohmsche Gesetz kann in solchen Fällen (näherungsweise) genutzt werden, wenn die Widerstandswerte in Abhängigkeit von der Stromstärke oder Spannung bekannt sind, also als Diagramm oder in tabellarischer Form für bestimmte Werte vorliegen.

⁶ Der Kehrwert $\frac{1}{R}$ wird bisweilen auch als „elektrischer Leitwert“ G bezeichnet:

$$G = \frac{1}{R}$$

Der elektrische Leitwert wird in der Einheit „Siemens“ (Kurzzeichen S) angegeben, wobei $1 \text{ S} = 1 \frac{1}{\Omega} = 1 \frac{\text{A}}{\text{V}}$ gilt. Je größer der elektrische Leitwert eines Stromkreises ist, desto größer ist die Stromstärke bei gleicher anliegender Spannung.

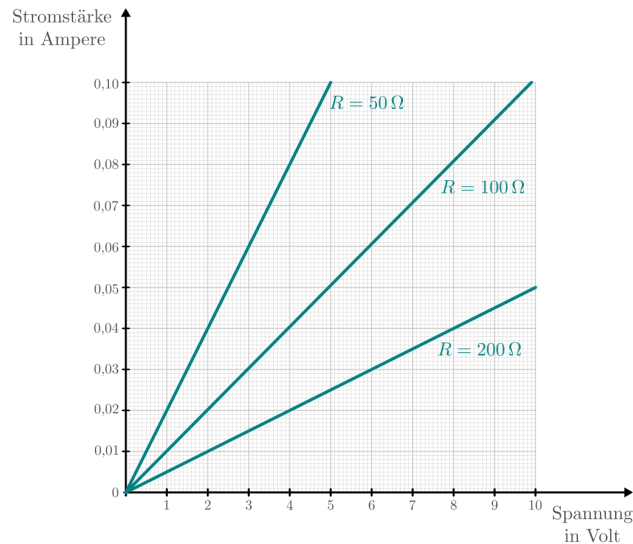


Abb. 184: Die Stromstärke in Abhängigkeit von der Spannung bei festen Widerstandswerten (Ohmsches Gesetz).

Der spezifische Widerstand

Unterschiedliche Stoffe leiten den Strom unterschiedlich gut, sie besitzen also einen unterschiedlichen spezifischen Widerstand ρ . Je kleiner der spezifische Widerstand eines Materials ist, desto besser leitet es den elektrischen Strom.⁷

Definition:

Bei einem Körper aus homogenem Stoff, beispielsweise einem Metalldraht, hängt der Widerstand bei einer bestimmten Temperatur vom Material, von seiner Länge l und von seiner Querschnittsfläche („Dicke“) A ab. Es gilt:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (155)$$

Einheit:

Aus der Definition (155) ergibt sich für den spezifischen Widerstand ρ die Einheit $\Omega \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{m}}$.

Da die meisten Bauteile und Leitungen eine wesentlich geringere Querschnittsfläche als 1 m^2 besitzen, ist auch folgende Einheit üblich:

$$1 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$$

Beispiele:

⁷ Der Kehrwert $\frac{1}{\rho}$ wird auch als „elektrische Leitfähigkeit“ σ bezeichnet:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

Die elektrische Leitfähigkeit wird meist in der Einheit $\frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}$ angegeben. Je größer die elektrische Leitfähigkeit eines Materials ist, desto geringer ist sein elektrischer Widerstand bei gleicher Querschnittsfläche und Länge.

- Ein $l = 1 \text{ m}$ langer Kupferdraht ($\rho_{\text{Cu}} = 0,0156 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$) mit einer Querschnittsfläche von 1 mm^2 hat einen elektrischen Widerstand von

$$R = \rho_{\text{Cu}} \cdot \frac{l}{A} = 0,0156 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ mm}^2} = 0,0156 \Omega$$

Würde man den Drahtdurchmesser um den Faktor 1000 von 1 mm auf 1 m erhöhen, so ergäbe sich eine um $1000 \cdot 1000 = 1\,000\,000$ größere Querschnittsfläche und damit ein um eine Million geringerer elektrischer Widerstand.

- Ein 4 mm^2 dicker und $30 \text{ mm} = 0,03 \text{ m}$ langer Stab aus Edelstahl ($\rho_{\text{V2A}} = 0,720 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$) hat einen elektrischen Widerstand von

$$R = \rho_{\text{V2A}} \cdot \frac{l}{A} = 0,720 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{0,03 \text{ m}}{4 \text{ mm}^2} = 0,0054 \Omega$$

Tab. 24: Widerstände von Metalldrähten ($l = 1 \text{ m}$, $A = 1 \text{ mm}^2$)

Kupfer	0,0156 Ω
Silber	0,0151 Ω
Gold	0,0204 Ω
Aluminium	0,0265 Ω
Messing	0,070 Ω
Konstantan	0,5 Ω
Edelstahl (V2A)	0,720 Ω
Eisen	ca. 1,25 Ω

Da sich die spezifischen Widerstände von verschiedenen Stoffen erheblich voneinander unterscheiden, lassen sich die Materialien in elektrische Leiter, Halbleiter und Isolatoren einteilen.

Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands

Bei metallischen Leitern hängt der spezifische Widerstand ρ über einen weiten Temperaturbereich linear von der Temperatur ab:

$$\rho(T) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha_\Omega \cdot \Delta T)$$

Hierbei bezeichnet man α_Ω als Temperaturkoeffizient von Ohmschen Widerständen. Für Metalle ist $\alpha_\Omega > 0$, der spezifische Widerstand nimmt somit mit steigender Temperatur zu. Halbleiter hingegen werden mit zunehmenden Temperaturen besser leitfähig, bei tiefen Temperaturen hingegen werden sie zunehmend zu Isolatoren.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Elektrische Arbeit, Energie und Leistung

Elektrische Arbeit und Energie

Zur Bereitstellung einer bestimmten Menge an elektrischer Energie muss durch einen Stromgenerator ein entsprechender Betrag an Arbeit aufgewendet werden.¹

Zur Herleitung einer Formel für die elektrische Arbeit W_{el} kann man die Definitionen der elektrischen Spannung U und der elektrischen Stromstärke I miteinander kombinieren. Aus der Definition der elektrischen Spannung folgt:

$$U = \frac{W}{Q} \quad \Leftrightarrow \quad W = U \cdot Q \quad (156)$$

Die Ladung Q kann wiederum mit Hilfe der Definition der Stromstärke folgendermaßen beschrieben werden:

$$I = \frac{Q}{t} \quad \Leftrightarrow \quad Q = I \cdot t \quad (157)$$

Insgesamt ergibt die Kombination dieser beiden Gleichungen folgende Formel für die elektrische Arbeit:

Definition:

Die elektrische Arbeit, die ein Stromgenerator verrichtet, ist proportional zur Spannung U und zur Stromstärke I des bereitgestellten Stroms sowie zur Zeitdauer t , über die sich der Stromfluss erstreckt.

$$W_{\text{el}} = U \cdot I \cdot t \quad (158)$$

Die aufgebrauchte elektrische Arbeit kann entweder direkt genutzt oder als elektrische Energie E_{el} in Kondensatoren und Akkumulatoren gespeichert werden ($E_{\text{el}} = W_{\text{el}}$).²

Einheit:

Die elektrische Arbeit sowie die elektrische Energie wird in Joule ($1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$) oder gebräuchlicher in Wattstunden (Wh) bzw. Kilowattstunden (kWh) angegeben. Dabei gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} 1 \text{ J} &= 1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s} \\ 1 \text{ Wh} &= 60 \cdot 60 \text{ W} \cdot \text{s} = 3600 \text{ Ws} \\ 1 \text{ kWh} &= 1000 \text{ Wh} \end{aligned}$$

¹ Spannung erzeugende Geräte, die zur Energie-Gewinnung Treibstoffe verbrennen, haben meist einen Verbrennungsmotor oder eine Gas-Turbine als Antrieb; der eigentliche Generator wandelt dann die mechanische Energie in elektrische Energie um.

Im verallgemeinerten Sinn bezeichnet man sämtliche Spannung erzeugende Geräte als Generatoren, also beispielsweise auch Solarzellen oder Thermo-Elemente.

² Streng genommen speichern Akkumulatoren die zugeführte elektrische Energie in Form von chemischer Energie. Beide Energieformen lassen sich allerdings (bis auf geringe Wärmeverluste) vollständig ineinander umwandeln – ein voll geladener Akkumulator stellt bei seiner Nutzung wiederum elektrische Energie bereit.

Elektrische Leistung

Die elektrische Leistung P_{el} , die ein Stromgenerator aufbringt oder ein Verbraucher benötigt, ist gleich der je Zeit Δt verrichteten elektrischen Arbeit ΔW_{el} :

$$P_{\text{el}} = \frac{\Delta W_{\text{el}}}{\Delta t} = \frac{U \cdot I \cdot \Delta t}{\Delta t} = U \cdot I$$

Damit lässt sich die elektrische Leistung folgendermaßen definieren:

Definition:

Die elektrische Leistung P_{el} , die von einem elektronischen Bauteil oder Stromkreis umgesetzt wird, ist proportional zu der am Bauteil anliegenden Spannung U sowie der durch das Bauteil fließenden Stromstärke I .

$$P_{\text{el}} = U \cdot I \quad (159)$$

Einheit:

Ebenso wie die mechanische Leistung wird die elektrische Leistung in der Einheit Watt (W) angegeben. Dabei gilt:³

$$1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A}$$

Auf fast allen Elektro-Geräten findet sich neben der Angabe der zulässigen Betriebsspannung auch eine Angabe einer damit verbundenen elektrischen Stromstärke oder Leistung.⁴ Zu beachten ist dabei, dass diese Werte nur bei der angegebenen Spannung gelten; da eine höhere Spannung in der Regel auch eine höhere Stromstärke zur Folge hat, nimmt die Leistung mit zunehmender Spannung überproportional zu.

Exkurs: Wärmeentwicklung in elektrischen Bauteilen

Mittels des Ohmschen Gesetzes $U = R \cdot I$ kann der obige Zusammenhang $P_{\text{el}} = U \cdot I$ zwischen der elektrischen Leistung P_{el} sowie der Spannung U und der Stromstärke I auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

- Setzt man für die Stromstärke $I = \frac{U}{R}$ in die Leistungs-Gleichung (159) ein, so erhält man:

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} \quad (160)$$

- Setzt man für die Spannung $U = R \cdot I$ in die Leistungs-Gleichung (159) ein, so erhält man:

$$P = U \cdot I = (R \cdot I) \cdot I = R \cdot I^2 \quad (161)$$

³ Für größere Leistungsangaben ist auch die Einheit Kilowatt (kW) gebräuchlich. Dabei gilt: 1 kW = 1 000 W

⁴ Die jeweils fehlende Angabe kann durch die beiden bekannten Größen mittels Gleichung (159) bestimmt werden.

Bei beiden Darstellungen erkennt man, dass die elektrische (Heiz-)Leistung bei konstant bleibendem Widerstand quadratisch mit einer zunehmenden Spannung beziehungsweise Stromstärke ansteigt.

Beispiel:

- Auf einem regelbaren Demo-Widerstand ist ein maximaler Widerstandswert von $R_{\max} = 50 \Omega$ angegeben und eine maximale Belastbarkeit von $P_{\max} = 0,5 \text{ W}$.
 - Wie groß darf die am Widerstand anliegende Spannung U_{\max} eines regelbaren Netzgerätes maximal sein, wenn kein zusätzliches Bauteil im Stromkreis eingebaut ist?
 - Auf welchen Wert U muss die Spannung gesenkt werden, wenn der Widerstand auf $R = 25 \Omega$ eingestellt ist?

Die jeweils maximal mögliche Spannung kann bei einem gegebenen Widerstand und einer gegebenen maximalen Leistung berechnet werden, indem man die Formel (160) nach U auflöst. Man erhält für $P_{\max} = 0,5 \text{ W}$ und $R = 50 \Omega$:

$$P_{\max} = \frac{U_{\max}^2}{R_{\max}} \iff U_{\max} = \sqrt{P_{\max} \cdot R_{\max}}$$

$$U_{\max} = \sqrt{0,5 \text{ W} \cdot 50 \Omega} = 5,0 \text{ V}$$

Die Einheit ergibt sich aus $W = V \cdot A$ und $\Omega = \frac{V}{A}$; als Produkt ergibt also die Einheit $W \cdot \Omega = V^2$.

Reduziert man den Widerstand auf $R = 25 \Omega$, so darf bei einer gleichen maximalen Belastbarkeit nur folgende Spannung U angelegt werden:

$$U = \sqrt{P_{\max} \cdot R} = \sqrt{0,5 \text{ W} \cdot 25 \Omega} \approx 3,54 \text{ V}$$

Bei einem geringeren Widerstandswert muss also auch die Spannung geringer gewählt werden, um das Bauteil nicht zu überlasten.

Stromerzeugung und Stromverbrauch

In jedem Stromkreis muss die Menge der bereitgestellten Energie – da die Gesamtenergie stets erhalten bleibt und elektrische Ladung weder erzeugt noch vernichtet, sondern nur übertragen werden kann – stets der Menge an verbrauchter elektrischer Energie entsprechen.⁵

In einem so großen Stromnetz wie dem der Bundesrepublik Deutschland gibt es selbstverständlich mehr als einen Stromgenerator; insgesamt gesehen muss der Kraftwerkspark allerdings die Verbraucherlast tragen sowie die sich beim Stromtransport ergebenden Leitungsverluste ausgleichen. Bei einer möglichst optimalen Zusammenstellung der Gesamtleistung mittels der verschiedenen Kraftwerkstypen sind ökologische, ökonomische sowie technische Aspekte gleichermaßen von Bedeutung.

⁵ Auch in Speichereinrichtungen wie Pumpspeicherkraftwerken oder Akkumulatoren wird zunächst elektrische Energie verbraucht, z.B. um eine große Menge Wasser auf eine bestimmte Höhe zu pumpen oder bestimmte chemische Reaktionen zu ermöglichen; umgekehrt können derartige Anlagen bei Bedarf die gespeicherte Energiemenge mit nur geringen (Wärme-)Verlusten wieder als elektrische Energie bereitstellen.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Leiter, Halbleiter und Isolatoren

Ob ein elektrischer Strom in einem Stoff fließen kann, hängt von der Anzahl der frei beweglichen Ladungsträger innerhalb des Stoffes ab.

Leiter

Elektrische Leiter werden Stoffe genannt, in denen sich Ladungen leicht bewegen können. Die bekanntesten Leiter sind Metalle, Graphit, Säuren, Laugen und Salzlösungen.

In Metallen sind die einzelnen Atome in einer Gitterstruktur angeordnet, wobei sich die äußersten Elektronen („Valenzelektronen“) frei entlang des gesamten Gitters bewegen können („Metallbindung“, „Elektronengas“). Bei nur einem ungebundenem Elektron je Atom steht dabei eine enorme Zahl an Ladungsträgern – etwa 10^{19} Elektronen je Kubik-Millimeter! – für den Ladungstransport frei zur Verfügung.¹

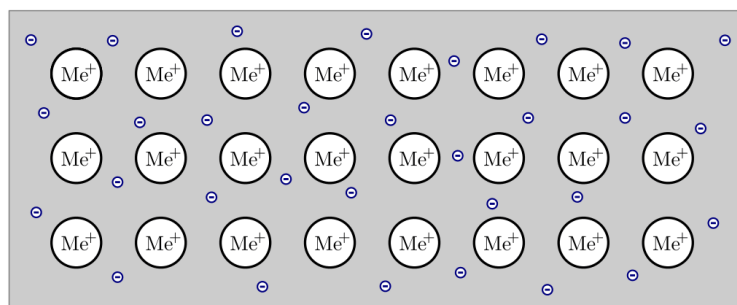


Abb. 185: „Elektronengas“ in einem metallischen Leiter.

Bei höheren Temperaturen führen die Atomrümpfe eines Metallgitters immer stärkere Wärme-Schwingungen um ihre Ruhelagen aus. Die freien Elektronen werden dadurch in ihrer Beweglichkeit eingeschränkt, was zu einem höheren elektrischen Widerstand führt. Da die Zunahme des Widerstands in guter Näherung linear zur Erwärmung ist, kann der Widerstandswert eines Leiters mit folgender Formel berechnet werden:

$$R_T = R_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

Hierbei gibt R_{20} den Widerstandswert bei Raumtemperatur ($20\text{ }^\circ\text{C}$) an, ΔT entspricht der Temperaturdifferenz zu diesem Referenzwert (ebenfalls in $^\circ\text{C}$). Der so genannte „Temperaturbeiwert“ α ist materialabhängig und wird in $1/\text{K}$ angegeben.

¹ Die Leitfähigkeit eines Metalls ist rund 10 Milliarden (10^8) mal höher als die eines Halbleiters und rund 100 Billionen (10^{14}) mal höher als die eines Isolators!

Tab. 25: Temperaturbeiwerte verschiedener Materialien

Material	Temperaturbeiwert α in $\frac{1}{K}$
Aluminium	0,004
Blei	0,0042
Eisen	0,00657
Konstantan	0,00004
Kupfer	0,0039
Silber	0,0041
Zink	0,0042

Bei niedrigen Temperaturen nehmen die Wärme-Schwingungen der Atomrümpfe und der elektrische Widerstand entsprechend ab; in vielen Metallen verschwindet der elektrische Widerstand ab einer materialspezifischen Temperatur sogar vollständig („Supraleitung“).

In Flüssigkeiten können durch Lösungsvorgänge elektrisch geladene Atome und Moleküle („Ionen“) auftreten. Diese sind zwar bedeutend schwerer als Elektronen, können aber dennoch als freie Ladungsträger den elektrischen Strom leiten.

Halbleiter

In reinen Halbleiter-Materialien sind – im Gegensatz zu elektrischen Leitern – im Grundzustand (fast) keine freien Ladungsträger verfügbar. Beispielsweise bilden im wohl typischsten Halbleiter-Element Silizium (und auch in Germanium) alle vier Valenzelektronen kovalente Bindungen mit den vier benachbarten Atomen aus. Nur durch ein zeitweises Herauslösen der Valenzelektronen mittels Licht, Wärme oder ausreichender elektrischer Spannung lässt sich ein Ladungstransport in einem reinen Halbleiter erreichen.

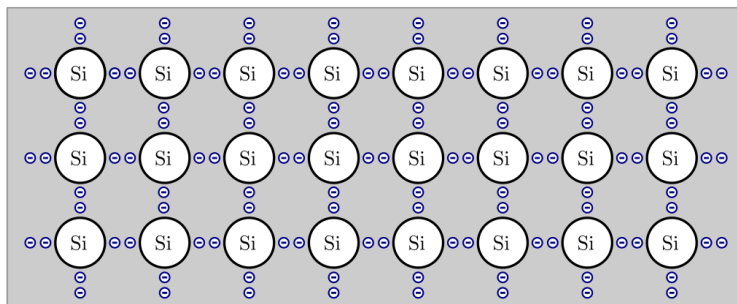


Abb. 186: Elektronenpaarbindungen im Halbleiter-Element Silicium.

Elementare Halbleiter befinden sich im Periodensystem der Elemente in der vierten Hauptgruppe und besitzen eine chemische Wertigkeit von vier. Nach dem gleichen Bindungsprinzip sind ebenso sogenannte Verbindungshalbleiter möglich, bei denen die *durchschnittliche* chemische Wertigkeit vier beträgt:

- Bei Gallium-Arsenid (GaAs), einem III-V-Halbleiter, trägt jedes Galliumatom drei und jedes Arsenatom fünf Valenzelektronen zu den kovalenten Bindungen bei.

- Bei Cadmium-Sulfid (CdS), einem II-VI-Halbleiter, trägt jedes Cadmium-Atom zwei und jedes Schwefelatom sechs Valenzelektronen zu den kovalenten Bindungen bei.²

Bei höheren Temperaturen lösen sich Elektronen häufiger aus den kovalenten Bindungen heraus; der elektrische Widerstand eines Halbleiters wird daher – anders als bei Metallen – durch eine Erwärmung zunächst geringer. Bei noch stärkerer Erwärmung überwiegt jedoch wieder der stromhemmende Effekt der Atomschwingungen, wodurch der elektrische Widerstand wiederum stark ansteigt.

Durch ein gezieltes Einbringen von Fremdatomen kann die Leitfähigkeit eines Halbleiters beeinflusst werden.

Die *n*-Dotierung

Bei einer *n*-Dotierung werden gezielt zusätzliche *negativ* geladene Ladungsträger in einen Halbleiter eingefügt.

Bringt man ein chemisch fünfwertiges Atom (beispielsweise Phosphor) in einen Halbleiter-Kristall (beispielsweise Silicium) ein, so können nur vier der fünf Valenzelektronen des Phosphors kovalente Bindungen mit den benachbarten Atomen aufbauen. Das fünfte Valenzelektron bleibt ungebunden am Phosphoratom zurück und lässt sich verhältnismäßig leicht ablösen. Somit steht es im weiteren Sinn als ein „freier“ Ladungsträger für den elektrischen Strom zur Verfügung.

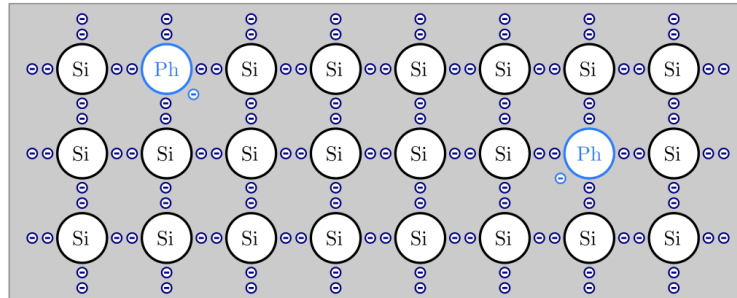


Abb. 187: *n*-Dotierung eines Silicium-Kristalls durch Einbringen von Phosphor-Atomen.

Typische chemisch fünfwertige Fremdatome („Donatoren“) sind beispielsweise Phosphor (P), Arsen (As) und Antimon (Sb). In üblichen *n*-Dotierungen wird ein Fremdatom auf etwa 1 bis 10 Millionen Halbleiter-Atome eingebracht. Der Halbleiter bleibt durch die *n*-Dotierung weiterhin elektrisch neutral.

Die *p*-Dotierung

Bei einer *p*-Dotierung werden gezielt zusätzliche *positiv* geladene Ladungsträger in einen Halbleiter eingefügt.

² Je deutlicher Halbleiter-Verbindungen von der elementaren IV-IV-Bindung abweichen, desto größer wird auch der ionische Anteil an den kovalenten Bindungen. I-VII-Verbindungen (Salze) haben rein ionischen Charakter und zählen aufgrund der Festigkeit der Bindungen zu den elektrischen Isolatoren.

Bringt man ein chemisch dreiwertiges Atom (beispielsweise Bor) in einen Halbleiterkristall (beispielsweise Silicium) ein, so bleiben an den Bor-Atomen „Löcher“ oder „Defektstellen“ in den kovalenten Bindungen zurück. Jedes Bor-Atom ist zwar fest im Halbleiterkristall eingebunden, doch stellt jedes Loch einen freien Platz für benachbarte Valenzelektronen dar, der verhältnismäßig leicht besetzt werden kann. Springt ein Valenzelektron aus einer anderen kovalenten Bindung in die Defektstelle, so ist das Loch an eine neue Stelle weiter gewandert. Somit können die eingebrachten Löcher im weiteren Sinn als freie, einfach positiv geladene Ladungsträger angesehen werden.

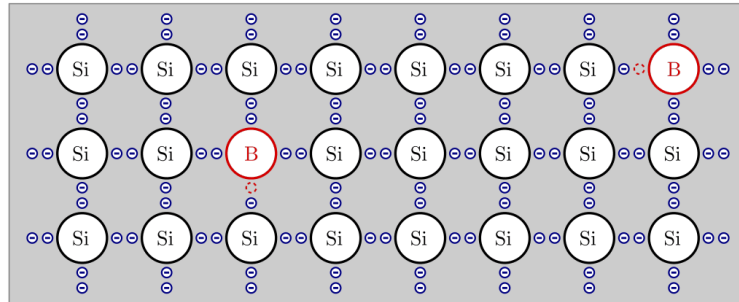


Abb. 188: p-Dotierung eines Silicium-Kristalls durch Einbringen von Phosphor-Atomen.

Typische chemisch dreiwertige Fremdatome („Akzeptoren“) sind beispielsweise Bor (B), Aluminium (Al), Gallium (Ga) sowie Indium (In). In üblichen *p*-Dotierungen wird ebenfalls ein Fremdatom auf etwa 1 bis 10 Millionen Halbleiter-Atome eingebracht. Auch durch die *p*-Dotierung bleibt der Halbleiter elektrisch neutral.

Der *n-p*-Übergang

Verbindet man einen *n*- mit einem *p*-dotierten Halbleiterkristall, so bildet sich entlang der Verbindungslinie ein neutraler Übergangsbereich aus, in der die zusätzlichen Elektronen der *n*-dotierten Schicht die Löcher der *p*-dotierten Schicht auffüllen. Die paarweise Aufhebung von Elektronen und Löchern wird als „Rekombination“, der entstehende Raumbereich als „Raumladungszone“ oder „Grenzschicht“ bezeichnet.

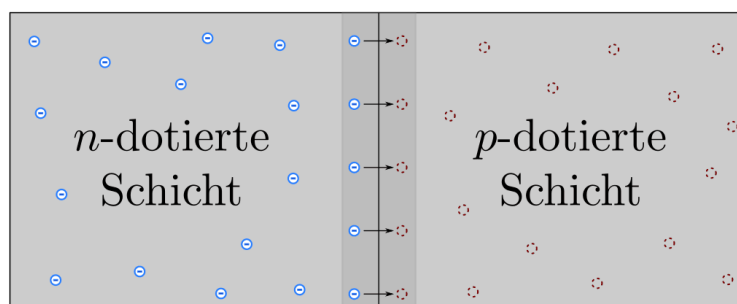


Abb. 189: Prinzip eines *n-p*-Übergangs.

Innerhalb der Raumladungszone gleicht ein Halbleiter-Kristall mit n - p -Übergang einem Halbleiter ohne Dotierung, d.h. der elektrische Widerstand der neutralen Grenzschicht ist gegenüber den restlichen dotierten Bereichen deutlich erhöht.

Die Dicke der neutralen Grenzschicht wird dadurch begrenzt, dass durch das Abdriften der Elektronen in der (ursprünglich neutralen) n -dotierten Schicht eine positive elektrische Ladungs-Anhäufung entsteht; in der (ursprünglich ebenfalls neutralen) p -dotierten Schicht baut sich entsprechend durch die zusätzlichen Elektronen entlang der Grenzschicht eine negative Ladungs-Anhäufung auf.³ Da sich durch die Ladungstrennung eine elektrische Spannung zwischen beiden Schichten aufbaut, kommt es schließlich zu einem Gleichgewicht zwischen dem (thermisch bedingten) Driften der Elektronen und der entgegengesetzt wirkenden „Drift-Spannung“.

In Silizium-Kristallen beträgt die Drift-Spannung rund $U_{D,Si} \approx 0,7\text{ V}$, in Germanium-Kristallen rund $U_{D,Ge} \approx 0,3\text{ V}$. Die Dicke der Raumladungszone hat bei typischen Dotierungen eine Größenordnung von $0,001\text{ mm}$.

Durchlass-Richtung und Sperr-Richtung

Legt man an einen Halbleiter-Kristall mit n - p -Übergang von außen eine elektrische Spannung an, so lässt sich die Dicke seiner Grenzschicht und damit auch seine elektrische Leitfähigkeit gezielt beeinflussen.

- Verbindet man die n -dotierte Schicht mit dem Plus- und die p -dotierte Schicht mit dem Minus-Pol einer Stromquelle („Sperr-Richtung“), so werden die Elektronen und Löcher von der Grenzschicht weg beziehungsweise an den Rand des Halbleiter-Kristalls hingezogen. Die neutrale Raumladungszone wird dadurch vergrößert, der elektrische Widerstand steigt stark an.
- Verbindet man die n -dotierte Schicht mit dem Minus- und die p -dotierte Schicht mit dem Plus-Pol einer Stromquelle („Durchlass-Richtung“), so werden an der n -Schicht kontinuierlich Elektronen nachgeliefert. Ist die angelegte Spannung größer als die Drift-Spannung im Kristall, so können sich die zusätzlichen Elektronen im Kristall ausbreiten. Die Elektronen und Löcher verteilen sich, ähnlich wie gelöste Ionen im Wasser, über den gesamten Kristall und tragen gleichermaßen zum Ladungstransport bei.

In der Elektronik werden n - p -Übergänge in Halbleiter-Bauelementen verwendet. Ein einzelner n - p -Übergang erfüllt die Funktion einer Diode. Doppelte beziehungsweise dreifache n - p -Übergänge finden in [Transistoren](#) und Triacs Anwendung.

Isolatoren

Isolatoren sind Stoffe, in denen sich Ladungen (fast) überhaupt nicht bewegen können. Bekannte Beispiele hierfür sind Gummi, Porzellan, Glas, Diamant, destilliertes Wasser und Luft. Alle diese Stoffe haben gemeinsam, dass in ihnen weder Ionen noch schwach

³ Die fest verankerten Atomrümpfe und damit die Protonen der fünf- beziehungsweise dreiwertigen Donator- beziehungsweise Akzeptor-Atome bleiben in den jeweiligen Schichten zurück.

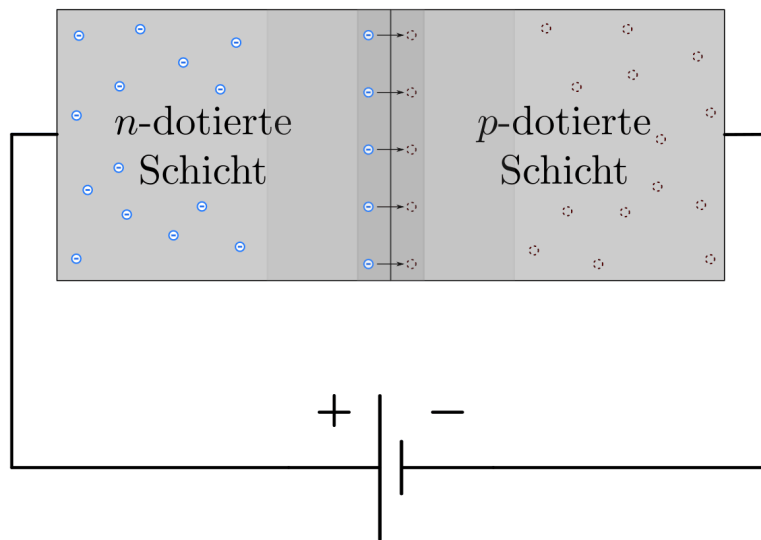


Abb. 190: Anschluss eines n-p-Übergangs in Sperrichtung.

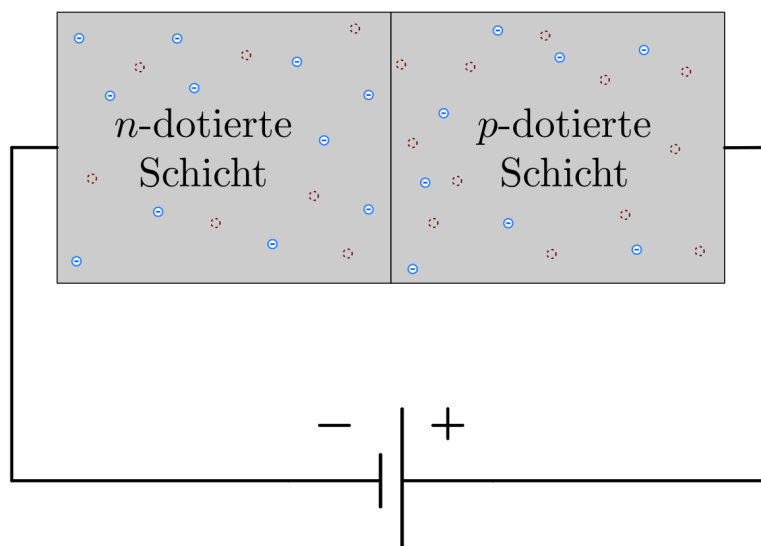


Abb. 191: Anschluss eines n-p-Übergangs in Durchlassrichtung.

gebundene Elektronen für den Ladungstransport zur Verfügung stehen; alle Elektronen sind fest in chemischen Bindungen verankert.

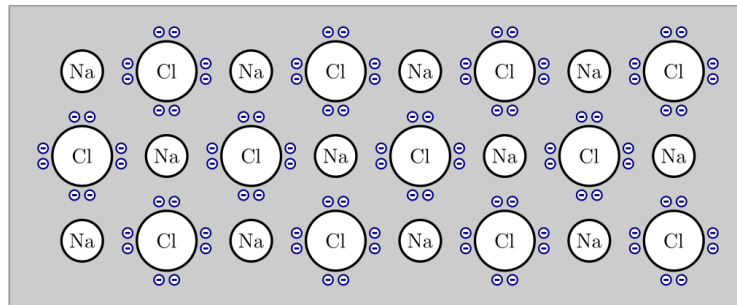


Abb. 192: Ionenbindung im Isolatorkristall Natriumchlorid

Bei extrem hohen Spannungen (einigen Kilo- bis Megavolt) können dennoch kurzzeitig Elektronen aus den Stoffbindungen entrissen werden. Die Folge ist ein „Durchschlag“-Strom (beispielsweise ein Blitz), bei dem in sehr kurzer Zeit sehr viel Energie transportiert wird. Da die Schäden für Menschen, Tiere, Pflanzen und elektronische Geräte entsprechend groß ausfallen können, werden beispielsweise hochgelegene Leitungen und Gebäude mit Überspannungs- beziehungsweise Blitzableitern ausgestattet.

Vakuum

Normalerweise sind Elektronen in Molekülen oder metallischen Festkörpern gebunden. Unter verschiedenen Bedingungen können Elektronen diese Bindungen allerdings verlassen:

- Trifft ausreichend energiereiches Licht auf einen Festkörper, so können durch die Lichteinwirkung Elektronen aus den Festkörper-Bindungen herausgelöst werden („Photo-Effekt“).
- Bei ausreichend hohen Temperaturen lösen sich Elektronen aus Metallen heraus („Glühemission“).

Die den Elektronen zugeführte Licht- beziehungsweise Wärme-Energie muss groß genug sein, um die Bindungsenergie der Elektronen zu überwinden; die restliche zugeführte Energie verbleibt als kinetische Energie bei den Elektronen.

Im Vakuum erfahren freie Elektronen keine Stöße mit anderen Objekten. Beschleunigt man sie durch Anlegen einer elektrischen Spannung, so können sie in eine bestimmte Richtung gelenkt und auf hohe Geschwindigkeitswerte beschleunigt werden. Auf diesem Prinzip beruhen beispielsweise [Elektronenröhren](#).

Exkurs: Driftgeschwindigkeit von Elektronen

Drückt man auf einen Lichtschalter, so leuchtet quasi „sofort“ die Lampe auf. Die zunächst nur an den Leiter-Enden des noch offenen Schalters anliegende Spannung muss also unmittelbar nach dem Schließen des Schalters auch an der Lampe anliegen.

Tatsächlich breiten sich elektrische Felder mit Lichtgeschwindigkeit aus. Man kann sich das in einem einfachen Vergleich wie einen bereits komplett mit Wasser gefüllten Schlauch vorstellen: Füllt man an einem Ende zusätzlich Wasser hinein, so fließt es sofort am anderen Ende über. Dazu muss allerdings das neu hineinfließende Wasser nicht erst den ganzen Weg durch den Schlauch zurücklegen.

Wie schnell bewegen sich also Elektronen in einem Leiter? Man kann für eine Abschätzung von der so genannten Elektronendichte n des jeweiligen Leitermaterials ausgehen; diese gibt an, wie viele freie Elektronen sich in einem Material je Raumeinheit befinden. Für Kupfer beträgt dieser Wert beispielsweise $n_{\text{Cu}} = 8,47 \cdot 10^{19} \frac{1}{\text{mm}^3}$.

Jedes Elektron trägt genau eine Elementarladung $q_e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Für die bewegliche Ladungsmenge in einem Leiterstück gilt also:

$$Q = n \cdot V \cdot q_e$$

Das Volumen V des Leiterstücks kann wiederum als Produkt aus seiner Querschnittsfläche A und seiner Länge l geschrieben werden. Es gilt somit:

$$Q = n \cdot A \cdot l \cdot q_e$$

Ein elektrischer Strom I entspricht einer sich zeitlich bewegenden Ladungsmenge, es ist also $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Wenn das Leiterstück an allen Stellen aus dem gleichen Material besteht und eine konstante Querschnittsfläche hat, so ist die Länge l die einzige zeitlich veränderliche Größe. Eine zeitliche Änderung einer Strecke ist allerdings nichts anderes als eine Geschwindigkeit; man kann also schreiben:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta(n \cdot A \cdot l \cdot q_e)}{\Delta t} = n \cdot A \cdot q_e \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} = n \cdot A \cdot q_e \cdot v_D$$

Die Drift-Geschwindigkeit v_D gibt an, wie schnell sich ein bestimmtes Elektronenvolumen, das man sich beispielsweise gefärbt vorstellen könnte, durch den Leiter „hindurch schiebt“. Löst man die obige Gleichung nach v_D auf, so erhält man:

$$v_D = \frac{I}{n \cdot A \cdot q_e} \quad (162)$$

Diese Gleichung enthält neben der Naturkonstanten q_e und der Materialkonstanten n nur die Querschnittsfläche A des Leiters sowie die fließende Stromstärke I als leicht messbare Größen.

Beispiel:

- Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in einer gewöhnlichen Kupferleitung mit einer Querschnittsfläche von $A = 1,5 \text{ mm}^2$, wenn eine Stromstärke von $I = 5,0 \text{ A}$ im Stromkreis auftritt?

Für Kupfer beträgt die Elektronendichte $n_{\text{Cu}} = 8,47 \cdot 10^{19} \frac{1}{\text{mm}^3}$; somit erhält man nach der Formel (162) für die Driftgeschwindigkeit:

$$v_{\text{D}} = \frac{I}{n \cdot A \cdot q_e} = \frac{5,0 \text{ A}}{8,47 \cdot 10^{19} \frac{1}{\text{mm}^3} \cdot 1,5 \text{ mm}^2 \cdot 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 0,246 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Die Einheit ergibt sich wegen $A = \frac{\text{Q}}{\text{s}}$.

Die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in einem metallischen Leiter ist somit im Vergleich zur Ausbreitungs-Geschwindigkeit des elektrischen Feldes (Lichtgeschwindigkeit) nur sehr gering.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente*.

Elektrische Felder

In ähnlicher Weise wie man das magnetische Feld eines Permanent- oder Elektromagneten zur Beschreibung der Kraftwirkung auf einen anderen Magneten nutzen kann, ist es auch möglich, das elektrische Feld einer Ladungsverteilung zur Beschreibung der Kraftwirkung auf andere elektrische Ladungen zu verwenden. Anders als Magnetfelder verlaufen elektrische Felder jedoch nicht auf geschlossenen Linien, sondern verlaufen von positiven elektrischen Ladungen hin zu negativen Ladungen.

Das Coulombsche Kraftgesetz

Die Grundlage für die Einführung eines elektrischen Felds bildet das so genannte **Coulomb-Gesetz**, das besagt, dass die Kraft zwischen zwei punktförmigen Ladungen proportional zu Ladungsmengen Q_1 und Q_2 sowie indirekt proportional zum Quadrat des Abstands r beider Ladungen ist:

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad (163)$$

Hierbei ist $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$ die elektrische Feldkonstante des Vakuums. Die Einheit dieser wichtigen Naturkonstanten kann wegen $1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$ = auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{C}} = \frac{\text{J} \cdot \text{m}}{\text{C}^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Mit Hilfe der elektrischen Feldkonstanten kann bei bekannten Ladungsmengen und ihrem Abstand auf die Größe der wirkenden Kraft geschlossen werden; der gesamte Vorfaktor $\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \approx 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$ wird bisweilen auch als „Coulomb-Konstante“ bezeichnet. Anschaulich bedeutet der Wert dieser Konstante, dass zwei Ladungen von je einem Coulomb, die sich in einem Abstand von einem Meter zueinander befinden, aufeinander eine

Kraft von etwa 9 GN ausüben würden – das entspräche einer Gewichtskraft von etwa 10^6 Tonnen. Man erkennt an diesem Beispiel zum einen, dass bei vielen Prozessen, etwa bei sich bewegenden Elektronen, die Gewichtskraft gegenüber der Coulomb-Kraft meist völlig vernachlässigt werden kann. Andererseits zeigt sich, dass 1 Coulomb eine sehr große Ladungsmenge darstellt; im Alltag treten üblicherweise nur Bruchteile dieser Ladungsmenge auf.

Für die Richtung der wirkenden Coulomb-Kraft gilt:

- Sind die Vorzeichen beider Ladungen gleich, so ist die wirkende Kraft positiv, und die Ladungen stoßen sich ab.
- Haben beide Ladungen hingegen unterschiedliche Vorzeichen, so ist die Coulomb-Kraft negativ, und die Ladungen ziehen einander an.

Sind mehrere Ladungen räumlich getrennt angeordnet, so kann man zunächst die Coulomb-Kräfte paarweise berechnen und anschließend die wirkenden Gesamt-Kräfte durch Addition der Teilkräfte ermitteln.

Elektrische Feldstärke

Liegt eine kontinuierliche Verteilung vieler einzelner Ladungen vor, so wäre es zumindest sehr mühsam, die resultierende Wirkung auf eine weitere Probeladung als Überlagerung der zahlreichen einzelnen Coulomb-Kräfte zu beschreiben. Stattdessen verwendet man den Begriff der elektrischen Feldstärke \vec{E} ; diese gibt an, welche Kraftwirkung \vec{F}_{el} eine Probeladung Q_p durch eine bereits vorhandene Ladung oder Ladungsverteilung erfährt:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{el}}}{Q_p}$$

Die elektrische Feldstärke wird in der Einheit $\frac{\text{N}}{\text{C}}$ angegeben.¹ Als Vektor gibt die elektrische Feldstärke die Richtung der Kraft an, die auf eine positive Probeladung wirkt. Die einzelnen Feldlinien gehen deshalb senkrecht von positiven Ladungen aus und enden senkrecht auf negativen Ladungen. Die Dichte der Feldlinien kann als Maß für die Stärke des elektrischen Felds angesehen werden.

Die Kraftwirkung auf negative Probeladungen ergibt sich, indem man sich die Pfeilrichtung der Feldlinien vertauscht vorstellt.

¹ Eine weitere gebräuchliche Einheit für die elektrische Feldstärke ist $\frac{\text{V}}{\text{m}}$. Der Zusammenhang ergibt sich aus der Definition von der Einheit Volt:

$$\text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}}$$

Damit lässt sich die Einheit der elektrischen Feldstärke folgendermaßen umformulieren:

$$\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad \checkmark$$

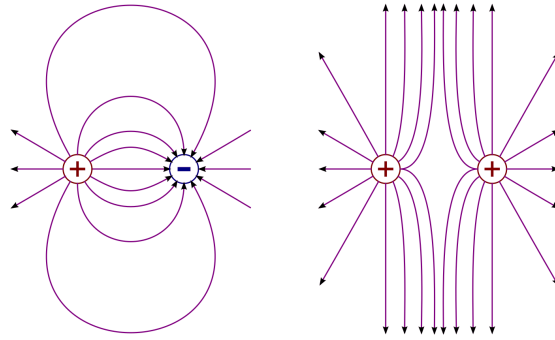


Abb. 193: Feldlinien von unterschiedlichen und gleichen elektrischen Ladungen gleicher Ladungsmenge.

Elektrisches Feld eines Plattenkondensators

Ein elektrisches Feld mit gleichmäßig verteilten und in die gleiche Richtung zeigenden Feldlinien erhält man, wenn man zwei metallische, zueinander parallel angeordnete Platten mit entgegengesetzten Ladungsträgern bestückt. Im Inneren eines solchen „Plattenkondensators“ ist die elektrische Feldstärke an allen Stellen gleich („homogen“).²

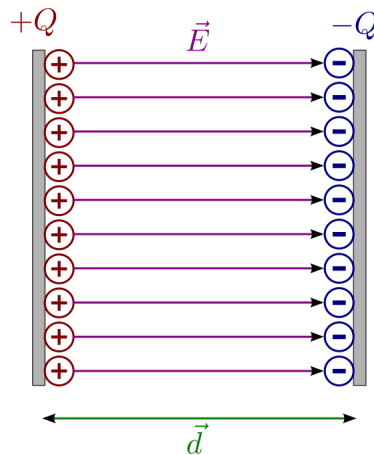


Abb. 194: Das elektrische Feld im Inneren eines Plattenkondensators.

Der Betrag der elektrischen Feldstärke eines Plattenkondensators ist davon abhängig, wie viele zusätzliche Ladungen sich über den Plattenflächen befinden. Das Verhältnis aus der gespeicherten Ladungsmenge Q und der Plattenfläche A wird auch als „elektrische Flussdichte“ \vec{D} bezeichnet. Für ihren Betrag gilt:

$$D = \frac{Q}{A} \quad (164)$$

Die elektrische Flussdichte \vec{D} steht, wie auch die elektrische Feldstärke \vec{E} , senkrecht zu den Kondensatorplatten. Der Zusammenhang zwischen der elektrischen Flussdichte \vec{D} ,

² An den Rändern des Kondensators sind die Feldlinien zwar gekrümmt, doch im Inneren verlaufen die Feldlinien nahezu parallel.

welche die Ladungsverteilung beschreibt, und der elektrischen Feldstärke \vec{E} , welche die Kraftwirkung auf geladene Teilchen angibt, kann wiederum mittels der elektrischen Feldkonstante ε_0 formuliert werden:

$$D = \varepsilon_0 \cdot E \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot D = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} \quad (165)$$

Um einen noch einfacheren Ausdruck für die Elektrische Feldstärke herzuleiten, ist ein kurzes Gedankenexperiment hilfreich: Wird ein einzelne positive Probeladung Q_p entgegen den Feldlinien von der negativen zur positiv geladenen Platte verschoben, so muss dafür eine Arbeit $W = F_{el} \cdot d = Q_p \cdot E \cdot d$ verrichtet werden, wobei d den Plattenabstand bezeichnet. Befindet sich die Ladung anschließend an der positiven Seite, so besitzt sie eine ebenso große potentielle Energie E_{pot} . Als elektrische Spannung U bezeichnet man eben diese potentielle Energie gegenüber der negativen Plattenseite, bezogen auf die Größe Q_p der Probeladung:

$$U = \frac{E_{pot}}{Q_p} \quad (166)$$

Setzt man $E_{pot} = Q_p \cdot E \cdot d$ in die obige Formel ein, so ergibt sich für das elektrische Feld E eines Plattenkondensators folgender nützlicher Zusammenhang:

$$U = E \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{U}{d} \quad (167)$$

Da sowohl die elektrische Spannung U als auch der Abstand d zwischen den geladenen Platten leicht messbare Größen sind, kann das elektrische Feld eines Plattenkondensators sehr einfach bestimmt werden.

Während das elektrische Feld an allen Stellen im Plattenkondensator gleich ist, nimmt die elektrische Spannung im Kondensator von der positiven zur negativen Platte linear auf Null ab.

Elektrische Influenz und Faradayischer Käfig

In Metallen gibt es stets eine Vielzahl an frei beweglicher Elektronen. Im neutralen Zustand werden die negativen Ladungen der Elektronen durch die positiven Ladungen der Atomrümpfe ausgeglichen. Lädt man ein einzelnes Stück Metall mit weiteren Elektronen auf, so verteilen sich diese ausschließlich entlang der Oberfläche, da die zusätzlichen Elektronen ebenfalls frei beweglich sind und sich gegenseitig abstoßen.

Bringt man ein Stück Metall in ein elektrisches Feld ein, so bewirkt dieses eine Verschiebung der frei beweglichen Elektronen zur positiven Platte hin; an der zur negativen Platte hin orientierten Seite bleiben die positiv geladenen Atomrümpfe übrig. Dieser als „elektrische Influenz“ bezeichnete Effekt hält so lange an, bis sich im Metall durch die Ladungsverschiebung ein gleich starkes, aber entgegengesetzt gerichtetes Feld einstellt.

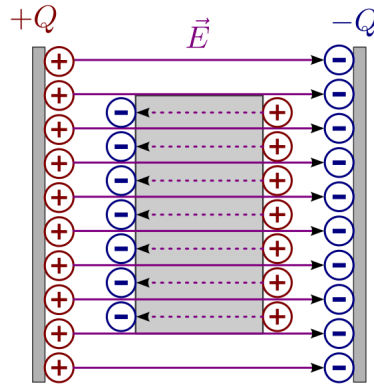


Abb. 195: Elektrische Influenz im Feld eines Plattenkondensators.

Im Inneren des Metalls überlagern sich das äußere und das induzierte elektrische Feld. Da beide Felder gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind, bleibt das Innere des Metalls somit feldfrei. Dies gilt nicht nur massive metallische Körper, sondern auch für metallische Hohlkörper. In der Technik stellen beispielsweise Autokarosserien so genannte „Faradayische Käfige“ dar (benannt nach [Michael Faraday](#)), welche die Insassen vor elektrischen Feldern und damit auch vor Stromflüssen, beispielsweise Blitzen, schützen.

Orientierungspolarisation

Befinden sich zwei Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen, aber gleich großer Ladungsmenge Q im Abstand l zueinander, so spricht man von einem elektrischen Dipol. Ein solcher Dipol besitzt ein so genanntes Dipolmoment \vec{p} , das proportional zur Ladungsmenge und zum Abstand der Ladungen ist und in Richtung der positiven Ladung zeigt:

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{l}$$

Die Einheit des Dipolmoments ist $C \cdot m$.

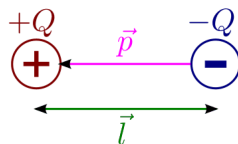


Abb. 196: Prinzip eines elektrischen Dipols.

In der Realität existieren elektrische Dipole in Form von bestimmten Molekülen, die ein permanentes Dipolmoment besitzen, beispielsweise Wasser.

Bringt man einen elektrischen Dipol in ein homogenes elektrisches Feld ein, so richtet er sich parallel zur Feldrichtung aus. Für das dabei wirkende *Drehmoment* \vec{M} gilt:

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F} = Q \cdot \vec{l} \times \frac{\vec{F}}{Q} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Das Drehmoment ist maximal, wenn der elektrische Dipol senkrecht zu den elektrischen Feldlinien ausgerichtet ist, und wird gleich Null, wenn beide Richtungen identisch sind.

Die Ausrichtung von elektrischen Dipolen durch elektrische Felder wird als Orientierungspolarisation bezeichnet. In realen Anwendungen verhindert die statistisch gleichmäßig verteilte Wärmebewegung der Teilchen eine vollständig Ausrichtung der Dipole; bei abnehmender Temperatur nimmt die Orientierungspolarisation daher zu. Bei Abschalten des elektrischen Felds verschwindet die Orientierungspolarisation wieder.

Verschiebungspolarisation und Dielektrikum

Bringt man ein nichtleitendes Material („Dielektrikum“) ohne elektrische Dipole in ein homogenes elektrisches Feld ein, so werden die Ladungsschwerpunkte in allen Atomen leicht verschoben, jeder Atomkern gerät etwas aus dem Zentrum seiner Elektronenhülle. Alle Atome werden somit zu elektrischen Dipolen, auch wenn sie ursprünglich keinen Dipolcharakter besessen haben. Diese Form der Polarisation wird Verschiebungspolarisation genannt.

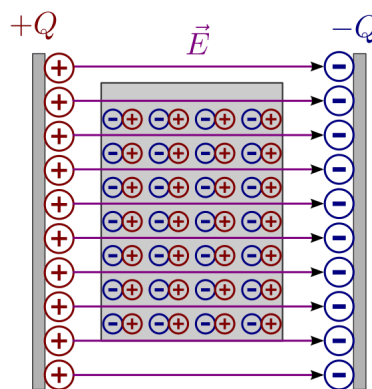


Abb. 197: Elektrische Polarisation im Feld eines Plattenkondensators.

Bei beiden Polarisationsformen erzeugen die Dipole im Dielektrikum selbst ein vergleichsweise schwaches und dem äußeren Feld entgegengesetzt gerichtetes elektrisches Feld. Füllt das Dielektrikum den gesamten Bereich zwischen den Kondensatorplatten aus, so wird der Wert der elektrischen Feldstärke \vec{E} gegenüber dem ursprünglichen Wert um einen Faktor ϵ_r gesenkt. Für einen Plattenkondensator mit Dielektrikum gilt also allgemein:

$$E = \frac{1}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot \frac{U}{d}$$

Der Zahlenwert ϵ_r ist eine Materialkonstante, die als relative Dielektrizitätszahl bezeichnet wird. Streng genommen muss bereits Luft als Dielektrikum angesehen werden, ihr Wert ist jedoch nur geringfügig von der Dielektrizitätszahl des Vakuums.

Material	Dielektrizitätszahl ε_r
Erde (feucht)	29
Erde (trocken)	3,9
Glas	6 bis 8
Glimmer	5,4
Gummi	3
Glycerin	24,5
Holz (trocken)	2 bis 3,5
Luft	1,00059
Porzellan	2 bis 6
Wasser	80

Wird ein Kondensator durch eine an die Platten angeschlossene Stromquelle aufgeladen, so erfolgt dies so lange, bis die elektrische Spannung U zwischen den Kondensator-Platten genauso groß ist wie die anliegende äußere Spannung. Durch ein Einbringen eines Dielektrikum wird allerdings das elektrische Feld und somit auch die Spannung zwischen den Kondensator-Platten gesenkt; somit fließt weitere Ladung auf die Kondensatorplatten nach, bis erneut die Spannung innerhalb des Kondensators (mit Dielektrikum) so groß ist wie die anliegende äußere Spannung. Ein Plattenkondensator kann also mit Dielektrikum eine größere Ladungsmenge speichern als ohne.

Kapazität eines Plattenkondensators

Die Kapazität eines Plattenkondensators gibt an, wie viel die Ladungsmenge Q ist, die der Kondensator bei einer anliegenden Spannung U insgesamt aufnehmen kann:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (168)$$

Die Einheit der Kapazität ist Farad ($1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$). Da ein Coulomb eine sehr große Ladungsmenge darstellt, ist ebenso eine Kapazitätsmenge von einem Farad sehr groß. In der Praxis übliche Kondensatoren werden daher in Pikofarad (pF), (nF) oder Mikrofarad (μF) angegeben.

Die obige Formel (168) gilt allgemein für alle Bauarten von **Kondensatoren**. Bei einem Plattenkondensator ist die Kapazität abhängig von der Fläche A der beiden Kondensatorplatten, von ihrem Abstand d sowie vom Dielektrikum, das sich zwischen den beiden Kondensatorplatten befindet. Handelt es sich beim Dielektrikum um Vakuum oder Luft, so gilt für die Kapazität C des Plattenkondensators:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad (169)$$

Hierbei bezeichnet $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{V}\cdot\text{m}}$ wiederum die elektrische Feldkonstante. Handelt es sich beim Dielektrikum um ein anderes Material, so muss anstelle von ε_0 der Wert $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ in die obige Gleichung eingesetzt werden, wobei ε_r die *Dielektrizitätszahl* des

jeweiligen Materials ist. Durch ein geeignetes Dielektrikum zwischen den Kondensatorplatten kann somit die Kapazität des Kondensators bei gleicher Baugröße um ein Vielfaches erhöht werden.

Elektrische Energie in einem Plattenkondensator

Wird in einem Plattenkondensator eine Ladung positive Ladung Q entgegen der elektrischen Feldlinien bewegt, so muss Arbeit gegen die elektrische Kraft F_{el} verrichtet werden. Bewegt man die Ladung von der negativen zur positiven Platte, die voneinander den Plattenabstand d haben, so gilt für die verrichtete Arbeit W_{el} :

$$W_{\text{el}} = F_{\text{el}} \cdot d$$

Wird ein Kondensator geladen, so kann man sich die dabei verrichtete elektrische Arbeit als schrittweisen Transport von elektrischer Ladung von einer Kondensatorplatte zur anderen vorstellen – nicht über die Luft zwischen den Kondensatorplatten, aber über die Anschlussdrähte. Als Folge der Ladungstrennung baut sich im Kondensator zunehmend eine elektrische Spannung auf.

Hat die Spannung zwischen den Kondensatorplatten den Wert U , so musste während des Ladevorgangs schrittweise Spannungen zwischen Null und U überwunden werden; die durchschnittliche Ladespannung hat also $\bar{U} = \frac{U}{2}$ betragen.

Mit $F_{\text{el}} = Q \cdot E$ und $E = \frac{U}{d}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} W_{\text{el}} &= \bar{F}_{\text{el}} \cdot d = Q \cdot \bar{E} \cdot d \\ &= Q \cdot \frac{\bar{U}}{d} \cdot d = Q \cdot \bar{U} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U \end{aligned}$$

Schreibt man zusätzlich $Q = C \cdot U$, so erhält man für die insgesamt während des Ladens verrichtete elektrische Arbeit:

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot \frac{(C \cdot U)^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad (170)$$

Diese Arbeitsmenge bleibt in Form von elektrischer Energie im Kondensator gespeichert.

Das Millikan-Experiment

Im Jahr 1910 konnte [Robert Millikan](#) erstmals mittels eines Plattenkondensators die Größe der Elementarladung e experimentell bestimmen. Die Grundidee seines Experiments war es, mittels eines Zerstäubers winzige, durch Reibungseffekte zumindest teilweise elektrisch geladene Öltröpfchen zwischen die Platten des Kondensators zu bringen.

Liegt am Kondensator keine elektrische Spannung an, so sinken die Tröpfchen aufgrund ihrer Gewichtskraft F_G langsam nach unten; aufgrund der kleinen Tröpfchengröße sind hierbei die statische Auftriebskraft F_A der Tröpfchen in Luft sowie die Reibungskraft F_R nicht zu vernachlässigen.

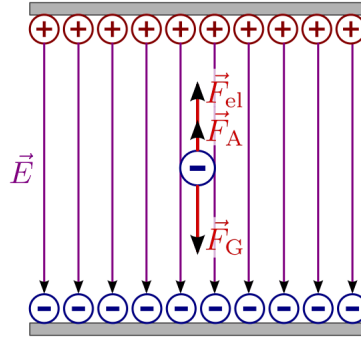


Abb. 198: Kräftegleichgewicht an einem schwebenden Öltröpfchen beim Millikan-Versuch.

Wird hingegen ein elektrisches Feld angelegt, so kann die (nur auf elektrisch geladene Öltröpfchen) wirkende elektrische Kraft F_{el} die Gewichtskraft ausgleichen; bei einer ausreichend großen elektrischen Spannung können die geladenen Teilchen sogar wieder nach oben steigen.

Für die wirkenden Kräfte gilt:

$$F_{\text{G}} = m_{\text{Öl}} \cdot g = \rho_{\text{Öl}} \cdot V \cdot g$$

$$F_{\text{A}} = m_{\text{L}} \cdot g = \rho_{\text{L}} \cdot V \cdot g$$

$$F_{\text{el}} = Q \cdot E = Q \cdot \frac{U}{d}$$

Hierbei bezeichnet $g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ den Ortsfaktor, $\rho_{\text{Öl}}$ die Dichte des Öls und ρ_{L} die Dichte der Luft. Für das Volumen der kugelförmigen Öltröpfchen gilt $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, wobei r den Radius der Öltröpfchen angibt.

Schweben die Öltröpfchen in der Luft, so muss folgendes Gleichgewicht gelten:

$$F_{\text{el}} = F_{\text{G}} - F_{\text{A}}$$

$$Q \cdot \frac{U}{d} = (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{L}}) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \right) \cdot g$$

Für die Ladung Q eines schwebenden Öltröpfchens muss somit gelten:

$$Q = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{L}}) \cdot g \cdot d}{3 \cdot U}$$

In dieser Gleichung sind, abgesehen vom Radius r der Öltröpfchen, alle Größen konstant oder leicht messbar. Die größte Schwierigkeit besteht im exakten Messen des Radius r (durch die Brownsche Molekularbewegung noch zusätzlich erschwert), wobei Messfehler durch die dritte Potenz einen erheblichen Einfluss auf das Ergebnis haben können. Millikan bestimmte daher zusätzlich die Geschwindigkeiten einzelner Tröpfchen beim Sinken, was er durch ein zwischenzeitliches Abschalten der anliegenden Spannung erreichte.

Erreichen die Tröpfchen beim Sinken eine konstante Geschwindigkeit v , so gilt folgendes Kräftegleichgewicht:

$$F_{\text{R}} = F_{\text{G}} - F_{\text{A}}$$

$$6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{L}}) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \right) \cdot g$$

In der obigen Gleichung bezeichnet η die *Viskosität* der Luft; bei 20 °C beträgt diese $\eta \approx 0,0182 \text{ mPa} \cdot \text{s}$. Löst man die Gleichung nach r auf, so erhält man:

$$6 \cdot \eta \cdot v = (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{L}}) \cdot \frac{4}{3} \cdot g \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{6 \cdot 3 \cdot \eta \cdot v}{4 \cdot g \cdot (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{L}})}$$

$$r = \sqrt{\frac{9 \cdot \eta \cdot v}{2 \cdot g \cdot (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{L}})}}$$

Durch Messung der Viskosität der Luft und der Sinkgeschwindigkeit v der Tröpfchen ohne elektrisches Feld kann der Radius r der Tröpfchen mit guter Genauigkeit bestimmt werden.

Millikan stellte fest, dass die sich ergebenden Ladungswerte stets ganzzahlige Vielfache einer „Elementarladung“ waren. Er bestimmte den Wert dieser Ladung zu $1,592 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, was mit dem heute bekannten Wert von $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ bereits sehr gut übereinstimmte.

Bewegung von geladenen Teilchen in elektrischen Feldern

Bringt man ein Teilchen mit einer elektrischen Ladung Q in ein elektrisches Feld mit einer Feldstärke \vec{E} , so erfährt es gemäß $F_{\text{el}} = Q \cdot E$ eine Kraftwirkung. Handelt es sich bei dem Teilchen um ein Elektron oder Proton, so kann die Gewichtskraft des Teilchens gegenüber der elektrischen Kraft F_{el} meist vernachlässigt werden.

Für technische Anwendungen ist insbesondere die Bewegung von Elektronen in elektrischen Feldern von Bedeutung.

Bewegung in Richtung des elektrischen Feldes

Angenommen, ein frei bewegliches Elektron befindet sich zunächst in unmittelbarer Nähe der negativ geladenen Seite eines Plattenkondensators. Durch die elektrische Feldstärke wird es dann zur positiven geladenen Seite hin beschleunigt. Diese Bewegung ähnelt dem *freien Fall* eines Gegenstands im Gravitationsfeld der Erde: Es wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt.

Gemäß der Definition der Spannung (166) kann die potentielle Energie des Elektrons folgendermaßen ausgedrückt werden:³

$$E_{\text{pot}} = Q \cdot U$$

³ Auf den Platten eines geladenen Kondensators befinden sich eine Vielzahl an Ladungsträgern. Beim obigen Ansatz wird daher angenommen, dass ein einzelnes Elektron, das von einer Seite des Kondensators auf die andere gelangt, keinen Einfluss auf die Ladungsverteilung des Kondensators und somit auf die anliegende Spannung hat. Wird die Spannung im Kondensator durch eine äußere Spannungsquelle aufrecht erhalten, kann U während des Vorgangs als konstant angesehen werden.

Die potentielle Energie des Elektrons ist also ausschließlich abhängig von der im Plattenkondensator anliegenden Spannung U , da die Ladung $Q_{\text{el}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ des Elektrons konstant ist.

Beispiel:

- Liegen an den Platten eines Kondensators $U = 100 \text{ V}$ an, so ein Elektron, das sich in unmittelbarer Nähe der negativen Platte befindet, folgende Energiemenge:

$$E_{\text{pot}} = Q_{\text{el}} \cdot U = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 100 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Die Einheit ergibt sich aus $\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$ und $\text{V} = \frac{\text{W}}{\text{A}}$ zu $\text{C} \cdot \text{V} = \frac{\text{W} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A}} = \text{W} \cdot \text{s} = \text{J}$.

Da die Energiemengen bei einzelnen Elektronen ziemlich gering sind, ist es üblich, diese in der Einheit „Elektronenvolt“ anzugeben. Hierbei wird mit $e \equiv Q_{\text{el}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ die Ladung eines einzelnen Elektrons bezeichnet; multipliziert man diesen Wert mit dem Wert der anliegenden Spannung, so erhält man unmittelbar die Energiemenge in Elektronenvolt. Für das obige Beispiel würde entsprechend $E_{\text{pot}} = 1 e \cdot 100 \text{ V} = 100 \text{ eV}$ gelten.

Erreicht das Elektron die positiv geladene Platte, so ist die gesamte potentielle Energie des Elektrons in kinetische Energie umgewandelt worden. Hierbei muss also gelten:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_{\text{el}} \cdot v^2 = Q \cdot U$$

Das Elektron erreicht somit unmittelbar vor dem Aufprall auf der positiven Leiterplatte folgende Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot Q_{\text{el}} \cdot U}{m}}$$

Diese Gleichung kann nicht nur für Elektronen, sondern ebenso für andere geladene Teilchen (beispielsweise Ionen) verwendet werden. Diese tragen meist ebenso nur eine einzelne Elementarladung oder ein geringzahliges Vielfaches davon, haben jedoch eine weitaus höhere Masse; somit ergeben sich wesentlich geringere Geschwindigkeitswerte als bei Elektronen.

Beispiel:

- Liegt wie im obigen Beispiel eine Spannung von $U = 100 \text{ V}$ am Kondensator an, so ergibt sich mit $m_{\text{el}} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ für ein Elektron folgende Aufprall-Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 100 \text{ V}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \approx 5,93 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Einheit ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$\sqrt{\frac{\text{V} \cdot \text{C}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{kg}}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Trotz der *scheinbar* geringen Energiemenge von $E_{\text{pot}} = 100 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ erreicht das Elektron bereits eine Geschwindigkeit von über 5 Mio. $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; dies entspricht bereits rund 1,7% der Lichtgeschwindigkeit.⁴ Wird die Spannung, wie beispielsweise in Braunschen Röhren üblich, um einen Faktor 100 auf 10 000 V erhöht, so steigt die Geschwindigkeit beim Aufprall um den Faktor $\sqrt{100} = 10$ an.

In klassischen Oszilloskopen und Braunschen Röhren werden die freien Elektronen von einem spiralförmig aufgewickelten Heizdraht ausgesendet („Glühelektrischer Effekt“). Ohne ein weiteres wirksames elektrisches Feld würde sich der Draht dabei aufgrund der verbleibenden Atomrümpfe positiv aufladen, und die Elektronen würden zurück in Richtung des Drahtes beschleunigt. Als Folge davon ergäbe sich eine nur wenige Millimeter dicke „Elektronenwolke“ um den Heizdraht herum. Wird hingegen mittels einer (positiv geladenen) Anode ein elektrisches Feld angelegt, so werden die Elektronen entlang der Feldlinien in Richtung der Anode beschleunigt.

Bewegung senkrecht zum elektrischen Feld

Erfolgt die Bewegung eines geladenen Teilchens, beispielsweise eines Elektrons, (zunächst) senkrecht zur Richtung des elektrischen Felds eines Plattenkondensators, so gleicht die vom geladenen Teilchen durchlaufene Bahn derjenigen, die ein *waagrecht geworfener* Gegenstand im Gravitationsfeld der Erde durchläuft.

Verläuft das elektrische Feld in vertikaler Richtung, so bleibt die horizontale Komponente der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens unverändert. Tritt das Teilchen zur Zeit $t_0 = 0$ an der Stelle $s_0 = 0$ in das elektrische Feld ein, so muss also gelten:

$$\begin{aligned}v_x &= v_{x,0} \\s_x &= v_{x,0} \cdot t\end{aligned}$$

In Vertikaler Richtung hat das geladene Teilchen zunächst eine Geschwindigkeit von $v_{y,0} = 0$. Tritt das Teilchen mittig (in der Höhe $s_{y,0} = 0$) in das elektrische Feld ein, so wird es durch das elektrische Feld konstant beschleunigt. Somit muss gelten:

$$\begin{aligned}v_y &= a \cdot \Delta t \\s_y &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\end{aligned}$$

Die Beschleunigung a , die ein geladenes Teilchen im elektrischen Feld erfährt, kann man wegen $a = \frac{F_{\text{el}}}{m}$ als $a = \frac{q \cdot E}{m}$ schreiben. Handelt es sich bei dem geladenen Teilchen um ein freies Elektron, so ist q gleich der Elementarladung q_e , so ergibt sich:

$$\begin{aligned}v_y &= \frac{q_e \cdot E}{m} \cdot \Delta t \\s_y &= \frac{1}{2} \cdot \frac{q_e \cdot E}{m} \cdot t^2\end{aligned}$$

⁴ Auch die Bindungsenergien der Elektronen an den Atomkern werden in Elektronenvolt angegeben. Beispielsweise genügt bei den meisten chemischen Elementen bereits eine Energiemenge von etwa 15 eV, um ein einzelnes Elektron aus der Atomhülle zu lösen („erste Ionisierungsenergie“). Um weitere Elektronen aus der Atomhülle zu lösen, sind meist deutlich höhere Energiemengen erforderlich (siehe folgende [Tabelle auf Wikipedia](#)).

Um die Geschwindigkeit beziehungsweise die Position des Teilchens nicht in Abhängigkeit von der Zeit, sondern in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung s_x auszudrücken, kann man den Zusammenhang $s_x = v_x \cdot t \iff t = \frac{s_x}{v_x}$ nutzen:

$$s_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_e \cdot E}{m} \cdot \frac{s_x^2}{v_x^2}$$

Bei einem Strahl aus freien Elektronen treten diese mit einer jeweils gleichen Eintrittsgeschwindigkeit v_x in das elektrische Feld ein. Durch eine Variation der Spannung an den Kondensatorplatten und damit einer Beeinflussung des elektrischen Feldes E kann somit die Bahn der Elektronen unmittelbar beeinflusst werden. Dieser Effekt wird beispielsweise in Röhren-Oszilloskopen genutzt, um den zeitlichen Verlauf eines beziehungsweise zweier Spannungssignale auf einem Schirm sichtbar zu machen.

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Übungsaufgaben*.

Magnetismus

Bereits seit der Antike kennen und nutzen die Menschen magnetische Erscheinungen. Insbesondere die Verwendung von dünnen, drehbar gelagerten Magnetscheiben in Kompassen war in vielerlei Hinsicht „richtungswesend“ für die Entwicklung der Menschheit. Inzwischen sind insbesondere Elektromagnete, Elektromotoren, Generatoren und Transformatoren aus unserer modernen Gesellschaft nicht mehr wegzudenken.

Permanentmagnete

Wohl am bekanntesten ist die anziehende Wirkung von Magneten auf Eisen. Stoffe, die ebenso wie Eisen von Magneten angezogen werden und dabei selbst magnetisiert werden, bezeichnet man nach dem lateinischen Namen von Eisen („ferrum“) als „ferromagnetisch“ oder umgangssprachlich kurz als „magnetisch“. Hierzu zählen Kobalt, Nickel, Neodym, und wenige Legierungen.

Auf nicht-ferromagnetische Stoffe zeigen Magnete (fast) keine Wirkung.

Das Modell der Elementarmagnete

Magnete besitzen stets zwei gegenüberliegende Bereiche, an denen ihre magnetische Wirkung besonders stark ist. Diese Bereiche werden als Magnetpole bezeichnet.

Zerbricht ein Magnet in zwei Teile, so stellt man fest, dass beide Teilstücke ihrerseits zwei Magnetpole besitzen. Auch bei weiterer Teilung treten die Magnetpole stets paarweise auf. Umgekehrt kann jeder Magnet aus einer Vielzahl kleinster „Elementarmagnete“ aufgefasst werden:

- Zeigen alle Elementarmagnete eines Magneten geordnet in die gleiche Richtung, so verstärken sie sich in ihrer Wirkung – ein starkes Magnetfeld ist die Folge.

- Zeigen die Elementarmagnete in unterschiedliche Richtungen, so heben sich ihre Wirkungen gegenseitig auf.

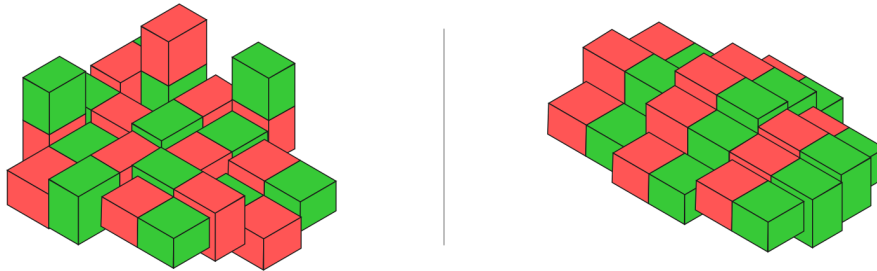


Abb. 199: Die Elementarmagnete eines magnetisierbaren Materials besitzen unterschiedliche Ausrichtungen. In einem magnetisierten Material weisen die Elementarmagnete hingegen eine einheitliche magnetische Ordnung auf.

Anders als bei elektrischen Ladungen existieren bei Magneten keine „Mono-Pole“, sondern nur „Di-Pole“: Bei einem Magneten treten Nord- und Südpol niemals einzeln, sondern stets in Kombination miteinander auf.

Magnetische Influenz

In nicht magnetisiertem Eisen sind die Elementarmagnete bereichsweise geordnet. Diese sogenannten „Weißsche Bezirke“ besitzen ihrerseits allerdings unterschiedliche Ausrichtungen, so dass ein Stück Eisen von sich aus keine magnetische Wirkung auf andere Körper ausübt.

Eisen kann durch Annähern eines Magneten selbst zum Magneten werden. Bei diesem Vorgang, den man als „magnetische Influenz“ bezeichnet, folgen die einzelnen Elementarmagnete wie Kompassnadeln dem äußeren Magnetfeld. Da sich die Wirkungen der einzelnen Elementarmagnete addieren, wirkt das Eisen dadurch auch nach außen hin als Magnet.

In welchem Maß die magnetische Ordnung erhalten bleibt, wenn der äußere Magnet wieder entfernt wird, hängt von der Zusammensetzung des magnetisierten Stoffes ab:

- Bei magnetisch „weichen“ Materialien, beispielsweise Weicheisen, verschwindet der durch Influenz hervorgerufene Magnetismus (weitgehend) wieder.
- In magnetisch „harten“ Materialien, beispielsweise Stahl, bleibt die magnetische Wirkung dauerhaft erhalten.

Erschütterungen oder starkes Erhitzen können die Ordnung der Elementarmagnete wieder zerstören. Für alle Stoffe lässt sich eine bestimmte Temperatur („Curie-Temperatur“) angeben, oberhalb derer die thermische Bewegung der Stoffteilchen eine magnetische Ordnung verhindert. Beispielsweise ist Eisen ab 770 °C nicht mehr magnetisierbar.

Das Magnetfeld

Die Kraft, die ein Magnet auf einen anderen magnetischen Körper ausübt, ist abhängig vom Abstand der Magnete, ihrer Form und von ihrer Ausrichtung zueinander.

Die stärkste Kraft zeigt ein Magnet an seinen beiden gegenüberliegenden Polen:

- Magnetisierbare Körper (beispielsweise Büroklammern aus Eisen) werden von beiden Magnetpolen gleichermaßen stark angezogen (*Magnetische Influenz*).
- Permanent- und Elektromagnete erfahren bei Annäherung ihrer Magnetpole je nach Ausrichtung eine starke anziehende oder abstoßende Wirkung. Werden die Magnetpole – in Anlehnung an das Erdmagnetfeld – als Nord- bzw. Südpol bezeichnet, so zeigt sich, dass sich Nord- und Südpole gegenseitig anziehen, während sich Nord- und Nordpole bzw. Süd- und Südpole gegenseitig abstoßen.

Die magnetische Kraft ist in unmittelbarer Nähe zu den Magnetpolen am stärksten und nimmt mit zunehmendem Abstand von den Magnetpolen ab.

Die Abhängigkeit der Magnetkräfte von der Form des Magneten lässt sich am leichtesten mit Hilfe von Eisenfeilspänen beobachten. Diese werden an unterschiedlichen Stellen um den Magneten herum verschieden stark ausgelenkt bzw. angezogen, so dass sich jeweils ein für die Form des Magneten charakteristisches Muster ergibt.

Auch eine Magnetnadel lenkt sich, wenn sie um einen Magneten herum bewegt wird, an jeder Stelle in der gleicher Richtung wie die Eisenfeilspäne aus, wobei sich der Nordpol der Magnetnadel stets zum Südpol des Magneten hin orientiert.

Die geschlossenen Linien, die sich in den Mustern der Eisenfeilspäne um den Magneten herum ergeben, deuten somit jeweils auf die Richtung der Magnetkraft hin. Man bezeichnet diese räumliche Verteilung der Magnetkräfte um den Magneten herum als „Magnetfeld“ und stellt sie in technischen Zeichnungen (etwas vereinfacht) durch einige stets geschlossene Linien dar. Oftmals werden noch entlang dieser „Magnetfeldlinien“ kleine Pfeile eingezeichnet, die jeweils am Nordpol aus dem Magneten aus- und am Südpol wieder eintreten.

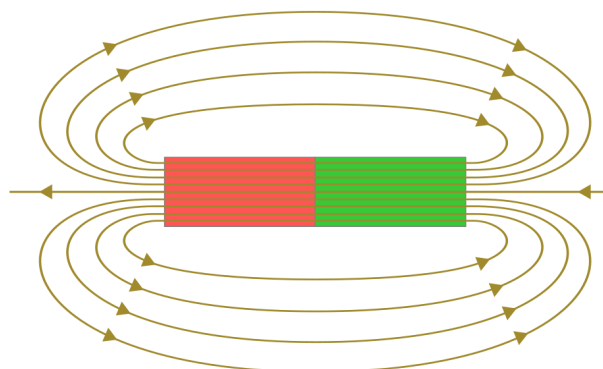


Abb. 200: Die Magnetfeldlinien eines Stabmagneten treten am magnetischen Nordpol aus und am Südpol wieder ein.

Auf diese Weise kann sowohl die Kraftwirkung eines Magneten visualisiert werden als auch sein Einfluss auf andere magnetische bzw. magnetisierbare Körper abgeschätzt werden.

Zusammenfassung:

- Magnetpole treten stets paarweise auf. Entlang diesen verlaufen die Magnetfeldlinien auf stets geschlossenen Bahnen.
- Die Pfeile der Magnetfeldlinien zeigen innerhalb des Magneten in Richtung Nordpol, außerhalb des Magneten in Richtung Südpol.
- Gleiche Magnetpole stoßen sich ab, unterschiedliche Magnetpole ziehen sich an.
- Die magnetische Wirkung nimmt mit zunehmendem Abstand von den Magnetpolen ab.
- Sind mehrere Magneten in gleicher Richtung ausgerichtet, so verstärken sich ihre Wirkungen zu einem Gesamtmagnetfeld. Bei wechselnder Ausrichtung ist nach außen hin (fast) keine magnetische Wirkung feststellbar.
- Magnetfelder lassen sich bereits durch dünne magnetisierbare Platten (beispielsweise aus Eisen) abschirmen, durchdringen hingegen nicht magnetisierbare Materialien nahezu ohne Abschwächung.

Elektromagnete

Im Jahr 1820 entdeckte **Hans-Christian Oersted**, dass auch von einem stromdurchflossenen elektrischen Leiter eine (schwache) Kraftwirkung auf eine nahe gelegene Kompassnadel ausgeht. Diese Feststellung widersprach der bis dahin gängigen Auffassung, dass es sich bei Elektrizität und Magnetismus um zwei voneinander getrennte Phänomene handele.

Durch verschiedene Positionierungen des elektrischen Leiters und der Magnetnadel(n) konnte Örsted in gleicher Weise wie bei Permanentmagneten das schwache Magnetfeld des Leiters bestimmen. Er konnte folgende Gesetzmäßigkeit beobachten:

Rechte-Hand-Regel (für Leiterbahnen):

Umfasst man einen stromdurchflossenen geraden Leiter mit der rechten Hand so, dass der ausgestreckte Daumen entlang der technischen Stromrichtung (von + nach -) zeigt, dann geben die übrigen Finger die Richtung der magnetischen Feldlinien an.

Die Rechte-Hand-Regel gilt auch, wenn der elektrische Leiter zu einer Kreisform gebogen wird. Der Daumen muss hierbei mit der Krümmung des Leiters mitgeführt werden, um stets in die technische Stromrichtung zu zeigen. Es stellt sich dabei heraus, dass das resultierende Magnetfeld an den verschiedenen Stellen der Leiterschleife stets in die gleiche Richtung zeigt.

Beispiel:

- Liegt die Leiterschleife auf einem Tisch und verläuft die technische Stromrichtung entgegen des Uhrzeigersinns, so zeigt das Magnetfeld im Inneren der Leiterschleife an jeder Stelle senkrecht nach oben. (Auf der Außenseite der Leiterschleife zeigt es senkrecht nach unten.)

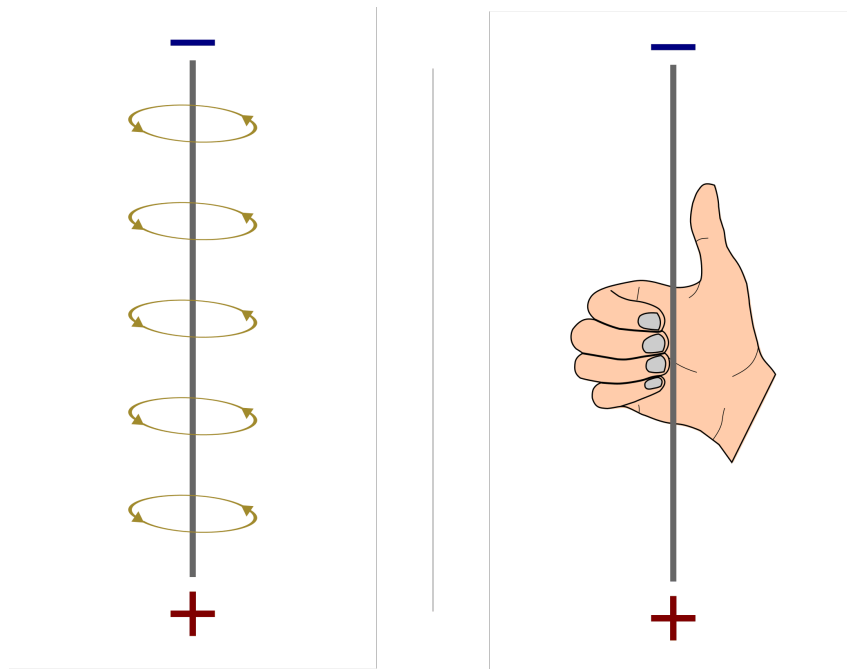


Abb. 201: Magnetfeldlinien und Rechte-Hand-Regel bei einem geraden, stromdurchflossenen Leiterstück.

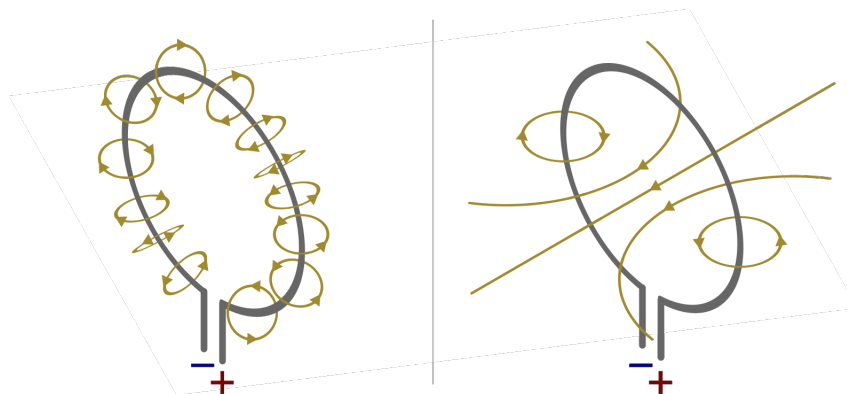


Abb. 202: Das Magnetfeld einer Leiterschleife.

Die Kraftwirkungen an den einzelnen Stellen des elektrischen Leiters addieren sich bei einer Leiterschleife somit zu einem Gesamtmagnetfeld, das an die Form eines Ringmagneten erinnert. Dieser Effekt lässt sich noch wesentlich verstärken, indem mehrere Leiterschleifen übereinander gelegt werden bzw. ein langer Leiter zu einer Spule gewickelt wird.

Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule

Eine lange stromdurchflossene Spule mit vielen Windungen erzeugt nach außen hin ein Magnetfeld, das dem eines Stabmagneten sehr ähnlich ist. Hierbei gibt wieder die Rechte-Hand-Regel Auskunft, in welcher Richtung sich der Nord- bzw. Südpol des „Elektromagneten“ befindet.

Rechte-Hand-Regel (für Spulen):

Umfasst man die Windungen einer Spule mit der rechten Hand so, dass die Finger in die technische Stromrichtung zeigen, dann liegt der magnetische Nordpol der Spule in Richtung des ausgestreckten Daumens.

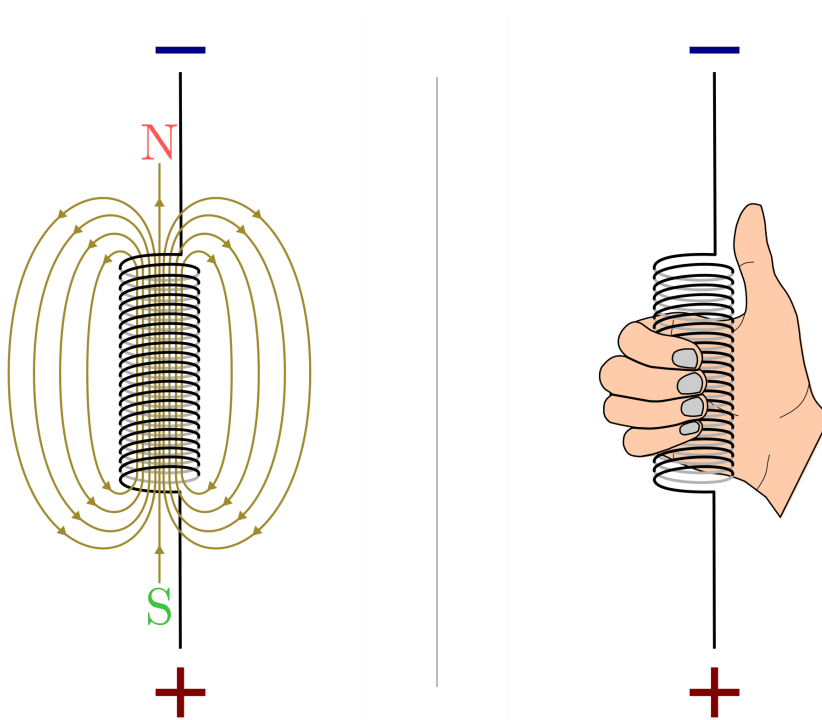


Abb. 203: Magnetfeldlinien und Rechte-Hand-Regel bei einer stromdurchflossenen Spule.

Die magnetische Wirkung einer stromdurchflossenen Spule kann zusätzlich gesteigert werden, indem durch die Spule ein Stück nicht magnetisiertes Eisen gelegt wird. Durch die *magnetische Influenz* wird das Eisen selbst magnetisch und verstärkt die magnetische Wirkung der Spule erheblich.

Elektromagnete haben gegenüber Permanentmagneten folgende Vorteile:

- Elektromagnete lassen sich ein- und ausschalten.

- Die Stärke eines Elektromagneten lässt sich durch die Stromstärke in der Spule regulieren.
- Nord- und Südpol eines Elektromagneten lassen sich vertauschen, indem die Plus- und Minuspole der anliegenden Spannung getauscht werden.
- Elektromagnete sind fast nicht zerbrechlich, verlieren im Lauf der Zeit nicht an Stärke, und sind kostengünstig herzustellen.

Magnetische Feldstärke und magnetische Flussdichte

Quantitativ kann die Kraftwirkung eines Magnetfelds durch die so genannte magnetische Feldstärke \vec{H} beschrieben werden.

Bei einer geraden Leiterbahn ist die magnetische Feldstärke proportional zur fließenden Stromstärke \vec{I} und umgekehrt proportional zum Abstand r von der Leiterbahn. Es gilt also:

$$H_{\text{Leiterbahn}} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Die Einheit der magnetischen Feldstärke ist gemäß der obigen Formel $\frac{\text{A}}{\text{m}}$.

Im Inneren einer Leiterschleife ist der Wert der magnetischen Feldstärke gegenüber einer geraden Leiterbahn um den Faktor π erhöht, es gilt also $H_{\text{Leiterschleife}} = \frac{I}{2 \cdot r}$. Kombiniert man eine Zahl N an Leiterschleifen zu einer langen Spule, so ist die magnetische Feldstärke im Inneren der Spule nahezu „homogen“, die Feldlinien verlaufen also parallel zueinander. Für die magnetische Feldstärke einer Spule mit einer Windungszahl N und einer Länge l gilt:

$$H_{\text{Spule}} = \frac{N \cdot I}{l} \quad (171)$$

Eine zweite wichtige Größe zur Beschreibung von magnetischen Feldern ist die so genannte magnetische Flussdichte \vec{B} . Sie gibt anschaulich an, wie viele Feldlinien durch eine bestimmte Fläche hindurchgehen. Zwischen der magnetischen Flussdichte, welche die räumliche Verteilung der Feldlinien kennzeichnet, und die magnetische Feldstärke, welche die Kraftwirkung auf andere Magneten beschreibt, gibt es folgenden Zusammenhang:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} \quad (172)$$

Hierbei bezeichnet $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ die magnetische Feldkonstante. Für die magnetische Flussdichte ergibt sich damit als Einheit:

$$[B] = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Tesla} = 1 \text{ T}$$

Beispielsweise beträgt die magnetische Flussdichte der Erde rund 0,04 mT.

Der obige Zusammenhang (172) gilt streng genommen nur im Vakuum, in guter Näherung jedoch auch in Luft. Befindet sich jedoch ein anderes Material im Magnetfeld, so muss dessen so genannte Permeabilität berücksichtigt werden, die angibt, ob die durch das Material laufenden Feldlinien durch das Material eher zusammengezogen oder aus dem Material hinausgedrängt werden. Allgemein gilt also:

$$\vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$$

Für die Größe der Permeabilitätszahl μ_r gibt es im wesentlichen drei verschiedene Fälle:

- In diamagnetischen Materialien $\mu_r < 1$, die magnetische Flussdichte wird also gegenüber dem äußeren Feld leicht verringert. Beispiele: Kupfer, Zink, Wasser, Stickstoff.
- In paramagnetischen Materialien ist $\mu_r > 1$, die magnetische Flussdichte wird also gegenüber dem äußeren Feld leicht erhöht. Beispiele: Aluminium, Platin, Sauerstoff.
- In ferromagnetischen Materialien ist $\mu_r \gg 1$, ist die magnetische Flussdichte wird also gegenüber dem äußeren Feld stark erhöht. Beispiele: Eisen, Cobalt, Nickel.

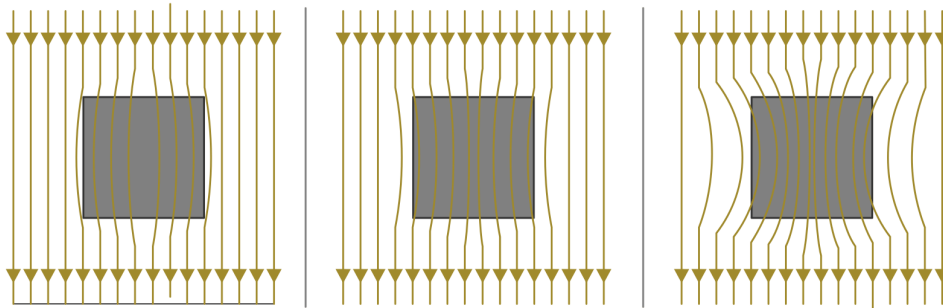


Abb. 204: Feldlinienverlauf bei einer diamagnetischen, paramagnetischen und ferromagnetischen Material (von links nach rechts).

Die Permeabilitätszahlen von dia- und paramagnetischen Materialien sind meist nur wenig von 1 verschieden, so dass die magnetischen Eigenschaften dieser Materialien in technischen Anwendungen nur selten eine Rolle spielen.

Die Lorentz-Kraft

Während jeder elektrische Stromfluss ein Magnetfeld zur Folge hat, so hat gleichermaßen jedes Magnetfeld einen Einfluss auf einen elektrischen Strom.

Befindet sich ein Stück eines stromdurchflossenen Leiters in einem Magnetfeld, so wirkt auf das Leiterstück eine Kraft. Sie wird nach ihrem Entdecker [Hendrik Antoon Lorentz](#) als „Lorentz-Kraft“ bezeichnet. Der Betrag der Kraft hängt von der Stärke Stromflusses bzw. Magnetfeldes sowie vom Winkel zwischen Leiter und Magnetfeld ab:

- Der Betrag der Kraft ist am größten, wenn der Leiter senkrecht zum Magnetfeld ausgerichtet ist.
- Zeigen der Leiter und das Magnetfeld in die gleiche Richtung, so wirkt keine Kraft.

Die Lorentz-Kraft wirkt stets senkrecht zur Stromrichtung und senkrecht zum Magnetfeld. Für den Zusammenhang zwischen Stromfluss, Magnetfeld und Richtung der wirkenden Kraft gilt folgende Merkgel:

Drei-Finger-Regel:

Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung der technischen Stromrichtung (von + nach -) und der Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes, so gibt der Mittelfinger die Richtung der wirkenden Kraft an.

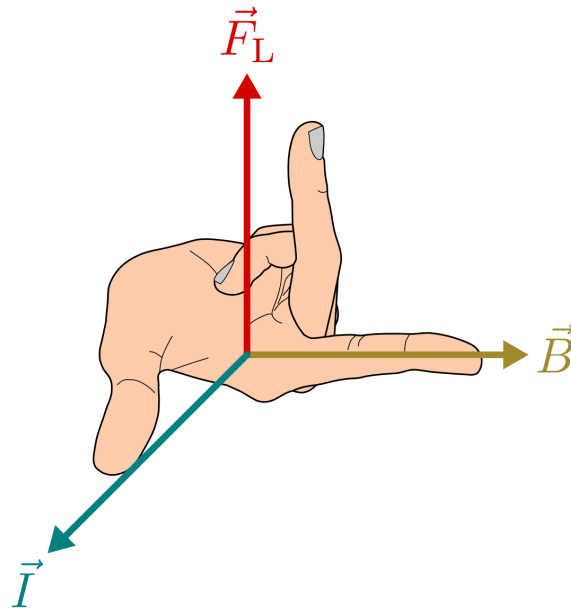


Abb. 205: Die Drei-Finger-Regel als Merkhilfe für die Richtungen der Lorentzkraft \vec{F}_L , des Magnetfeldes \vec{B} und der technischen Stromrichtung \vec{I} .

Bezeichnet man die Länge des vom Strom I durchflossenen Leiterstücks, das sich im Magnetfeld \vec{B} befindet, mit \vec{s} , so kann die Lorentzkraft \vec{F}_L quantitativ mittels folgender Formel berechnet werden:

$$\vec{F}_L = I \times (\vec{s} \times \vec{B}) \quad (173)$$

Verläuft der stromdurchflossene Leiter senkrecht zum Magnetfeld, so ist der Betrag der Lorentzkraft gleich $F_L = I \cdot s \cdot B$, andernfalls ergibt das **Vektorprodukt** $F_L = I \cdot s \cdot B \cdot \sin(\alpha)$, wobei α den Winkel zwischen dem Leiterstück und dem Magnetfeld angibt. Wird nicht nur ein einzelnes Leiterstück, sondern beispielsweise eine Spule mit n Windungen in das Magnetfeld eingebracht, so ergibt sich auch eine n -fache Weglänge s und somit eine n -fache Kraftwirkung; dies wird beispielsweise bei der Konstruktion von Elektromotoren genutzt.

Bewegung geladener Teilchen in magnetischen Feldern

Ein elektrischer Strom entspricht einem zeitlichen Transport elektrischer Ladung. Setzt man den Zusammenhang $I = \frac{Q}{t}$ zwischen der Stromstärke I , der transportierten Ladungsmenge Q und der dafür benötigten Zeit t in die obige Formel (173) ein, so folgt:

$$\vec{F}_L = \frac{Q}{t} \times (\vec{s} \times \vec{B})$$

Diese Gleichung kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\vec{F}_L = Q \times \left(\frac{\vec{s}}{t} \times \vec{B} \right)$$

Das Verhältnis aus der Wegstrecke s und der Zeit t kann als Geschwindigkeit v geschrieben werden. Somit ergibt sich für ein mit einer Ladung Q geladenes Teilchen, das sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch ein Magnetfeld mit einer Flussdichte \vec{B} bewegt:

$$\vec{F}_L = Q \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (174)$$

Auch in diesem Fall ergibt das **Vektorprodukt** einen maximalen Wert, wenn sich das Teilchen senkrecht zum Magnetfeld bewegt; andernfalls kann für das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{B}$ auch $v \cdot B \cdot \sin(\alpha)$ geschrieben werden, wobei α den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des geladenen Teilchens und der Richtung des Magnetfelds angibt. Die obige Gleichung kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\vec{F}_L = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

Ist $\alpha = 90^\circ$, so gilt $\sin(\alpha) = \sin(90^\circ) = 1$, und die Lorentz-Kraft nimmt ihren maximalen Wert $F_{L,\max} = Q \cdot v \cdot B$ an.

Anwendung: Massen-Spektrometer

Die Lorentz-Kraft kann genutzt werden, um die so genannte „spezifische Ladung“ eines Teilchens, das heißt das Verhältnis aus seiner Ladung Q und seiner Masse m zu bestimmen. Hierzu lässt man das Teilchen (beziehungsweise ein Strahl gleichartiger Teilchen) mit einer Geschwindigkeit v senkrecht zu den Magnetfeldlinien in ein Magnetfeld eintreten.

Bewegt sich ein geladenes Teilchen, beispielsweise ein Ion oder ein Elektron, in der waagrechteten Ebene und ist das Magnetfeld vertikal ausgelegt, so bleibt die Geschwindigkeit \vec{v} des Teilchens auch bei einer Ablenkung durch die Lorentz-Kraft senkrecht zum Magnetfeld. Befindet sich die Anordnung in einem Vakuum, so herrschen keine Reibungskräfte, also ist der Betrag der Geschwindigkeit v des Teilchens konstant. Hält man auch die magnetische Flussdichte B des Magnetfelds konstant, so bleibt ebenfalls der Betrag der Lorentz-Kraft F_L konstant.

Die Lorentz-Kraft zwingt das geladene Teilchen durch die kontinuierliche Ablenkung auf eine Kreisbahn. Als Gleichgewichtsbedingung müssen die dafür notwendige *Radialkraft* F_{rad} und die Lorentz-Kraft F_{L} gleich groß sein:

$$F_{\text{rad}} = F_{\text{L}}$$

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = Q \cdot v \cdot B$$

Für die spezifische Ladung $\frac{Q}{m}$ des Teilchens ergibt sich also:

$$\frac{Q}{m} = \frac{v}{r \cdot B}$$

Ist die Flussdichte B des Magnetfelds sowie die Eintrittsgeschwindigkeit v bekannt, so kann durch eine Messung des Radius r der Kreisbahn auf die spezifische Ladung des Teilchens geschlossen werden; eine derartige Anordnung wird Massen-Spektrometer genannt.

Handelt es sich bei dem Teilchen-Strahl um Ionen mit jeweils gleicher Ladung, so kann mit einem Massen-Spektrometer insbesondere bestimmt werden, in welchem Verhältnis einzelne *Isotope* des Ions auftreten; diese haben weitestgehend gleiche chemische und physikalische Eigenschaften, variieren jedoch in ihrer Masse m . In einem Massen-Spektrometer werden Isotope mit größerer Masse auf Kreisbahnen mit größerem Radius gelenkt, so dass mittels entsprechender Detektoren die Häufigkeitsverteilung der einzelnen Isotope gemessen werden kann.

Anwendung: Hall-Sensoren

Die Lorentz-Kraft findet auch Anwendung in nach [Edwin Hall](#) benannten „Hall-Sensoren“, die zur Messung von magnetischen Flussdichten verwendet werden können.

Ein Hall-Sensor hat prinzipiell folgenden Aufbau:

- Längs durch ein dünnes Halbleiter-Plättchen lässt man, indem man an den zwei entsprechenden Anschluss-Stellen eine konstante elektrische Spannung anlegt, einen elektrischen Strom fließen. Hierdurch bewegen sich also Elektronen mit einer bestimmten Geschwindigkeit v in Längsrichtung durch das Plättchen.
- Tritt senkrecht durch die Querschnittsfläche des Plättchens ein magnetischer Fluss B hindurch, so erfahren die Elektronen gemäß der Gleichung (174) eine Lorentz-Kraft und somit eine Ablenkung entlang der Breite des Plättchens. Für den Betrag der ablenkenden Kraft gilt also:

$$F_{\text{L}} = Q \cdot v \cdot B$$

- Durch die Ablenkung der Elektronen und den Verbleib der positiv geladenen Atomkerne baut sich entlang der Breite des Plättchens ein elektrisches Feld auf. Das elektrische Feld übt auf die Elektronen eine Kraft in die umgekehrte Richtung aus, das sich die angehäuften Elektronen gegenseitig abstoßen. Für den Betrag der elektrischen Kraft F_{el} gilt:

$$F_{\text{el}} = Q \cdot E = Q \cdot \frac{U}{b}$$

Hierbei wurde der Zusammenhang $E = \frac{U}{d}$ genutzt, der die elektrische Feldstärke E eines *Plattenkondensators* in Abhängigkeit von der anliegenden Spannung U und dem Plattenabstand d beschreibt. Im obigen Fall entspricht der Plattenabstand gerade der Breite b des Plättchens.

Die Elektronen in einem Hall-Sensor werden so lange durch die Lorentz-Kraft abgelenkt, bis sich durch das sich aufbauende elektrische Feld eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft einstellt. Ist dies der Fall, so herrscht folgendes Gleichgewicht:

$$F_L = F_{el}$$

$$Q \cdot v \cdot B = Q \cdot \frac{U_H}{b}$$

Die sich im Gleichgewichtsfall einstellende elektrische Spannung wird „Hall-Spannung“ U_H genannt; sie kann an entsprechenden Anschlüssen entlang der Breitseite des Plättchens abgegriffen und gemessen werden. Für die Hall-Spannung gilt gemäß der obigen Gleichung:

$$U_H = B \cdot v \cdot b \quad (175)$$

Kennt man die Geschwindigkeit der Elektronen, die sich je nach Halbleiter-Material beim Stromfluss durch das Plättchen einstellt, so kann durch eine Messung der Hall-Spannung unmittelbar die magnetische Flussdichte B eines externen Magnetfelds berechnet werden.

Hall-Sensoren haben in der Praxis vielerlei Anwendungen, insbesondere weil sie sehr resistent gegen Wasser, Schmutz und Erschütterungen sind. Sie werden beispielsweise in so genannten „Stromzangen“ zur berührungslosen Messung von Strömen in elektrischen Leitern sowie in Leitungssuchgeräten eingesetzt; in beiden Fällen wird ausgenutzt, dass elektrische Ströme in Leitern ein Magnetfeld hervorrufen, das mit Hall-Sensoren gemessen werden kann. Ebenso werden Hall-Sensoren zur Drehzahlmessung in Fahrzeugen und Turbinen eingesetzt; in die am Hall-Sensor vorbei rotierenden Objekte müssen lediglich kleine Magnete verbaut werden, die bei jeder Umdrehung am Sensor ein kurzes Spannungssignal bewirken, der mit einer geeigneten Mess-Schaltung registriert werden kann.

Elektromagnetische Induktion

Bewegt man ein Stück Metall senkrecht zu den Feldlinien eines homogenen Magnetfelds, so bewirkt die Lorentz-Kraft im Inneren des Leiters eine Verschiebung der Elektronen senkrecht zur Bewegungsrichtung und ebenfalls senkrecht zur Richtung des Magnetfelds. Da sich nur die freien Elektronen, jedoch nicht die positiv geladenen Atomkerne bewegen, baut sich im Inneren des Metalls zwischen den beiden Enden ein elektrisches Feld beziehungsweise eine elektrische Spannung auf.

Dieser Vorgang wird elektromagnetische Induktion genannt. Schließt man ein Messgerät oder einen Verbraucher (beispielsweise eine kleine Glühbirne) an die Enden des Leiters an, so kann prinzipiell die induzierte Spannung gemessen beziehungsweise als Stromquelle genutzt werden. Bei einem einzelnen kurzen Leiterstück ergeben sich jedoch nur sehr geringe Spannungswerte im Millivolt-Bereich; größere Spannungs- beziehungsweise Stromwerte ergeben sich wiederum, wenn das einzelne Leiterstück durch eine Spule mit möglichst vielen Windungen ersetzt wird.

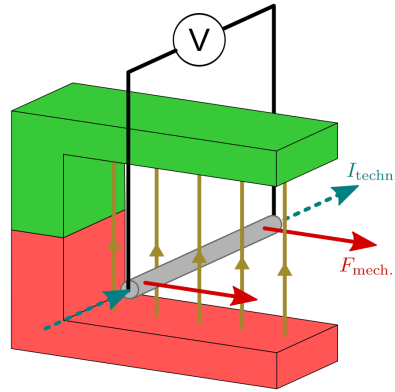


Abb. 206: Elektromagnetische Induktion durch mechanisches Bewegen einer Leiterschaukel.

In der obigen Abbildung ist auch die technische Stromrichtung eingezeichnet, die sich bei einer Bewegung der Leiterschaukel durch die angegebene mechanische Kraft ergibt (Lorentz-Kraft beziehungsweise Drei-Finger-Regel). Ist kein Verbraucher beziehungsweise Messgerät angeschlossen, so baut sich in gleicher Richtung ein elektrisches Feld auf, bedingt durch Ladungsverschiebungen im Inneren der Leiterschaukel. Im Gleichgewichtsfall wird die Lorentz-Kraft, welche die Elektronen im Inneren des durch das Magnetfeld bewegten Leiterstücks erfahren, durch das sich resultierende elektrische Feld ausgeglichen:

$$F_L = F_{el}$$

$$Q \cdot v \cdot B = Q \cdot \frac{U_i}{d}$$

Die sich einstellende Spannung wird Induktionsspannung U_i genannt, d bezeichnet die Länge des Leiterstücks, das sich im Magnetfeld befindet. Wird die obige Gleichung nach U_i aufgelöst, so ergibt sich:

$$U_i = B \cdot v \cdot d$$

Es tritt nur dann eine Induktionsspannung auf, wenn der Leiter mit einer Geschwindigkeit v senkrecht zum Magnetfeld bewegt wird. Hat die Geschwindigkeit den Wert Null oder verläuft die Bewegung parallel zu den Magnetfeldlinien, so ist die induzierte Spannung gleich Null.

Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Um eine allgemeinere Formel zur Beschreibung der einer elektromagnetischen Induktion auftretenden Spannung U_i aufstellen zu können, ist es sinnvoll, eine neue Größe Φ zu definieren, die man als „magnetischen Fluss“ bezeichnet:

$$\Phi = B \cdot A \tag{176}$$

Zwischen dem magnetischen Fluss Φ und der magnetischen Flussdichte $B = \frac{\Phi}{A}$ besteht ein ähnlicher Zusammenhang wie zwischen der Stromstärke I und der Stromdichte $j = \frac{I}{A}$:

Die letzteren Größen geben jeweils die Flächendichte der Bezugsgröße an. Bei der magnetischen Flussdichte geht es allerdings nicht um Ladungsträger, die durch eine bestimmte Fläche hindurch wandern, sondern um die Anzahl an Feldlinien, welche durch diese hindurchgehen. Der magnetische Fluss beschreibt entsprechend der Menge an Feldlinien, welche durch eine Fläche A verlaufen.

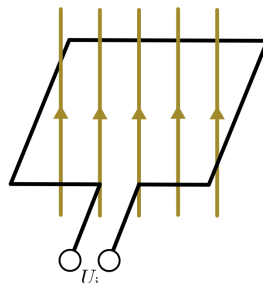


Abb. 207: Magnetischer Fluss Φ durch eine Leiterschleife.

Ist der magnetische Fluss Φ durch eine Fläche zeitlich konstant, so ist die induzierte Spannung U_i gleich Null. Ändert sich hingegen der magnetische Fluss Φ , indem man wahlweise die Stärke B der magnetischen Flussdichte und/oder die Größe der vom Magnetfeld durchfluteten Fläche A ändert, so wird eine Induktionsspannung U_i erzeugt, die umso größer ist, je schneller diese Änderung erfolgt. Als Zusammenhang ergibt sich somit für die Induktionsspannung in einer Leiterschleife:

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (177)$$

Diese Gesetzmäßigkeit, wonach die in einer Leiterschleife induzierte Spannung gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses ist, wurde als erstes im Jahr 1831 von Michael Faraday entdeckt.

Beispiele:

- In einem homogenen und zeitlich konstanten Magnetfeld kann eine Änderung der vom Magnetfeld durchfluteten Fläche A einerseits durch ein Verschieben der Leiterschleife in das Magnetfeld hinein beziehungsweise aus dem Magnetfeld heraus bewirkt werden; andererseits kann der gleiche Effekt, wie in der folgenden Abbildung zu sehen ist, auch durch eine Rotation der Leiterschleife im Magnetfeld bewirkt werden.
- Bewegt man durch eine ruhende Leiterschleife einen Stabmagneten, dessen magnetische Flussdichte nicht homogen ist (sondern zu den Polen hin zunimmt), so spürt die Leiterschleife ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld. Auch hierbei wird also eine (wenn auch sehr geringe) Spannung induziert.

Die beiden oben beschriebenen Möglichkeiten zum Erwirken einer Induktionsspannung können optimiert werden, indem man statt einer einzelnen Leiterschleife eine aus möglichst vielen Windungen bestehende Spule verwendet. Für die Induktionsspannung einer Spule mit N Windungen gilt:

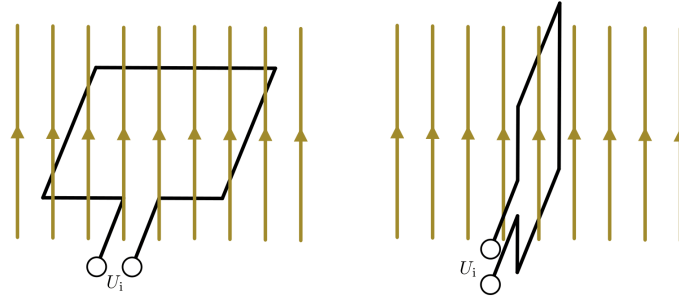


Abb. 208: Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife mittels Rotation.

$$U_i = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (178)$$

Die Lenzsche Regel

In den obigen Gleichung (177) und (178) zur Beschreibung der Induktionsspannung steht jeweils vor der zeitlichen Änderung $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ein Minus-Zeichen. Dies ist eine Folge einer von **Emil Lenz** entdeckten Gesetzmäßigkeit, wonach die Induktionsspannung stets ihrer Ursache entgegenwirkt.

Die Ursache für die Induktionsspannung ist letztlich die Lorentz-Kraft, welche im Inneren der bewegten Leiterschleife(n) eine Verschiebung der Elektronen und somit ein elektrisches Feld bewirkt. Durch dieses Feld werden die Elektronen allerdings nicht weiter beschleunigt (was ein Perpetuum mobile zur Folge hätte), sondern vielmehr abgebremst.

... to be continued ...

Hinweis: Zu diesem Abschnitt gibt es *Experimente* und *Übungsaufgaben*.

Atom- und Kernphysik

Atommodelle

Wohl schon immer faszinierten den Mensch die Frage, „was die Welt im Innersten zusammenhält“ (Goethe). Im Laufe der Geschichte haben einige Wissenschaftler und Philosophen hierzu einige Theorien entwickelt, um die Ergebnisse der stets neuen, technisch ausgefeilteren Experimente erklären zu können.

Im folgenden sind die heutiger Sicht wichtigsten dieser Atommodelle knapp zusammengefasst.

Das Demokrit-Modell

Das erste Atommodell geht auf die beiden griechischen Philosophen **Leukipp** und seinen Schüler **Demokrit** zurück. Beide waren der Ansicht, dass sich Materie nicht beliebig weit zerteilen lasse. Vielmehr müsse es ein kleinstes Teilchen geben, das nicht weiter zerteilbar ist: Das „Urkorn“ oder „Atom“ (*atomos* = griech. unteilbar).

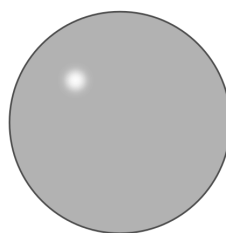


Abb. 209: Das Atommodell nach Demokrit: Atome als „Grundbausteine“ der Materie.

Beide Philosophen stützten ihre Theorien nicht auf Experimente, sondern auf Nachdenken.

Das Dalton-Modell

Im Jahr 1803 griff der Chemiker und Lehrer **John Dalton** – inspiriert durch das vom Chemiker **Joseph-Louis Proust** formulierte Gesetz der konstanten Mengenverhältnisse –

Demokrits Vorstellung von unteilbaren Materiebausteinen wieder auf. Er entwickelte ein Atommodell mit folgenden Hypothesen:

- Jede Materie besteht aus Grundbausteinen, den unteilbaren Atomen.
- Die Atome eines Elements sind untereinander gleich, die Atome verschiedener Elemente unterscheiden sich stets in ihrer Masse und Größe.
- Jeweils eine ganze Zahl an Atomen verschiedener Elemente bildet Verbindungen.

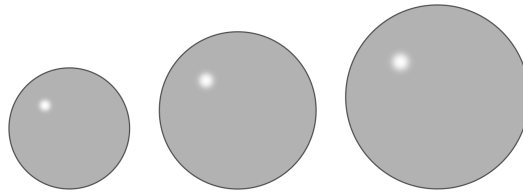


Abb. 210: Das Atommodell nach Dalton: Unterschiedliche Elemente besitzen unterschiedlich große bzw. schwere Atome.

Durch diese Atomhypothese war Dalton in der Lage, das Gesetz von der Erhaltung der Masse, das Gesetz der konstanten Proportionen und das Gesetz der multiplen Proportionen zu erklären.

Das Thomson-Modell

Im Jahr 1897 entdeckte [Joseph John Thomson](#) bei Untersuchungen einer Glühkathode, dass es sich bei der austretenden Strahlung um einen Strom von Teilchen handeln müsse. Diese auf diese Weise entdeckten „Elektronen“ ließen sich durch ein Magnetfeld ablenken und besaßen eine fast 2000 mal kleinere Masse als das leichteste bekannte Atom (Wasserstoff).¹

Da Thomson diesen „Elektronen“-Strahl aus jedem Metall durch Erhitzen gewinnen konnte, mussten diese Teilchen bereits im Metall enthalten sein; Atome konnten folglich nicht die kleinsten Bausteine der Materie bzw. unteilbar sein.

Thomson schlug daher im Jahr 1904 folgendes Atommodell vor:

- Jedes Atom besteht aus einer elektrisch positiv geladenen Kugel, in die elektrisch negativ geladene Elektronen eingelagert sind – wie Rosinen in einem Kuchen.
- Die Atome sind nach außen hin neutral. Sie können jedoch Elektronen abgeben oder zusätzliche aufnehmen.
- Bei der Abgabe von Elektronen entstehen aus den ursprünglich neutralen Atomen positiv geladene Ionen, bei der Aufnahme von Elektronen entstehen entsprechend negativ geladene Ionen.

¹ Bereits [Eugen Goldstein](#) und [William Crookes](#) erkannten um das Jahr 1880 herum bei der Untersuchung von Gasentladungsröhren den „Teilchencharakter“ der Kathodenstrahlen.

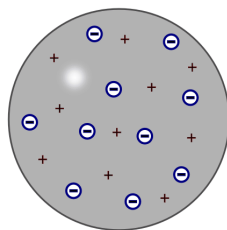


Abb. 211: Das Atommodell nach Thomson: Atome als positiv geladene Kugeln, in die Elektronen eingelagert sind.

Durch sein Atommodell konnte Thomson die Kathodenstrahlung sowie die Erkenntnisse aus der Elektrolyse-Forschung von [Michael Faraday](#) erklären.

Das Rutherford-Modell

Im Jahr 1911 führte [Ernest Rutherford](#) ein Experiment durch, bei dem er einen Strahl radioaktiver Alpha-Teilchen (${}^4_2\text{He}^{2+}$) auf eine dünne Goldfolie lenkte. Die meisten Alpha-Teilchen konnten die Goldfolie ungehindert durchdringen, nur wenige wurden (teilweise sehr stark) abgelenkt.

Dieses Ergebnis ließ sich nicht durch die Vorstellung kompakter Atomkugeln (Thomson-Modell) erklären. Der wesentliche Teil der Masse und die positive Ladung des Atoms mussten sich vielmehr in einem kleinen Bereich im Inneren befinden, an dem die auftreffenden Alpha-Teilchen abprallen konnten. Das meiste Volumen hingegen musste die masselose, negativ geladene und aufgrund der geringen Größe der Elektronen weitgehend „hohle“ Hülle des Atoms einnehmen.

Rutherford fasste seine Erkenntnisse in folgendem Atommodell zusammen:

- Das Atom besteht aus einem Atomkern und einer Atomhülle.
- Der Atomkern ist elektrisch positiv geladen und befindet sich im Zentrum des Atoms.
- Der Durchmesser des Atomkerns beträgt nur ein Zehntausendstel des gesamten Atomdurchmessers.
- In der Atomhülle befinden sich negativ geladene Elektronen, die um den Atomkern kreisen. (Durch ihre schnelle Bewegung verhindern die Elektronen, dass sie in den entgegengesetzt geladenen Atomkern stürzen.)
- Die Atomhülle ist ein fast „leerer“ Raum, da die Elektronen noch viel kleiner sind als der Atomkern.

Mit seinem Atommodell konnte Rutherford allerdings noch keine Aussagen über die Bahnform der Elektronen und über ihre Energieverteilung treffen.

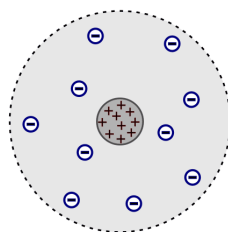


Abb. 212: Das Atommodell nach Rutherford: Atom als positiv geladener Atomkern mit einer negativ geladenen Elektronenhülle.

Das Bohr-Modell

Im Jahr 1913 formulierte **Niels Bohr** ein Atommodell, das von einem planetenartigen Umlauf der Elektronen um den Atomkern ausgeht. Damit konnte er – beeinflusst durch die Quantentheorie **Max Plancks** und die Entdeckung des Photoeffekts durch **Albert Einstein** – erstmals die im Mikrokosmos stets in bestimmten Vielfachen auftretenden Energiesprünge deuten. Diese waren seit der Untersuchung der Spektren von Gasentladungsröhren – insbesondere seit der von **Johann Jakob Balmer** im Jahr 1885 gefundenen Formel² für die Verteilung der im Spektrum des Wasserstoffs auftretenden Wellenlängen – eines der größten Rätsel der damaligen Physik.

Bohr setzte in seinen Berechnungen die elektrostatische Anziehungskraft zwischen Elektron und Kern gleich der Zentrifugalkraft, die sich aus der Umlaufgeschwindigkeit des Elektrons ergibt. Hierdurch konnte er die Verteilung der Spektrallinien von Wasserstoff in allgemeiner Form³ erklären.

Bohr war sich zudem bewusst, dass das Modell kreisförmiger Elektronenbahnen einen Widerspruch mit sich führte: Da jede Kreisbahn einer beschleunigten Bewegung entspricht und beschleunigte Ladungen elektromagnetische Wellen abstrahlen, müssten Elektronen ständig Energie abgeben und dadurch immer langsamer werden. Sie würden somit – an-

² Balmer entdeckte die Tatsache, dass sich die Wellenlängen λ aller Linien im sichtbaren Teil des Wasserstoffspektrums durch eine einfache mathematische Reihenformel beschreiben lassen:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Hierbei stehen $R_H = 1,097 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$ für die Rydberg-Konstante und $n > 2$ für eine ganze Zahl.

Weitere Spektrallinien des Wasserstoffs im nicht sichtbaren Bereich wurden später zu Ehren ihrer Entdecker **Lyman-Serie** (1906), **Paschen-Serie** (1908) und **Brackett-Serie** (1922) genannt.

³ Sämtliche Spektrallinien des Wasserstoffs lassen sich allgemein nach der folgenden „Balmer-Formel“ berechnen:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_a^2} \right)$$

Hierbei steht $n = 1, 2, 3, \dots$ für die Elektronenbahn des Ausgangszustandes und $n_a > n$ für die Elektronenbahn des angeregten Zustands.

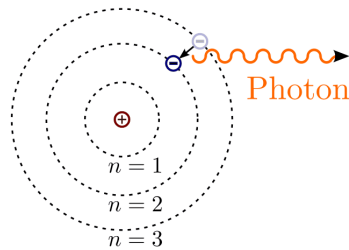


Abb. 213: Das Atommodell für Wasserstoff nach Bohr: Jedes Elektron umkreist den Atomkern auf einer Kreisbahn. Beim Übergang eines Elektrons von einer äußeren Elektronenbahn in eine innere Elektronenbahn wird ein Lichtquant (Photon) ausgesendet.

gezogen von der positiven Ladung des Atomkerns – in nur wenigen Bruchteilen einer Sekunde spiralförmig in den Atomkern stürzen.

Um sein Atommodell zu retten, das auch mit anderen experimentellen Ergebnissen bestens übereinstimmte, führte Bohr die beiden folgenden Postulate ein⁴:

1. Die Elektronen umkreisen den Atomkern strahlungsfrei, d.h. ohne Abgabe von Energie, in bestimmten Bahnen. Dabei nimmt die Energie der Elektronen nur ganz bestimmte, durch die jeweilige Bahn charakterisierte Werte an.
2. Der Übergang zwischen einer kernfernen zu einer kernnahen Bahn erfolgt sprunghaft unter Abgabe einer Strahlung (eines Photons) mit der Frequenz f , so dass gilt:

$$\Delta E = h \cdot f$$

Hierbei ist $\Delta E = E_{n_a} - E_{n_i}$ die Energiedifferenz zwischen der äußeren und inneren Elektronenbahn und $h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ die Planck-Konstante. Im umgekehrten Fall lässt sich ein Elektron durch ein Photon der entsprechenden Frequenz in einen energiereicheren (weiter außen gelegenen) Zustand anheben.

Die Sommerfeld-Erweiterung

Im Jahr 1916 formulierte [Arnold Sommerfeld](#) eine Erweiterung des Bohrschen Atommodells. Es ging anstelle von Kreisbahnen allgemeiner von elliptischen Bahnen der Elektronen um den Atomkern aus. Eine Ellipse besitzt neben einer großen Halbachse, deren Größe nach Sommerfeld dem Radius einer Kreisbahn im Bohrschen Atommodell und somit einem Energieniveau entsprach, auch eine kleine Halbachse. Sommerfeld ging davon aus, dass auch die Größe dieser Halbachse nur bestimmte Werte annehmen kann. Er führte somit neben der „Hauptquantenzahl“ n für das Energieniveau eine zusätzliche „Nebenquantenzahl“ l ein, welche im Wesentlichen die Form der Ellipse bestimme.

⁴ Ein Postulat ist ein Ansatz, der zu einem sinnvollen Ergebnis führt, auch wenn er theoretisch nicht begründet werden kann bzw. sogar widersprüchlich erscheint.

Arnold Sommerfeld konnte damit erklären, warum in den optischen Spektren eines Atoms – wie man dank einer höheren Auflösung zwischenzeitlich erkannte – nicht nur einzelne Linien, sondern eher mehrere sehr dicht beieinander liegende Linien auftreten. Diese „Feinstruktur“ war ein Hinweis darauf, dass in einem Atom mehrere Energieniveaus existieren, die sehr nahe zusammen liegen müssen. Nach Sommerfelds Vorstellung war durch das Vorhandensein von möglichen Ellipsenbahnen (abhängig vom Energieniveau) ein Grund für derartig feine Energie-Abstufungen gefunden.

Auch das Atommodell nach Sommerfeld kommt nicht ohne das Bohrsche Postulat aus, wonach Elektronen den Atomkern strahlungsfrei umkreisen. Die beiden Atommodelle von Bohr und Sommerfeld liefern für das Wasserstoff-Atom sehr genaue Ergebnisse, sind jedoch für Atome mit mehreren Elektronen unzureichend. Die Einführung einer Hauptquantenzahl durch Bohr und einer Nebenquantenzahl durch Sommerfeld hat sich dennoch, wie sich später herausstellte, als sinnvoll erwiesen.

Das Orbitalmodell

Das Orbitalmodell ist das bis heute genaueste Modell zur Beschreibung der Elektronenbahnen um den Atomkern. Grundlage hierfür waren fundamentale Erkenntnisse von Erwin Schrödinger und Werner Heisenberg in den Jahren 1926 und 1927, die unabhängig voneinander und mit verschiedenen mathematischen Zugängen die Quantenmechanik begründeten.

Die Elektronenbahnen im Orbitalmodell werden als Lösungen der so genannten „Schrödinger-Gleichung“ angesehen. Diese entspricht formal einer Wellengleichung und berücksichtigt den Welle-Teilchen-Dualismus der Elektronen.⁵ Zudem kann nach der „Unschärferelation“, die Werner Heisenberg formulierte, der Ort und die Geschwindigkeit eines Teilchens niemals gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden. Es können damit nur bestimmte Raumbereiche angegeben werden, innerhalb derer sich ein jeweiliges Elektron mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit (> 90%) aufhält. Diese dreidimensionalen Aufenthaltsräume werden Orbitale genannt.

Die konkrete Form eines Orbitals hängt dabei von vier Quantenzahlen ab:

- Die Hauptquantenzahl n gibt – wie in den Atommodellen nach Bohr und Sommerfeld – das Energieniveau eines Elektrons an.
- Die Nebenquantenzahl l legt die räumliche Form eines Orbitals und die kleinen Energieunterschiede innerhalb eines Energieniveaus fest.
- Die Magnetquantenzahl m berücksichtigt das unterschiedliche Verhalten der Elektronen in einem von außen angelegten Magnetfeld.
- Die Spinquantenzahl s berücksichtigt die unterschiedlichen Eigenrotationen der Elektronen, den so genannten Spin.

Jedes Elektron wird durch die obigen Quantenzahlen genau charakterisiert.

⁵ Der Welle-Teilchen-Dualismus wurde im Jahr 1924 von Louis de Broglie entdeckt.

Auswahlregeln

Die vier Quantenzahlen n , l , m und s können nur bestimmte, ganzzahlige Werte annehmen:

- Für die Hauptquantenzahl n gilt:

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (179)$$

Die Werte der Hauptquantenzahl n entsprechen somit formal den unterschiedlich weit vom Atomkern entfernten „Planetenbahnen“ des Bohrschen Atommodells.

- Für die Nebenquantenzahl l gilt:

$$l = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (180)$$

Die Werte der Nebenquantenzahl l entsprechen formal den Abweichungen von einer exakten Kreisbahn im Sommerfeldschen Atommodell. Bei einem bestimmten Energieniveau n treten entsprechend auch n verschiedene Formen an Orbitalen auf.

- Für die Magnetquantenzahl m gilt:

$$m = -l, \dots, 0, \dots, +l \quad (181)$$

Bei einer bestimmten Nebenquantenzahl l sind somit $(2 \cdot l + 1)$ verschiedene Werte für die Magnetquantenzahl möglich. Diese Werte haben eine unterschiedliche räumliche Ausrichtung der jeweiligen Orbitale zur Folge.

- Für die Spinquantenzahl s gilt:

$$s = \pm \frac{1}{2} \quad (182)$$

In jedem Orbital kann ein Elektron somit – unabhängig von den anderen Quantenzahlen – entweder den Spinzustand $s = +\frac{1}{2}$ oder $s = -\frac{1}{2}$ besitzen.

Nach dem im Jahr 1925 von **Wolfgang Pauli** formulierten und nach ihm benannten „Pauli-Prinzip“ müssen sich alle Elektronen eines Atoms in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden.

Orbitalformen

Das Aussehen der Orbitale hängt von der Nebenquantenzahl l sowie von der Magnetquantenzahl m ab:

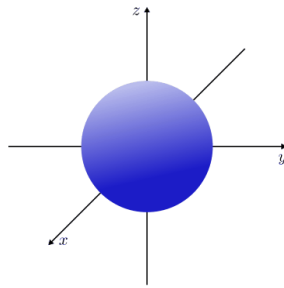


Abb. 214: Raumstruktur des s -Orbitals.

- Orbitale mit der Nebenquantenzahl $l = 0$ haben eine kugelförmige Raumstruktur. Sie werden aus historischen Gründen auch als „ s -Orbitale“ bezeichnet.
- Orbitale mit der Nebenquantenzahl $l = 1$ haben eine hantelförmige Raumstruktur. Sie werden aus historischen Gründen auch als „ p -Orbitale“ bezeichnet. In Abhängigkeit vom Wert der Magnetquantenzahl $m = -1, 0, +1$ ergeben drei Orbitale, die sich in ihrer räumlichen Ausrichtungen unterscheiden.

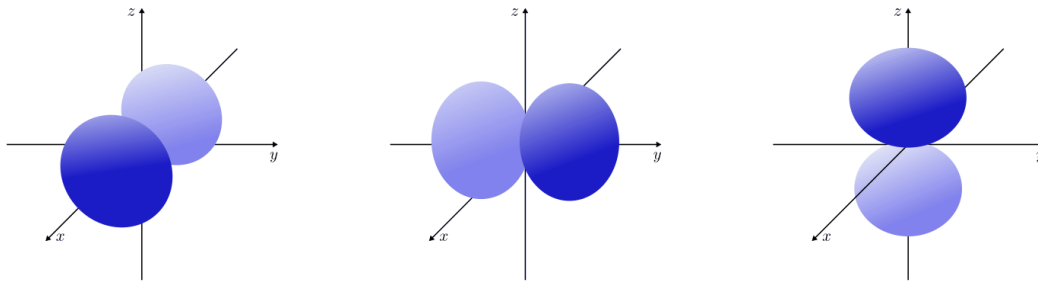


Abb. 215: Raumstruktur der drei p -Orbitale (p_x , p_y und p_z).

- Orbitale mit der Nebenquantenzahl $l = 2$ haben eine rosettenförmige Raumstruktur. Sie werden aus historischen Gründen auch als „ d -Orbitale“ bezeichnet. In Abhängigkeit vom Wert der Magnetquantenzahl $m = -2, -1, 0, +1, +2$ ergeben sich fünf Orbitale, die sich in ihrer räumlichen Ausrichtung und Form unterscheiden.
- Orbitale mit der Nebenquantenzahl $l = 3$ haben ebenfalls eine rosettenförmige, noch weiter untergliederte Raumstruktur. Sie werden aus historischen Gründen auch als „ f -Orbitale“ bezeichnet. In Abhängigkeit vom Wert der Magnetquantenzahl $m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ ergeben sich sieben Orbitale, die sich in ihrer räumlichen Ausrichtung und Form unterscheiden.

Theoretisch wären Atome mit weiteren Orbitalen denkbar. Praktisch hat man bislang jedoch nur Atome beobachten können, die sich mit Hilfe der obigen Orbitale beschreiben lassen.

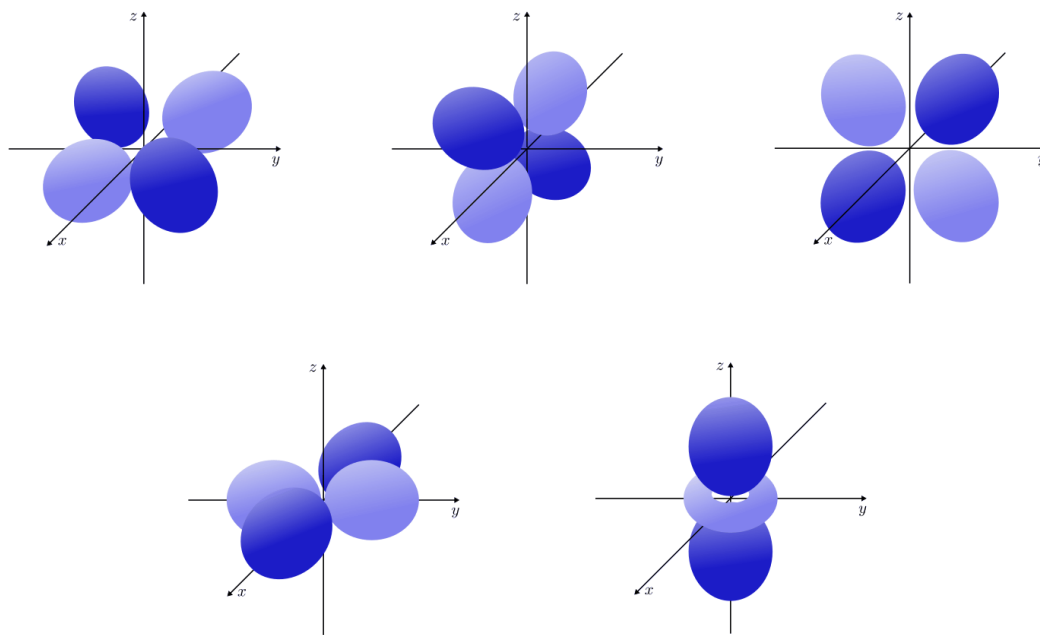


Abb. 216: Raumstruktur der fünf d -Orbitale (d_{xy} , d_{xz} , d_{yz} , $d_{x^2-y^2}$, d_{z^2}).

Das Schalenmodell

Die konkrete Berechnung der Energieniveaus und der resultierenden Atomorbitale erfordert einen hohen mathematischen Aufwand. Viele Phänomene der Physik und Chemie lassen sich allerdings auch gut mit einem vereinfachten „Schalenmodell“ erklären, das einerseits an das Bohrsche Atommodell aufbaut, andererseits um Elemente aus dem Orbitalmodell erweitert ist.

Das Schalenmodell geht von folgender Vorstellung aus:

- Die Elektronen eines Atoms befinden sich auf konzentrischen Schalen um den Atomkern.
- Jede Schale stellt ein bestimmtes Energieniveau dar und kann eine bestimmte Zahl an Elektronen aufnehmen.

Die Hauptquantenzahl n gibt – von innen nach außen gezählt – die Nummer der Schale an. Die maximale Anzahl an Elektronen auf Schale Nummer n ist gleich $2 \cdot n^2$. Im Periodensystem der Elemente entspricht die Schalennummer jeweils einer Periode (Reihe) an Elementen.

Die Orbitalformen, die sich aus der Nebenquantenzahl l ergeben, werden Unterschalen genannt. Sie beinhalten, je nach Typ, 1, 3, 5 oder 7 Orbitale, wodurch die Magnetquantenzahl m Berücksichtigung findet. Jedes Orbital kann seinerseits zwei Elektronen mit unterschiedlichem Spin ($s = \pm\frac{1}{2}$) aufnehmen.

Tab. 26: Elektronenverteilung im Schalenmodell

Nummer der Schale n	Name der Unterschalen	Maximale Anzahl an Elektronen (gesamt)
1	s	2
2	s, p	8
3	s, p, d	18
4	s, p, d, f	32
5	s, p, d, f, g	50
6	s, p, d, f, g, h	72

Hinzu kommende Elektronen füllen die einzelnen Orbitale eines Atoms nach zunehmendem Energieniveau auf. Die Energieniveaus der Schalen, durch die Hauptquantenzahl n bestimmt, spalten sich durch den Einfluss der übrigen Quantenzahlen in entsprechend viele, jeweils nur einmalig vorkommende Energieniveaus auf. Dies führt bei Atomen mit vier oder mehr Schalen dazu, dass die Schalennummer n die Auffüllreihenfolge nicht mehr alleinig bestimmt.

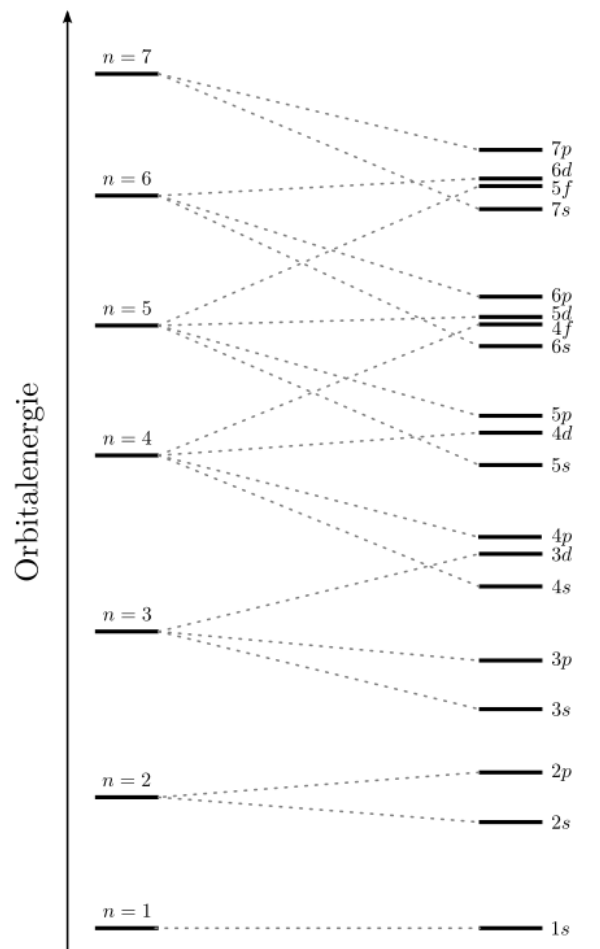


Abb. 217: Orbitalenergie der bislang bekannten Atome.

Beispiel:

- Das $4s$ -Niveau besitzt eine niedrigere Energie als das $3d$ -Niveau. Entsprechend wird bei den ersten beiden Elementen der vierten Periode (Kalium und Calcium) erst das $4s$ -Niveau mit zwei Elektronen (Spin $s = \pm\frac{1}{2}$) aufgefüllt, bevor bei den Elementen Scandium bis Zink die $3d$ -Unterschale besetzt wird.

Die äußerste Schale, deren Besetzung für chemische und elektrische Vorgänge von besonderer Bedeutung ist, wird als „Valenzschale“ bezeichnet. Die sich auf ihr befindenden Elektronen werden „Valenzelektronen“ genannt. Im Periodensystem der Elemente entspricht die Anzahl an Valenzelektronen jeweils einer Gruppe (Spalte) an Elementen:

- Atome, deren energiereichstes Orbital ein s - oder p -Orbital ist, bilden die acht Hauptgruppen.
- Atome, deren energiereichstes Orbital ein d -Orbital ist, werden Nebengruppenelemente genannt. Sie befinden sich im mittleren Teil des Periodensystems.
- Atome, deren energiereichstes Orbital ein f -Orbital ist, werden nach den Elementen Lanthan bzw. Actinium als Lanthanoide bzw. Actinoide bezeichnet. Sie werden im Periodensystem aus Gründen der Übersichtlichkeit meist als zwei separate Zeilen im unteren Bereich „ausgelagert“.

Chemische Bindungen lassen sich somit durch eine insgesamt Optimierung der Energieniveaus aller beteiligter Atome, physikalische Effekte wie Lichtemission und -Absorption durch Sprünge der Elektronen eines Atoms zwischen den verschiedenen Energieniveaus erklären.

Aufbau der Materie

Atome sind die kleinsten Bausteine eines jeden chemischen Stoffes. Sie können nicht weiter zerteilt werden, ohne die charakteristischen Eigenschaften des jeweiligen Stoffes zu verlieren. Ein Atom hat einen Durchmesser in der Größenordnung von $1 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$ (ein „Angström“, benannt nach [Anders Angström](#)).

Alle Atome enthalten einen Atomkern, der fast die gesamte Masse eines Atoms beinhaltet. Er besteht aus Kernbauteilchen („Nukleonen“), also aus positiv geladenen Protonen und gleich schweren, jedoch ungeladenen Neutronen. Umgeben wird der Atomkern von einer nahezu masselosen Hülle aus Elektronen.

Tab. 27: Atombauusteine und ihre Eigenschaften

Elementarteilchen	Zeichen	Ladung	Masse
Elektron	e^-	$q_e = -1 e$	$m_e = 0,000\,55 \text{ u} = 9,109\,38 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Proton	p^+	$q_p = +1 e$	$m_p = 1,007\,28 \text{ u} = 1,672\,62 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron	n^0	$q_n = 0$	$m_n = 1,008\,66 \text{ u} = 1,674\,93 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Mit $1 e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ wird dabei die Elementarladung bezeichnet. Ein Proton beziehungsweise Neutron ist jeweils um ein rund 2000-faches schwerer als ein Elektron; der Durchmesser eines Atomkerns ist zugleich jedoch um ein rund 100 000-faches kleiner als die Elektronenhülle.

Elektronenhülle

Ein Atom im Grundzustand ist nach außen hin elektrisch neutral, es besitzt genauso viele Elektronen in der Atomhülle wie Protonen im Atomkern. Der Aufbau der Elektronenhülle eines Atoms ist für die elektrischen und chemischen Eigenschaften eines Elementes von entscheidender Bedeutung.

Zur strukturellen Beschreibung der Elektronenhülle wird meist das *Schalenmodell* verwendet.

Ein kann ionisiert werden, indem ein Elektron aus seiner Valenzschale in eine darüber liegende, noch unbesetzte Schale angehoben wird. Die für das „Anheben“ des Elektrons (entgegen dem *elektrischen Feld* des Atomkerns) der dazu Ionisierungsenergie nötig.

Bei chemischen Reaktionen findet eine Wechselwirkung zwischen den Elektronenhüllen zweier oder mehrerer Atome statt; die Atomkerne bleiben dabei unverändert.

Atomkern

Atomkerne („Nuklide“) setzen sich aus elektrisch positiv geladenen Protonen und elektrisch neutralen Neutronen zusammen; sie haben einen Durchmesser in der Größenordnung von 10^{-15} m , sie sind also um das rund 100 000-fache kleiner als der Durchmesser der Atomhülle.

Die Nukleonen (Neutronen und Protonen) werden durch die sogenannte starke Wechselwirkung zusammengehalten. Diese anziehende Kraft ist im Bereich der kurzen Distanzen des Atomkerns sehr viel stärker als die abstoßende elektrostatische Kraft, die zwischen den positiv geladenen Protonen wirkt.

Die Anzahl der Protonen eines Atomkerns wird als Ordnungszahl Z bezeichnet, da sie für jedes chemische Element charakteristisch ist. Die Anzahl der Neutronen im Atomkern hingegen kann bei verschiedenen Atomen des gleichen Elements variieren.

Die Summe der Protonen- und Neutronenanzahl wird als Massenzahl A bezeichnet, da sie die Masse eines Atomes bestimmt. Zur Kennzeichnung des Kernaufbaus wird die Massenzahl oben links, die Kernladungszahl Z (Anzahl der Protonen) unten links neben das chemische Symbol geschrieben:

Beispiel:

- Für ein Helium-Atom mit zwei Protonen und zwei Neutronen schreibt man ${}^4_2\text{He}$, denn die Kernladungszahl (Anzahl an Protonen) beträgt $Z = 2$, und die Massenzahl (Anzahl an Prototonen plus Neutronen) beträgt $A = 4$.

- Für ein Kohlenstoff-Atom mit sechs Protonen und sechs Neutronen schreibt man entsprechend ${}^1_6\text{C}$.
- Für ein Uran-Atom mit 92 Protonen und 143 Neutronen schreibt man entsprechend ${}^{235}_{92}\text{U}$.

Wie das letzte Beispiel zeigt, muss in einem Atomkern die Anzahl an Protonen nicht mit der Anzahl an Neutronen übereinstimmen.

Auch für die drei Elementarteilchen Neutron, Proton und Elektron kann die obige Schreibweise verwendet werden:

Neutron: ${}^1_0\text{n}$

Proton: ${}^1_1\text{p}$

Elektron: ${}^0_{-1}\text{e}$

Die Angabe einer „negativen“ Protonenzahl beim Elektron ist hierbei eine alternative Schreibweise für die Angabe der elektrischen Ladung. Allgemein wird bei der Beschreibung von Atomkernen die Ladungsangabe häufig weggelassen, da diese ohnehin stets eine positive Ladung tragen, die ihrer Protonenzahl entspricht.

Isotope

Chemische Elemente werden durch die Anzahl an Protonen im Atomkern charakterisiert; die Anzahl an Neutronen hingegen kann bei verschiedenen Atomen des gleichen Elements unterschiedlich sein. Atome, die aufgrund der unterschiedlichen Anzahl an Neutronen im Atomkern eine unterschiedliche Massenzahl besitzen, werden als Isotope bezeichnet.

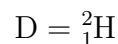
Beispiele:

- Für das chemische Element Wasserstoff sind folgende drei Isotope bekannt:
 - Bei „normalem“ Wasserstoff besteht der Atomkern aus einem einzelnen Proton:



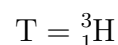
Dieses Isotop macht mit durchschnittlich 99,986% den größten Anteil aller Wasserstoff-Atome aus.

- Bei „schwerem“ Wasserstoff (Deuterium, Kurzform D) besteht der Atomkern aus einem Proton und einem Neutron:



Deuterium macht mit durchschnittlich 0,014% einen sehr kleinen Anteil aller Wasserstoff-Atome aus.

- Bei „sehr schwerem“ Wasserstoff (Tritium, Kurzform T) besteht der Atomkern aus einem Proton und zwei Neutronen:



Tritium ist radioaktiv; in der Natur tritt es nur in kleinsten Mengen auf.

- Für das chemische Element Sauerstoff sind ebenfalls drei Isotope bekannt. Es besteht durchschnittlich zu 99,762% aus ^{16}O , zu 0,038% aus ^{17}O und zu 0,2% aus ^{18}O ; alle Isotope sind „stabil“ (nicht radioaktiv).

Da für jedes chemische Element die Kernladungszahl Z eindeutig festgelegt ist, werden bei der Bezeichnung von Isotopen häufig nur die unterschiedlichen Massenzahlen neben das Symbol des jeweiligen Elements geschrieben, also beispielsweise ^{16}O oder O–16 für das Sauerstoff-Isotop mit insgesamt 16 Nukleonen.

Abgesehen vom Massenunterschied besitzen Isotope weitgehend gleiche physikalische und chemische Eigenschaften.

Massendefekt

Die Masse eines Atomes entspricht nicht genau der Summe der Massen der Elementarteilchen, sondern ist stets etwas geringer. Dieser Masseverlust, der bei der Zusammenlagerung der Bausteine auftritt, wird als Massendefekt bezeichnet.

Ursache für den Massendefekt ist die bei der Zusammenlagerung der Elementarteilchen frei werdende Bindungsenergie. Nach [Albert Einsteins](#) berühmter Formel – der Äquivalenz von Masse und Energie – entspricht die Bindungsenergie E dem Differenzbetrag m der Massen der Elementarbausteine und des gesamten Atoms, multipliziert mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s:

$$E = m \cdot c^2$$

Bereits ein winziger Massendefekt entspricht einer gewaltigen Menge an Energie.

Beispiel:

- Das Isotop ^{12}C besteht aus je sechs Protonen, Neutronen und Elektronen. Rechnerisch würde die Summe der Massen aller Atombauusteine folgenden Wert ergeben:

$$6 \cdot 1,67262 \cdot 10^{-24} \text{ g} + 6 \cdot 1,67493 \cdot 10^{-24} \text{ g} + 6 \cdot 0,91094 \cdot 10^{-27} \text{ g} = 2,009 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

Die tatsächliche Masse des Isotops beträgt allerdings nur $1,9924 \cdot 10^{-23}$ g. Die Differenz von $m = 1,66 \cdot 10^{-25}$ g wird bei der Bildung aus den Kernbausteinen in Energie umgewandelt. Diese Masse entspricht einer Energie von $1,494 \cdot 10^{-11}$ J je Atom beziehungsweise $7,5 \cdot 10^{11}$ J je Gramm Kohlenstoff. Dies entspricht der 22-Millionen-fachen Energiemenge, die bei der Verbrennung von einem Gramm Kohle freigesetzt wird.

Massendefekte treten nur bei Kernreaktionen auf; bei chemischen Reaktionen ist lediglich das Zusammenwirken der äußeren Elektronen von Bedeutung.

Radioaktivität

Als Radioaktivität bezeichnet man die Eigenschaft von bestimmten Nukliden, sich ohne äußere Einwirkung in ein neues Nuklid (oder mehrere neue Nuklide) umzuwandeln; dabei wird Strahlung freigesetzt.

Stabilität von Atomkernen

Große Atomkerne mit mehr Nukleonen haben mehr Teilchen im Kerninneren als kleine Kerne, die fast nur Außen-Nukleonen aufweisen. Damit haben die Nukleonen großer Kerne durchschnittlich auch mehr Nachbar-Nukleonen, zwischen denen anziehende Kernkräfte wirken. Dadurch nimmt zunächst mit einer steigenden Anzahl an Nukleonen auch die Bindungsenergie je Nukleon zu, wie in der folgenden Abbildung zu sehen ist:

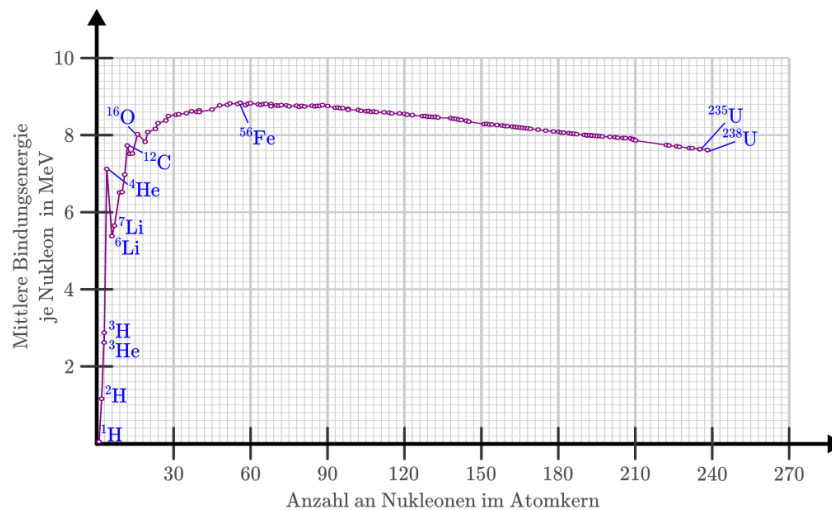


Abb. 218: Mittlere Bindungsenergie je Nukleon in MeV.

Die am Anfang der Bindungsenergie-Kurve deutlich vorhandenen Zacken deuten darauf hin, dass auch der Atomkern eine „Schalenstruktur“ hat: Kerne mit abgeschlossenen Schalen haben besonders hohe Bindungsenergien.

Mit einer steigenden Anzahl an Protonen nehmen allerdings auch die abstoßenden *elektrostatischen Kräfte* im Kern zu; diese sind nicht auf die jeweils unmittelbaren Nachbar-Nukleonen begrenzt, sondern nehmen nur langsam gemäß $F_C \propto \frac{1}{r^2}$ ab. Ab dem Element Eisen (Fe, Kernladungszahl 26) nimmt die Bindungsenergie je Nukleon, und damit auch die Stabilität des Atomkerns ab. Ab dem Element Blei (Pb, Kernladungszahl 82) führt dies schließlich dazu, dass die Kerne instabil werden.¹

Haben bei einer Kernfusion zweier leichter Atomkerne die ursprünglichen Kerne in Summe eine höhere Bindungsenergie als der entstehende Kern, so wird bei der Fusion – ähnlich wie bei einer chemischen Reaktion – die Differenz beider Energiemengen frei; die Freisetzung der Energie bewirkt gemäß der Einsteinschen Formel $E = m \cdot c^2$ einen *Massendefekt*, so dass der bei einer Fusion entstehende Kern etwas weniger Masse besitzt als die beiden ursprünglichen Atomkerne zusammen.

¹ Die elektrostatische Abstoßung der Protonen ist ebenfalls der Grund dafür, dass schwere Atomkerne mehr Neutronen als Protonen besitzen; diese schirmen die abstoßenden Kräfte zum Teil ab.

Arten radioaktiver Strahlung

Die wichtigsten Arten von radioaktiver Strahlung sowie die dafür charakteristischen Vorgänge sollen in den folgenden Abschnitten näher beschrieben werden.

Alpha-Strahlung

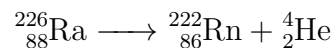
Bei einem so genannten Alpha-Zerfall emittiert der ursprüngliche Atomkern ein so genanntes „Alpha-Teilchen“, welches dem Kern eines Helium-Atoms (${}^4_2\text{He}$) entspricht. Ein Alpha-Zerfall lässt sich somit allgemein folgendermaßen beschreiben:



Bei einem Alpha-Zerfall sinkt also die Kernladungszahl um 2, die Massezahl um 4.

Beispiel:

- Der Kern eines Ra–226-Atoms (Radium) hat 88 Protonen und 138 Neutronen, insgesamt also 226 Nukleonen. Der Kern ist instabil, er zerfällt durch einen Alpha-Zerfall. Dabei entsteht ein Radon-Kern und ein Alpha-Teilchen:



Das beim Zerfall entstehende Radon Rn–222 ist ebenfalls instabil und zerfällt weiter.

Die Geschwindigkeit eines emittierten Alpha-Teilchens beträgt rund $15\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$; die Summe aller bei einem Zerfallsprozess emittierten Alpha-Teilchen nennt man Alpha-Strahlen.

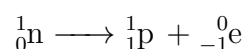
Für die Alpha-Strahlung wird bisweilen auch α -Strahlung geschrieben.

Beta-Strahlung

Der Begriff „Beta-Zerfall“ ist eine Sammelbezeichnung für drei mögliche radioaktive Zerfallsarten: Dem „normalen“ Beta-Minus-Zerfall, dem „Beta-Plus“-Zerfall sowie dem „Elektronen-Einfang“. Alle drei Arten werden im Folgenden kurz vorgestellt.

Beta-Minus-Strahlung

Bei einem Beta-Minus-Zerfall (oder kurz: Beta-Zerfall) wird im Kern des ursprünglichen Atoms ein Neutron ${}^1_0\text{n}$ in ein Proton ${}^1_1\text{p}$ und ein Elektron ${}^0_{-1}\text{e}$ umgewandelt:



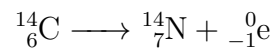
Das Proton verbleibt dabei im Kern, das Elektron wird als „Beta-Teilchen“ emittiert. Ein Beta-Minus-Zerfall lässt sich allgemein folgendermaßen beschreiben:



Bei einem Beta-Minus-Zerfall erhöht sich also die Kernladungszahl um 1, die Massezahl bleibt unverändert.

Beispiel:

- Der Kern eines C–14-Atoms (Kohlenstoff) hat 6 Protonen und 8 Neutronen, insgesamt also 14 Nukleonen. Der Kern ist instabil, er zerfällt durch einen Beta-Minus-Zerfall. Dabei entsteht ein Stickstoff-Kern und ein Beta-Teilchen:



Der beim Zerfall entstehende Stickstoff N–14 ist stabil.

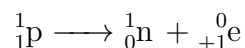
Die Geschwindigkeit eines emittierten Beta-Teilchens kann zwischen Null und beinahe Lichtgeschwindigkeit betragen; die Summe aller bei einem Zerfallsprozess emittierten Beta-Teilchen nennt man Beta-Minus-Strahlen.

Für die Beta-Minus-Strahlung wird bisweilen auch β^- -Strahlung geschrieben.

Beta-Plus-Strahlung

Bei künstlich hergestellten Radionukliden kann eine Strahlung auftreten, bei der Teilchen emittiert werden, deren Masse mit der eines Elektrons übereinstimmt, deren elektrische Ladung jedoch positiv ist. Derartige Teilchen werden „Positronen“ oder β^+ -Teilchen genannt, die entsprechende Strahlung als „Positronstrahlung“ oder β^+ -Strahlung bezeichnet.

Bei einem Beta-Plus-Zerfall wird im Kern des ursprünglichen Atoms ein Proton in ein Neutron und ein Positron umgewandelt:



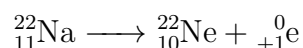
Das Neutron verbleibt dabei im Kern, das Positron wird als „Beta-Plus-Teilchen“ emittiert. Ein Beta-Plus-Zerfall lässt sich also allgemein folgendermaßen beschreiben:



Bei einem Beta-Plus-Zerfall verringert sich also die Kernladungszahl um 1, die Massezahl bleibt unverändert.

Beispiel:

- Der Kern eines Na–22-Atoms (Natrium) hat 11 Protonen und 11 Neutronen, insgesamt also 22 Nukleonen. Der Kern ist instabil, er zerfällt durch einen Beta-Plus-Zerfall. Dabei entsteht ein Neon-Kern und ein Positron:

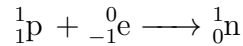


Das beim Zerfall entstehende Neon Ne–22 ist stabil.

Für die Beta-Plus-Strahlung wird bisweilen auch β^+ -Strahlung geschrieben.

Elektronen-Einfang

Sowohl bei natürlich vorkommenden wie auch bei künstlich hergestellten Radionukliden ist eine weitere Umwandlungsart möglich: Fängt der Kern ein Elektron von der innersten Schale der Elektronenhülle ein, so kann sich im Kern ein Proton gemeinsam mit diesem Elektron in ein Neutron umwandeln:



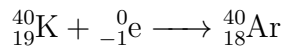
Ein Elektronen-Einfang lässt sich also allgemein folgendermaßen beschreiben:



Bei einem Elektronen-Einfang verringert sich also die Kernladungszahl um 1, die Massenzahl bleibt unverändert. Ein Elektronen-Einfang führt also zum gleichen Ergebnis wie die Emission eines Positrons.

Beispiel:

- Der Kern eines K-40-Atoms (Kalium) hat 19 Protonen und 21 Neutronen, insgesamt also 40 Nukleonen. Der Kern ist instabil, er kann durch einen Elektronen-Einfang zerfallen (aber auch durch einen β^- - oder β^+ -Zerfall). Beim Elektronen-Einfang entsteht ein Argon-Kern:



Das beim Zerfall entstehende Argon Ar-40 ist stabil.

Der Platz in der innersten Elektronenschale, der beim Elektronen-Einfang frei wird, wird durch ein Elektron aus dem äußeren Teil der Elektronenhülle des jeweiligen Atoms wieder aufgefüllt. Dabei entsteht eine für den jeweiligen Zerfall charakteristische Gamma-Strahlung.

Gamma-Strahlung

Gammastrahlung entsteht, wenn Atomkerne energiereiche Lichtquanten (so genannte „Gamma-Quanten“) aussenden; dabei ändert sich weder die Massenzahl A noch die Kernladungszahl Z des Atomkerns. Gammastrahlen entstehen vielmehr durch einen Übergang eines Atomkerns von einem energetisch angeregten Zustand in einen energetisch niedrigeren Zustand. So entsteht bei Alpha- und Beta-Zerfällen häufig zusätzlich Gamma-Strahlung.

Nachweis radioaktiver Strahlung

Radioaktive Strahlen können auf mehrere Arten nachgewiesen werden:

Entladungsdosimeter

Radioaktive Strahlen können Luft ionisieren, indem sie Elektronen aus den Luftmolekülen herausschlagen. Wird die Luft zwischen zwei geladenen Kondensator-Platten ionisiert, so kann sich der Kondensator langsam entladen. Je stärker die Strahlung ist, desto stärker ist auch die Ionisation und somit die Entladung des Kondensators. Entladungsdosimeter reagieren alle oben genannten Strahlungsarten.

Filmdosimeter

Bei einem Filmdosimeter wird als Nachweisprinzip genutzt, dass radioaktive Strahlung spezielle Filme belichten („schwärzen“) kann. Solche Filmdosimeter können beispielsweise als Plaketten an Laborkitteln angebracht werden; sie können bei der Auswertung zwar die Menge der insgesamt aufgetroffenen Strahlung aufzeigen, geben jedoch keine genaue Auskunft über die Art der auftreffenden Strahlung oder über den zeitlichen Verlauf der Einwirkung.

Nebelkammer

Im Jahr 1911 bestrahlte [Charles Wilson](#) im Rahmen von meteorologischen Untersuchungen einen mit unsichtbarem Wasserdampf übersättigten Raum mit Alpha- und Betastrahlen. Er stellte fest, dass diese die auf ihrem Weg liegenden Luftmoleküle ionisieren, und dabei als Kondensationskerne wirken: An den elektrisch geladenen Luftteilchen lagern sich sichtbare Wasser-Tröpfchen an, so dass die Bahn der Alpha- und Beta-Teilchen in Form von „Kondensstreifen“ erkennbar wird.

Geigerzähler

Im Jahr 1928 entwickelten [Hans Geiger](#) und [Walther Müller](#) eine Apparatur, welche die ionisierende Wirkung von Gammastrahlen als akustische Geräusche hörbar machte. Ein solches Geiger-Müller-Zählrohr („Geigerzähler“) besteht aus einem Metallrohr, in dem ein dünner Metallfaden gespannt ist. Der Metallfaden ist elektrisch vom Metallrohr isoliert; zwischen dem Draht und der Rohrwand liegt eine Spannung von rund 500 V an. Das Rohr ist mit einem sehr dünnen Fenster aus Glimmer verschlossen, durch das Strahlung ins Innere des Rohres gelangen kann.

Trifft ein Gamma-Quant im Inneren des Rohres auf ein Luftteilchen, so wird dieses durch das Herausschlagen eines Elektrons zu einem positiven Ion. Durch das elektrische Feld wird das entstehende positive Ion derart stark beschleunigt, dass es durch Stöße mit anderen Luftteilchen weitere freie Ladungsträger erzeugt („Stoßionisation“). Die Luft wird also dadurch leitend, und es fließt kurzzeitig ein Strom über den Widerstand R . Der kurzzeitige Stromfluss kann bei Verwendung eines geeigneten Verstärkers mittels eines Lautsprechers als „Knacken“ hörbar gemacht werden.

Durch den Stromfluss nimmt jedoch die Spannung am Zählrohr um den Betrag $U_R = R \cdot I$ ab. Das Gas im Zählrohr wird in Folge dessen wieder zu einem Isolator; der Prozess kann erneut beginnen.

Szintillationszähler

Bei einem Szintillationszähler trifft die Strahlung auf eine Leuchtstoff-Scheibe. Jedes Strahlungsquant erzeugt dort einen Lichtblitz. Jeder Lichtblitz wird genutzt, um mittels einer Foto-Diode einen kurzzeitigen Stromfluss zu erzeugen, der wiederum über eine entsprechende Verstärker-Schaltung von einer Zählautomatik ausgewertet wird.

Halbwertszeit und Aktivität

Für einen einzelnen Atomkern lässt sich keine Aussage darüber treffen, zu welchem Zeitpunkt er zerfallen wird: Er kann in der nächsten Sekunde oder erst in Tausenden von Jahren zerfallen.

Für eine große Anzahl an Atomkernen hingegen kann man eine Wahrscheinlichkeits-Aussage über den Ablauf des Zerfalls treffen. Die Zeit, nach der die Hälfte einer bestimmten Anzahl an Atomkernen zerfallen ist, wird Halbwertszeit genannt. Für jedes Radionuklid ist diese Zeit eine charakteristische Größe; je nach Element reichen die Halbwertszeiten von nur wenigen Sekunden bis hin zu Millionen von Jahren.

Element	Symbol	Zerfallsart	Halbwertszeit
Polonium-214	${}^{214}_{84}\text{Po}$	α	$1,64 \cdot 10^{-4}$ s
Radon-220	${}^{220}_{86}\text{Rn}$	α	55,6 s
Polonium-218	${}^{218}_{84}\text{Po}$	α, β^-	3,05 min
Wismut-214	${}^{214}_{83}\text{Bi}$	β^-, α	19,9 min
Blei-214	${}^{214}_{82}\text{Pb}$	β^-	26,8 min
Blei-209	${}^{209}_{82}\text{Pb}$	β^-	3,25 h
Radon-222	${}^{222}_{86}\text{Rn}$	α	3,83 d
Radium-223	${}^{223}_{88}\text{Ra}$	α	11,43 d
Radium-225	${}^{225}_{88}\text{Ra}$	β^-	14,8 d
Thorium-234	${}^{234}_{90}\text{Th}$	β^-	24,1 d
Polonium-210	${}^{210}_{84}\text{Po}$	α	138,4 d
Wasserstoff-3	${}^3_1\text{H}$	β^-	12,32 a
Blei-210	${}^{210}_{82}\text{Pb}$	β^-, α	22,3 a
Strontium-90	${}^{90}_{38}\text{Sr}$	β^-	28,5 a
Radium-226	${}^{226}_{88}\text{Ra}$	α	$1,6 \cdot 10^3$ a
Kohlenstoff-14	${}^{14}_6\text{C}$	β^-	$5,73 \cdot 10^3$ a
Uran-235	${}^{235}_{92}\text{U}$	α	$7,04 \cdot 10^8$ a
Kalium-40	${}^{40}_{19}\text{K}$	β^-	$1,28 \cdot 10^9$ a
Uran-238	${}^{238}_{92}\text{U}$	α	$4,47 \cdot 10^9$ a
Thorium-232	${}^{232}_{90}\text{Th}$	α	$1,41 \cdot 10^{10}$ a

Je Halbwertszeit zerfällt die Hälfte der jeweils zu Beginn noch vorhandenen Atomkerne. Die Anzahl der radioaktiven Kerne nimmt also exponentiell (zunächst schnell, dann immer langsamer) ab. Wird die Anzahl der zu Beginn eines Zerfalls vorhandenen Radionuklide mit N_0 und die Halbwertszeit mit $T_{1/2}$ bezeichnet, so kann die Anzahl $N(t)$ an zur Zeit t noch vorhandenen Atomkernen nach folgendem „Zerfallsgesetz“ berechnet werden:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad (187)$$

Nach vier Halbwertszeiten sind die Atome eines Radionuklid zu mehr als 90%, nach zehn Halbwertszeiten zu mehr als 99,9% zerfallen.

Definition:

Als Aktivität A bezeichnet man die Anzahl Δn an Kernumwandlungen, die innerhalb einer bestimmten Zeitspanne Δt stattfinden:

$$A = \frac{\Delta n}{\Delta t} \quad (188)$$

Einheit:

Die Einheit der Aktivität ist nach [Henry Becquerel](#) benannt. Nach der obigen Gleichung ergibt sich für 1 Becquerel (1 Bq) folgender Zusammenhang:²

$$1 \text{ Bq} = 1 \frac{1}{\text{s}}$$

Auf natürliche Weise treten in geschlossenen Räumen je Kubikmeter Luft rund 50 Zerfälle je Sekunde auf, die Aktivität beträgt somit je Kubikmeter rund 50 Bq. In einem Gramm „natürlichem“ Uran hingegen, wie es im Bergbau abgebaut werden kann, treten rund $2,54 \cdot 10^4$ Zerfälle je Sekunde auf.

Ionendosis, Energiedosis und Äquivalentdosis

Die durch Strahlung transportierte Energie ist sehr viel kleiner als 1 Joule; man verwendet daher als Energie-Einheit das so genannte Elektronenvolt (eV). Damit bezeichnet man diejenige Energiemenge, die ein Elektron beim Durchlaufen einer Spannung von 1 V aufnimmt. Für die Umrechnung gilt:

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Gasatome beziehungsweise Gasmoleküle haben beispielsweise bei Zimmertemperatur eine Bewegungsenergie von etwa 0,04 eV.

² In alten Büchern wurde zudem häufig die nach [Piere und Marie Curie](#) benannte Einheit Curie (Ci) verwendet. Als Umrechnung gilt $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$; diese Einheit sollte jedoch nicht weiter verwendet werden, um die Menge an üblichen Einheiten möglichst gering zu halten.

Um bei der Ionisierung eines Wasserstoff-Atoms (H) das Elektron aus der Atomhülle abzutrennen, ist eine Energiemenge von 13,60 eV erforderlich; um ein Elektron bei einem Wasserstoff-Molekül (H₂) abzutrennen, ist eine Energiemenge von 15,40 eV nötig. Diese so genannte „Ionisierungsenergie“ ist bei verschiedenen Elementen für die einzelnen Elektronen der Atomhülle unterschiedlich.

Die Ionisation von Atomen ist das wichtigste Maß für die Intensität von radioaktiver Strahlung, denn diese kann nur gemessen werden, wenn Wechselwirkungen der Strahlung mit Materie stattfinden.

Definition:

Die sogenannte Ionendosis J_s gibt an, wie groß die durch Ionisierung erzeugte Ladungsmenge ΔQ im Verhältnis zur Masse Δm des durchstrahlten Materials ist:

$$J_s = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$$

Einheit:

Die Basis-Einheit der elektrischen Ladung ist das *Coulomb*; damit ergibt sich nach der obigen Gleichung für die Einheit der Ionendosis:

$$[J_s] = \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

... to be continued ...

Experimente, Übungsaufgaben und Lösungen

Experimente

Eine Vorlage eines Versuch-Protokolls kann auf der [Grund-Wissen-Webseite](#) als PDF-Datei heruntergeladen werden.

Experimente zur Mechanik

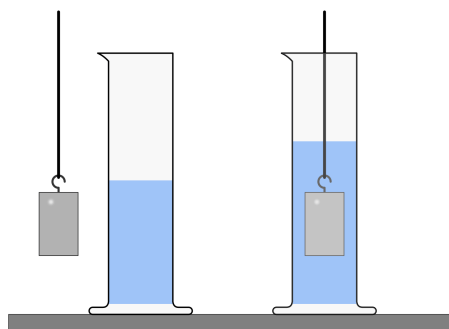
Körpereigenschaften

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Körpereigenschaften*.

Volumenbestimmung im Standzylinder

Material:

- Ein Standzylinder (500 ml)
- Ein Filzstift
- Verschiedene, regelmäßig geformte Probekörper (z.B. Quader aus Aluminium)
- Wasser
- Öl und/oder Glycerin (optional)



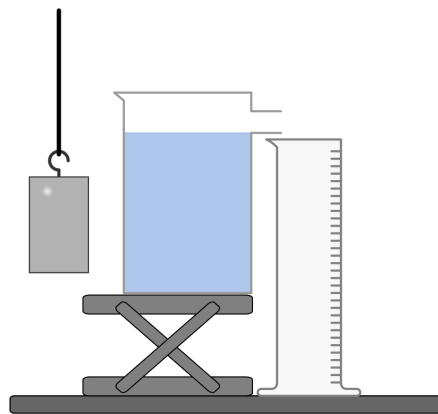
Durchführung:

- Fülle einen Standzylinder etwa zur Hälfte mit Wasser und markiere den Füllstand mit einem Filzstift.
 - Tauche einen Quader, Würfel, oder einen anderen regelmäßig geformten Körper in das Wasser ein. Beobachte dabei, wie sich der Füllstand im Standzylinder verändert.
 - Berechne das Volumen des eingetauchten Körpers mit Hilfe der passenden geometrischen Formel. Vergleiche den berechneten Wert mit der Volumenmenge, um die der Standzylinder nun weiter gefüllt ist.
 - Wiederhole das Experiment mit verschiedenen Flüssigkeiten. Was stellst Du fest?
-

Dichtebestimmung nach Archimedes

Material:

- | | |
|--|--|
| • Ein Überlaufgefäß | • Eine Laborwaage |
| • Ein kleiner Labortisch (höhenverstellbar) oder eine ähnliche Unterlage | • Ein Handtuch |
| • Ein Messzylinder (100 ml) | • Wasser |
| • Ein Auffangbecken (z.B. Kunststoffschüssel) | • Mehrere kleine Probekörper aus verschiedenen Materialien |
| | • Taschenrechner und Dichtetabelle |



Durchführung:

- Stelle ein Überlaufgefäß auf einen Labortisch oder eine ähnliche Unterlage, so dass die Überlauf-Öffnung knapp über den Messzylinder hinaus ragt. Fülle das Überlaufgefäß dann randvoll mit Wasser.
- Entleere gegebenenfalls den Messzylinder. Versenke dann einen Probekörper im Überlaufgefäß und notiere, wie viel Wasser dabei in den Messzylinder ausläuft.
- Trockne den Probekörper ab und bestimme seine Masse mit Hilfe einer (möglichst genauen) Laborwaage. Notiere den Wert ebenfalls in einer Messtabelle.
- Berechne das Verhältnis $\frac{m}{V}$ aus der Masse m des Probekörpers und dem Volumen V des ausgelaufenen Wassers. Kannst den erhaltenen Wert in der Dichtetabelle wiederfinden? Um welches Material handelt es sich?

- Wiederhole das Experiment mit unterschiedlichen Materialproben.
-

Kinematik

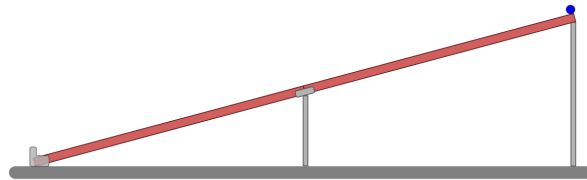
Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Bewegungen mit konstanter Beschleunigung*.

Kugeln auf der Murmelbahn

Material:

- Zwei Holzleisten (je 2 m) mit eingefräster Rille und Steckverbindung
- Verschieden schwere, ungefähr gleich große Kugeln (Holz, Glas, Stahl, Blei, Kunststoff)
- Auffang-Box
- Stoppuhr
- Messtabelle



Durchführung:

- Verbinde beide Holzleisten mit dem Steckverbinder. Baue die Murmelbahn mittels geeigneter Unterlagen so auf, dass sie leicht schräg verläuft (ca. 30°) und keinen Knick aufweist. Positioniere die Auffang-Box am unteren Ende der Murmelbahn.
- Lasse eine Murmel die ganze Strecke der Murmelbahn hinunter rollen. Stoppe die dafür benötigte Zeit t und notiere den Messwert in der Tabelle.
- Wiederhole das Experiment mit unterschiedlich schweren Kugeln. Notiere die jeweils benötigten Zeiten ebenfalls in der Messtabelle.
- Wiederhole das Experiment, indem du die Kugeln aus halber Höhe bzw. aus einem Viertel der Höhe starten lässt.
- Vergleiche die Zeiten miteinander, welche die Kugeln zum Durchlaufen der jeweiligen Streckenlängen benötigt haben. Was stellst Du dabei fest?

- Lockere die Steckverbindung. Baue die Murmelbahn durch geeignete Unterlagen so auf, dass du einen „Knick“ in der Mitte erzeugen kannst. Wann ist die Kugel schneller: Wenn sie das steile Teilstück vor dem flachen, oder wenn sie das flache Teilstück vor dem steilen durchläuft?
-

Kugeln im freien Fall

Material:

- Eine Holzkugel
- Eine Stahlkugel mit gleichem Radius
- Ein Bleistift

Durchführung:

- Lege die beiden gleich großen, aber unterschiedlich schweren Kugeln an den Rand einer Tischplatte und halte sie leicht fest, indem Du mit einem Finger auf sie drückst.
 - Bewege mit der anderen Hand den Bleistift an die Kugeln heran, so dass der Bleistift parallel zur Tischkante ausgerichtet ist.
 - Schiebe mit Hilfe des Bleistifts beide Kugeln möglichst gleichzeitig von der Kante. Achte dabei darauf, ob eine der beiden Kugeln zuerst unten ankommt. Hörst Du einen gemeinsamen oder zwei nacheinander folgende Aufprall-Geräusche?
 - Wiederhole den Versuch mehrfach und achte dabei darauf, dass jeweils beide Kugeln möglichst gleichzeitig von der Tischkante starten. Was stellst Du fest?
-

Dynamik

Mechanische Kräfte

Das folgende Experiment bezieht sich auf den Abschnitt *Mechanische Kräfte*.

Kraft und Verformung

Material:

- Eine Sperrholz-Platte (4 bis 6 mm dick)
- Zwei Holzklötze (6×6 oder 8×8 cm)
- Verschiedene Gewichte

Durchführung:

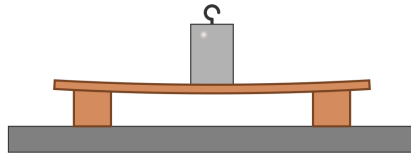


Abb. 219: Verformung einer Holzplatte durch die einwirkende Gewichtskraft.

- Lege eine dünne Holzplatte auf zwei auseinander liegende Holzklötze. Stelle dann mitten auf die Holzplatte ein Gewicht. Kannst Du erkennen, wie sich die Platte durch die Gewichtskraft des Probekörpers verformt?
- Nimm das Gewicht herunter und versuche die Platte ebenso zu verformen, indem Du mit der Hand darauf drückst. Übt die Holzplatte dabei ebenfalls einen Druck auf Dich aus?

Zusammenwirken mehrerer Kräfte

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Zusammenwirken mehrerer Kräfte*.

Der Team-Turmbau

Material: (für 3 bis 6 Personen)

- 6 Holzklötze (8x8 cm breit, ca. 25 cm hoch) mit vorgefertigten Aussparungen
- 6 Seilstücke (ca. 1 m Länge, ca. 6 mm Durchmesser)
- 1 Seilstücke (0,5 m Länge, ca. 6 mm Durchmesser)
- 1 Scheibe mit einer zentrierten Bohrung (8mm) und 6-12 weiteren regelmäßig angebrachten Bohrungen im Außenbereich der Scheibe, ca. 1 cm vom Rand entfernt.

Durchführung:

- Verteile die Holzklötze stehend auf dem Boden.
- Befestige die sechs gleichlangen Seilstücke an der Scheibe mit den Bohrungen.
- Forme das kürzere Seilstück zu einer Schlinge und befestige die Enden mittels eines dicken Knotens an der inneren Bohrung der Scheibe.
- Stelle gemeinsam mit Deinen Teampartnern die Holzklötze nur durch gemeinsames Ziehen an den Seilenden aufeinander.

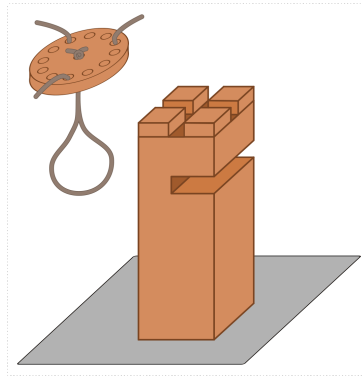


Abb. 220: Holzklotz und Halterung für den Team-Turmbau.

Kraftmessung

Material:

- Vier Federkraftmesser (10 N)
- Holzklotz mit großer Bohrung
- Schraubzwinde
- Drei Hakenschrauben
- Ein dreieckiges Metallstück mit drei Bohrungen entlang einer Kante und einer Bohrung an der gegenüberliegenden Spitze (z.B. aus einem Metallbau-Kasten)

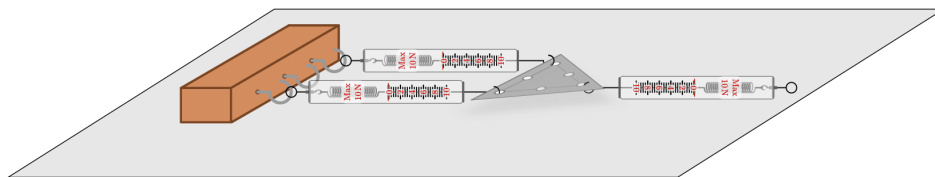


Abb. 221: Kraftmessung mit Federkraftmessern

Durchführung:

- Drehe die drei Hakenschrauben in einer Reihe in den Holzklotz. Befestige ihn mittels einer Schraubzwinde am Rand einer Tischplatte.
- Hänge einen Federkraftmesser an der mittleren Hakenschraube ein. Welche Kraft zeigt er an, wenn du mit einem anderen Federkraftmesser mit einer Kraft von 5 N an ihm ziehst?
- Befestige zwei Federkraftmesser an den beiden äußeren Hakenschrauben und hänge das dreieckige Metall an den beiden Eck-Bohrungen ein. Welche Kraft zeigen die beiden Kraftmesser an, wenn Du mit 10 N an der anderen Seite des Metallblechs ziehst? Welche Gesetzmäßigkeit kannst Du darin erkennen?
- Überprüfe Deine Vermutung, indem Du drei Kraftmesser an den Hakenschrauben im Holzklotz einhängst, das Metallstück an den drei in Reihe liegenden Bohrungen einhängst und wiederum mit 10 N an der anderen Seite des Metalls ziehst. Was stellst Du fest?

Arten mechanischer Kräfte

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Arten mechanischer Kräfte*.

Verformung einer Schraubenfeder

Dieses klassische Experiment zum „Hookeschen Gesetz“ zeigt, wie Federkraftmesser funktionieren.

Material:

- Eine weiche bis mittelharte Schraubenfeder
- Verschieden schwere Haken-Gewichte ($3 \times 10 \text{ g}$, $1 \times 20 \text{ g}$)
- Stativmaterial (ein Stativfuß, je eine lange und eine kurze Stativstange, zwei Quermuffen)

Durchführung:

- Hänge eine Schraubenfeder an der Querstange eines Stativs auf und befestige die 10- und 20 g-Gewichte an der Schraubenfeder. Markiere (beispielsweise mit Hilfe einer weiteren Quermuffe und eines Stiftes) den Punkt, bis zu dem die Feder auseinander gezogen wird. Haben alle Teilkräfte die gleiche Richtung und die gleiche Wirkungslinie?
 - Was passiert, wenn du anstelle der einzelnen Haken-Gewichte einen Probekörper der Masse 50 g anhängst?
 - Ändert sich an der Dehnung der Feder etwas, wenn Du die Körper nicht direkt, sondern über einen dünnen Faden an der Feder befestigst?
-

Bestimmung der Federkonstante einer Schraubenfeder

Dieses Experiment ist ein Beispiel dafür, welche Bedeutung lineare Zusammenhänge in der Mechanik haben und wie sie sich tabellarisch oder als Diagramm darstellen lassen.

Material:

- Eine oder mehrere mittelharte Schraubenfeder(n)
- Zwei oder mehrere Gewichte der Masse 100 g
- Stativmaterial (ein Stativfuß, je eine lange und eine kurze Stativstange, zwei Quermuffen)
- Ein Lineal

Durchführung:

- Hänge die Schraubenfeder an der Querstange eines Stativs auf und miss die Länge der unbelasteten Schraubenfeder. Befestige ein 100 g-Gewicht an der Schraubenfeder und miss die Länge der gedehnten Feder.
-

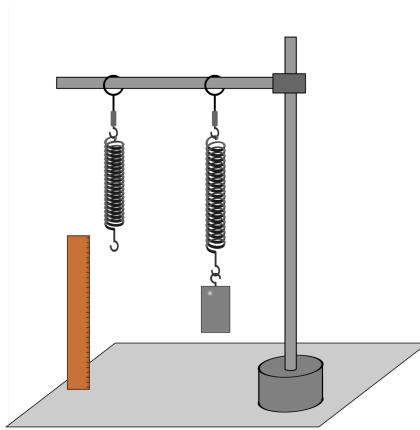


Abb. 222: Experimentelle Anordnung zum Hooke'schen Gesetz.

- Berechne die Federkonstante k , indem Du die Gewichtskraft ($\approx 1\text{ N}$) des Probekörpers durch die Längenänderung der Feder teilst.
- Bleibt das Verhältnis von Gewichtskraft und Längenänderung erhalten, wenn Du weitere Gewichte an der Schraubenfeder befestigst? Notiere dazu jeweils die Gewichtskraft der angebrachten Probekörper sowie die Längenänderung der Schraubenfeder in einer Tabelle.
- Optional: Wiederhole das Experiment mit einer weicheren oder härteren Feder. Fertige ein Diagramm aus den tabellarischen Messwerten an. Welchen Zusammenhang kannst Du erkennen?

Kugel in einer Modell-Zentrifuge

Mit diesem Experiment wird das Kräftegleichgewicht aus Hangabtriebskraft und Zentripetalkraft bei einer Modell-Zentrifuge schön veranschaulicht.

Vorbereitung:

- Säge von einer Dachlatte ein 20 cm langes Stück ab und bringe eine exakt mittige Bohrung mit einem 10 mm dicken Bohrer an.
- Säge anschließend zwei weitere 5 cm lange Stücke ab, bringe je eine mittige Markierung 5 cm von einem der beiden Enden entfernt an und bohre an diesen Stellen mit Hilfe eines Bohrständers und eines = 15 mm dicken Forstnerbohrers jeweils ein Loch in einem Winkel von 45° zur Senkrechten.
- Schraube die beiden kurzen Stücke an den Enden der längeren Leiste an. Stecke durch die Bohrungen je ein Reagenzglas (mit der Öffnung nach aussen) und lege eine passende Holzkugel hinein.
- Befestige die Hauptleiste mittig mit zwei Unterlegscheiben und (Stop-)Muttern an einer langen Schlossschraube. Säge den Kopf der Schraube ab und feile das abgeschnittene Ende nach, und fertig ist der Aufnahmeschaft (für Handgetriebe, Experimentiermotor oder Bohrmaschinen).

Material:

- Ein mechanisches Zentrifugenmodell
- Ein Experimentiermotor oder eine Bohrmaschine mit Drehzahlregulierung

Durchführung:

- Setze das Zentrifugenmodell in die Aufnahme des Experimentiermotors beziehungsweise der Bohrmaschine ein. Bringe es erst langsam, dann schneller zum Rotieren. Achte dabei darauf, dass das Zentrifugenmodell aufrecht gehalten wird, um Unwuchten zu vermeiden.
 - Beobachte, wie weit sich die Kugel bei verschiedenen Drehzahlen aus ihrer Ruhelage auslenkt. Was stellst Du fest? Wie kannst Du Deine Beobachtung erklären?
-

Drehmoment und Gleichgewicht

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Drehmoment und Gleichgewicht*.

Im Gleichgewicht bleiben..

Material:

- Eine Wand

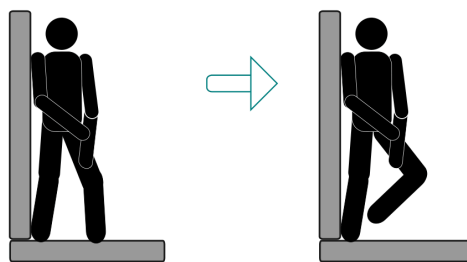


Abb. 223: Versuch, an einer Wand lehrend das Gleichgewicht zu halten.

Durchführung:

- Stelle dich so neben eine Wand, dass der Fuß des zur Wandseite zeigenden Beins die Wand direkt an der Wand anliegt.
 - Versuche das andere Bein anzuheben oder abzuwinkeln. Ist dies möglich, ohne das Gleichgewicht zu verlieren? Wie lässt sich das Ergebnis anhand der Lage des Schwerpunkts und der Auflagefläche erklären?
-
-

Die Holzplättchen-Treppe

Material:

- Mindestens 5, am besten gleich geformte Holzplättchen

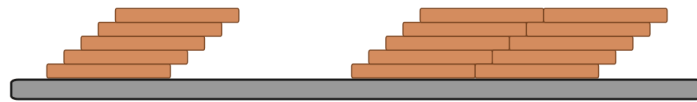


Abb. 224: Aufbau einer schrägen Treppe aus Holzplättchen

Durchführung:

- Versuche durch ein schiefes Aufeinanderstapeln der Holzplättchen eine Treppe zu bauen. Wann kippt diese um?
- Wiederhole das Experiment, sofern genügend Holzplättchen vorhanden sind, indem Du eine Treppe aus je zwei oder drei nebeneinander liegenden Holzplättchen baust. Wird die Treppe so „stabiler“?

Schwerpunkt zweidimensionaler Formen

Material:

- Karton
- Bleistift und Schere
- Stativ mit Quermuffe und Achse (4mm)
- Maurerschnur (ca. 30 cm lang)
- Pendelgewicht

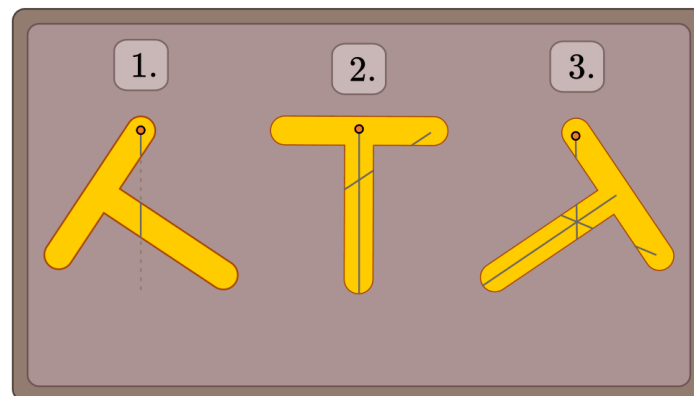


Abb. 225: Bestimmung des Schwerpunkts eines beliebigen zweidimensionalen Körpers

Durchführung:

- Zeichne eine beliebige, nicht zu kleine Form auf einem Karton auf.
 - Schneide die Form mit einer Schere aus.
 - Bohre mit der Spitze der Schere an drei Stellen Löcher mit etwa 5 mm Durchmesser in die Form. Bessere Variante (sofern vorhanden): Stanze mit einer Lochzange oder einem Locheisen und einer Unterlage entsprechende Löcher in den Karton ein.
 - Bringe die Form an einem der drei Bohrlöcher gut drehbar an der Achse an. Befestige anschließend das Pendelgewicht mittels der Maurerschnur an der Achse und zeichne auf dem Karton eine Gerade entlang der Maurerschnur ein.
 - Wiederhole diesen Vorgang, indem Du die Form an den anderen beiden Löchern aufhängst und wiederum lotrechte Geraden einzeichnest. In welchem Punkt schneiden sich die Geraden?
 - Teste den so ermittelten Schwerpunkt, indem Du die Form an dieser Stelle auf einem Finger balancierst. Was stellst Du fest?
-

Kraftwandler und Getriebe

Hebel

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Hebel*.

Ein sehr einfacher Hebel

Dieser Versuch eignet sich als unmittelbar verständlicher Freihand-Versuch, der sich schnell und einfach überall umsetzen lässt.

Material:

- Ein Lineal aus Holz oder ein kantiger Stift
- Ein runder Stift

Durchführung:

- Lege ein hölzernes Lineal quer über einen Stift und halte es mit je zwei Fingern an den Enden fest.
 - Teste die Hebelwirkung, die sich ergibt, wenn Du versuchst das Lineal an beiden Enden nach unten zu drücken. Was passiert, wenn sich der Stift nicht mittig unter dem Lineal befindet? Welche Hand ist in diesem „stärker“?
-

Das Gewicht einer Tasche. . .

Diesen Versuch „zum Anpacken“ vergisst man so schnell nicht..

Material:

- Ein (schwerer) Rucksack, ein großes Probegewicht oder ein anderer schwerer und gut greifbarer Gegenstand

Durchführung:

- Hebe eine Tasche oder ein anderes Gewichtsstück nahe an Deinem Körper hoch. Wie „schwer“ fühlt es sich an?
 - Hebe den gleichen Gegenstand nun mit seitlich voll ausgestrecktem Arm hoch. Was stellst Du fest? Wie kannst Du die Beobachtung anhand des Hebelgesetzes erklären?
-

Hebelwirkung beim Knicken eines Zahnstochers

Dieser Versuch kommt mit nur einem einzigen Zahnstocher aus. Trotzdem merkt man schnell, warum dünne Metallschrauben in Regalen verhältnismäßig hohe Lasten „tragen“ können. . .

Material:

- Ein Zahnstocher

Durchführung:

- Zerbreche einen Zahnstocher in der Mitte.
 - Nimm eine der beiden Hälften, und zerbreche sie wiederum in der Mitte.
 - Versuche, die immer kleineren Zahnstocher-Stücke weiter mit bloßen Händen zu zerteilen. Was stellst Du fest? Wie kannst Du Deine Beobachtung mit Hilfe des Hebelgesetzes erklären?
-

Ein Hebel als Zählhilfe

Mit diesem Versuch kann die Addition von Drehmomenten spielerisch einfach getestet und geübt werden.

Vorbereitung:

In einer Holzleiste wird der Mittelpunkt markiert, und von diesem bis zum Rand je zehn Schrauben in gleichmäßigen Abständen angebracht. Dann wird in die Mitte ein kleines Kugellager eingesetzt und an einer Achse (z.B. an einem Labor-Stativ) drehbar befestigt.

Als Gewichte zum Aufhängen an den Schrauben eignen sich Hakengewichte oder gleich große, mit einer passenden Bohrung versehene Rechtecke aus Holz. Bringt man in der Mitte des Hebels senkrecht eine kleine Metallstange als Lot an, so bleibt die „Waage“ im unbelasteten Zustand waagrecht.

Material:

- Eine Hebelstange mit je zehn nummerierten Halterungen für Gewichte
- Mehrere gleich große Holzplättchen mit Bohrung
- Stativmaterial

Durchführung:

- Hänge die Hebelstange an einer Achse drehbar gelagert an einem Stativ auf.
- Bringe auf der einen Seite zwei Hakengewichte auf verschiedenen Positionen an. Bringe auf der anderen Seite ein oder zwei Hakengewichte an, so dass die Summe der Zahlen auf der linken Seite gleich der Summe der Zahlen auf der rechten Seite ist. Welche Regel gilt also für das gemeinsame Auftreten von mehreren Drehmomenten?
- Hänge auf einer Seite mehrere Gewichte beispielsweise an die Zahl „6“ an. Auf wie viele verschiedene Weisen kannst Du auf der anderen Seite Gewichte anbringen, so dass die „Rechenwaage“ im Gleichgewicht bleibt?
- Kannst Du mittels des Hebels auch einfache Divisionsaufgaben „nachbauen“? Wie lässt sich der „Rest“ darstellen, wenn das Ergebnis der Division zweier Zahlen nicht ganzzahlig ist?

Schiefe Ebene

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Schiefe Ebene*.

Kraftmessung an einer Versuchsrampe

Material:

- 1 Versuchswagen
- 1 Holzklötz mit Bohrungen
- Passende Gewichte
- Stativ mit Quermuffe und langer Achse (4mm)
- Versuchsbrett „Schiefe-Ebene“
- Kraftmesser

Durchführung:

- Baue das Stativ samt Quermuffe und langer Achse auf und hänge ein Ende des Versuchsbretts über die Querbohrung an der Achse auf.
 - Bringe den Holzklotz mitsamt Gewichten so am Versuchswagen an, dass kein Verutschen der „Fracht“ möglich ist.
 - Hänge einen Kraftmesser am Versuchswagen ein und ziehe damit den Wagen die schiefe Ebene hoch. Vergleiche das Gewicht des Versuchswagens und der Fracht mit der nötigen Zugkraft an der schiefen Ebene.
 - Wiederhole den Versuch mit verschiedenen Winkeln der schiefen Ebene, indem Du die Höhe der Aufhänge-Achse variiert. Welchen Zusammenhang kannst Du, beispielsweise anhand einer Messtabelle, beobachten?
-

Schiefe Ebene und Haftreibung

Material:

- Stativ mit Quermuffe und langer Achse (4mm)
- Breites Versuchsbrett
- Schraubzwinge (optional)
- Mehrere Gegenstände (Stifte, Radiergummi, ...)

Durchführung:

- Baue das Stativ samt Quermuffe und langer Achse auf und hänge ein Ende des Versuchsbretts über die Querbohrung an der Achse auf. Sichere das untere Ende des Versuchsbretts gegebenenfalls mit einer Schraubzwinge ab, so dass es nicht wegrutschen kann.
- Stelle die Anordnung zunächst auf einen geringen Neigungswinkel ein und lege verschiedene Gegenstände auf das Brett. Notiere Dir als Vermutung, welcher Gegenstand wohl als erster zu rutschen beginnen wird und welcher wohl am längsten liegen bleiben wird.
- Überprüfe Deine Vermutung, indem Du die Neigung des Versuchsbretts *langsam* erhöhst. Bis zu welchem Neigungswinkel bleiben die einzelnen Gegenstände liegen? Wie kannst Du das Ergebnis erklären?

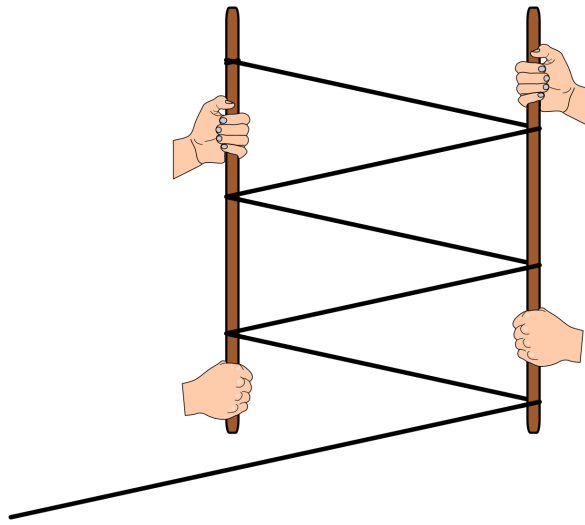
Flaschenzüge und Rollen

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Flaschenzüge und Rollen*.

Der Personen-Flaschenzug

Material:

- Zwei runde, stabile Holzstangen (z.B. Besenstiele)
- Ein ca. 4 m langes, zugfestes Seil



Durchführung:

- Nimm die beiden Holzstangen und winde ein langes Seil insgesamt drei Mal um beide Stangen herum. Knote ein Seilende an einer Stange fest, lass das andere Seilende lose über die gleiche Stange hinausragen.
- Wer ist „stärker“? Die Person, die am losen Seilende zieht, oder eine Person an einer der beiden Holzstangen?
- Was passiert, wenn das Seil noch öfters um die beiden Holzstangen gewickelt wird? Wie könnten Reibungseffekte verringert werden?

Arbeit, Leistung und Energie

Mechanische Arbeit

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanische Arbeit*.

Einfache Beispiele mechanischer Arbeit

Material:

- Zwei Tragetaschen
- Mehrere Bücher oder ähnliche Gewichte
- Ein Tisch
- Ein Stuhl

Durchführung:

- Hebe zunächst eine leichte, dann eine schwere Tragetasche vom Boden auf den Tisch. In welchem Fall war die verrichtete Arbeit (spürbar) größer?
- Stelle einen Stuhl auf den Tisch. Hebe die leichte Tragetasche vom Boden auf den Tisch. Stelle sie zurück auf den Boden und hebe sie anschließend auf den Stuhl, der auf dem Tisch steht. In welchem Fall hast Du hierbei mehr (Hub-)Arbeit verrichtet?
- Nimm den Stuhl vom Tisch und schiebe ihn zunächst zwei, dann vier Meter weit über den Boden. Lasse dann einen Mitschüler auf den Stuhl sitzen und schiebe ihn erneut zunächst zwei, dann vier Meter weit. Wie wirkt sich in diesem Fall die Größe der Reibungskraft und die Länge des Weges auf die verrichtete Arbeit aus?

Mechanische Leistung

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanische Leistung*.

Leistung im Treppenhaus

Material:

- Eine Stoppuhr
- Ein langes Maßband oder ein Meterstab
- Klemmbrett, Stift und Schreibblock

Nr.	Name	Gewicht in N	Höhe in m	Arbeit in J	Zeit in s	Leistung in W
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Durchführung:

- Drucke die obige Tabelle aus oder fertige eine entsprechende Tabelle selbst an.
 - Gehe mit einigen Mitschülern oder Freunden in ein Treppenhaus. Wähle eine Treppe aus, die für ein gefahrloses Hochrennen gut geeignet ist.
 - Messe mit Hilfe eines langen Maßbandes oder eines Meterstabes die Höhe h der Treppe.
 - Notiere dir die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ aller Läufer. (Gerundet: $F_G \approx \text{Masse in kg} \cdot 10 \text{ N}$)
 - Stoppe jeweils die Zeit t , die deine Mitschüler für das Hochrennen der Treppe benötigen und trage die Werte in die Messtabelle ein.
 - Berechne zunächst die verrichtete Arbeit $W = F_G \cdot h$ und anschließend die erbrachte Leistung $P = \frac{W}{t}$. Wer hat beim Hochrennen welche Leistung erbracht?
-

Mechanische Energie

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanische Energie*.

Sprunghöhe eines Flummis

Material:

- Ein Flummi
- Ein Maßband oder Meterstab
- Stativmaterial (ein Stativfuß, eine lange und kurze Stativstange, eine Quermuffe)

Durchführung:

- Lasse einen Flummi aus einer bestimmten Höhe (z.B. $h = 1,5 \text{ m}$) auf eine Stahl- oder Holzplatte oder auf Sand fallen.
 - Wie hoch springt der Ball zurück? Messe die Sprunghöhe und überlege, wie viel Prozent der Ausgangshöhe h sie beträgt.
 - Welche Energieumwandlungen sind aufgetreten? Was ist mit der „verlorenen“ Energiemenge geschehen?
-

„Fallstudie“ mit Steinen und Gewichten

Material:

- Ein etwa faustgroßer Stein
- Eine leere Blechdose
- Mehrere unterschiedliche Gewichte
- Fünf oder mehr gleichartige Nägel
- Ein Hartschaum-Block

Durchführung:

- Hebe einen Stein hoch und lasse ihn auf die Blechdose fallen. Wann wird Arbeit verrichtet? Welche Energieumwandlungen finden statt?
 - Drücke mit wenig Kraft die Nägel entlang einer Reihe und mit etwas Abstand zwischen den Nägeln in den Hartschaumblock hinein. Die Nägel sollten dabei gleich weit aus dem Hartschaum-Block heraus reichen und sich.
 - Lasse unterschiedlich schwere Gewichte aus jeweils der gleichen Höhe auf die Nägel fallen. Wie wirkt sich die unterschiedliche Masse der Gewichte oder eine andere Fallhöhe auf die Eindringtiefe der Nägel aus?
-

Impuls und Drehimpuls

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Impuls und Drehimpuls*.

Das Flummi-Katapult

Material:

- Zwei Flummis, am besten unterschiedlich groß

Durchführung:

- Halte die beiden Flummis in etwa auf Schulterhöhe übereinander. Bei zwei unterschiedlich großen Flummis sollte sich der kleinere mittig über dem größeren befinden.
 - Lass beide Flummis gleichzeitig los, so dass sie gemeinsam frei nach unten fallen. Was stellst Du fest? Wie lässt sich Deine Beobachtung mittels des Impulserhaltungssatzes erklären?
-

Mechanik der Festkörper, Flüssigkeiten und Gase

Mechanik der Flüssigkeiten

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanik der Flüssigkeiten*.

Kompression von Luft und Wasser

Material:

- Eine Kunststoffspritze (50 ml)

Durchführung:

- Ziehe den Kolben einer Kunststoffspritze („Kolbenprober“) heraus und halte die vordere Öffnung mit dem Daumen zu. Drücke die Kolbenstange wieder nach innen. Kannst Du die in der Luftpumpe enthaltene Luftmenge komprimieren?
 - Fülle die Kunststoffspritze mit Wasser. Drücke wiederum die vordere Öffnung zu und versuche, das Wasser zusammen zu pressen. Was stellst Du fest?
-

Druckmessung mit einem U-Rohr

Material:

- Ein gläsernes U-Rohr oder etwa 30 cm transparenter Schlauch
- Ein passender Stopfen
- Wasser

Durchführung:

- Fülle ein U-Rohr etwa zur Hälfte mit Wasser. Verschließe eine der beiden Öffnungen mit einem passenden Stopfen. Fülle dann in die andere Öffnung etwas Wasser nach. Weshalb steht das Wasser im offenen Rohrstück höher als im abgeschlossenen?
 - Was sagt die Zustandsgleichung für ideale Gase bzw. das *Gesetz von Boyle-Mariotte* bei den gegebenen Voraussetzungen aus? Wie kannst du aus dem Verhältnis der Füllhöhen auf den Gasdruck im abgeschlossenen Rohrstück schließen?
-

Modell einer hydraulischen Presse

Material:

- Eine Kunststoffspritze (50 ml)
- Eine Kunststoffspritze (10 ml)
- Etwa 15 cm Kunststoffschlauch (Durchmesser 2mm)

Durchführung:

- Fülle beide Kunststoffspritzen („Kolbenprober“) etwa bis zur Hälfte mit Wasser.
 - Stecke den Kunststoffschlauch auf eine der beiden Spritzen auf und presse eventuell vorhandene Luftblasen heraus. Stecke dann das lose Ende des Kunststoffschlauchs auf die andere Spritze auf.
-

- Nimm die beiden Spritzen in die linke bzw. rechte Hand und drücke die Kolben jeweils mit dem Daumen nach innen. Bei welcher Spritze brauchst Du mehr Kraft, um die Kolben im „Gleichgewicht“ zu halten?
-

Experimente zur Akustik

Der tickende Wecker

Material:

- Ein mechanischer Wecker
- Ein mittelgroßes Stofftuch

Durchführung:

- Lege einen tickenden Wecker auf einen Tisch und halte ein Ohr an Tischplatte.
 - Wiederhole den Versuch, indem Du ein Stück Stoff zwischen den Wecker und Tisch legst. Was stellst Du fest?
-

Das klingende Lineal

Material:

- Ein dünnes, starres Plastiklineal

Durchführung:

- Lasse das Lineal halb über einen Tisch reichen. Drücke das eine Ende des Lineals mit einer Hand fest an den Tisch und zupfe das freie Ende mit der anderen Hand an.
 - Verändere die Länge des schwingenden Linealstücks. Wie ändert sich die Tonhöhe und die Frequenz der Schwingung, wenn die Länge des schwingenden Endes verkürzt wird?
-

Schallwellen und Luftdruck

Material:

- Eine Plastikflasche
- Ein Stück Frischhaltefolie
- Ein Haushaltsgummi
- Ein Teelicht

Durchführung:

- Schneide mit einer Schere die Plastikflasche auf halber Höhe durch.
 - Spanne ein Stück Frischhaltefolie über die breite Öffnung der halbierten Plastikflasche. Befestige die überstehende Folie mit einem Haushaltsgummi, so dass sie nicht verrutschen kann und gespannt bleibt.
 - Stelle ein brennendes Teelicht auf einen Tisch. Nähere die vordere Öffnung der Plastikflasche bis auf einen Abstand von etwa 10 cm an das Teelicht an und klopfe am anderen Ende mit einem Finger auf die gespannte Frischhaltefolie. Kannst du auf diese Weise die Kerze löschen? Wodurch kommt der von der „Trommel“ ausgehende Windstoß zustande?
-

Experimente zur Optik

Ausbreitung des Lichts

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Ausbreitung des Lichts*.

Licht im Nebel

Material:

- Eine Nebelmaschine oder ein Räucherstäbchen
- Eine (oder mehrere) Taschenlampen

Durchführung:

- Erzeuge Nebel oder Rauch mit einer Nebelmaschine oder einem Räucherstäbchen. Dunkle den Raum ab und leuchte mit einer Taschenlampe in die Rauch- bzw. Nebelschwaden.
 - Kannst Du die einzelnen Lichtbündel der Lampen auf diese Weise direkt beobachten?
 - Weshalb nehmen wir die einzelnen Lichtbündel ohne Rauch bzw. Nebel nicht wahr?
-

Schattenspiel 1

Material:

- Eine Glühbirne mit Fassung und Anschlusskabel
- Verschiedene Gegenstände und/oder Formen aus Karton

Durchführung:

- Stelle in einem abgedunkelten Raum eine Glühbirne in etwa zwei Meter Entfernung von einer weißen Wand auf. Platziere in einem Abstand von etwa einem halben Meter verschiedene Gegenstände vor die Lampe. Beobachte den Schatten der Gegenstände auf der weißen Wand.
 - Lässt sich anhand der Formen der Schatten und dem Verlauf der Schattengrenzen auf eine geradlinige Ausbreitung des Lichts schließen?
 - Wie verändert sich die Größe der Schatten, wenn Du den Abstand der Gegenstände von der Lampe veränderst?
-

Schattenspiel 2

Material:

- Zwei Kerzen oder zwei Glühbirne mit Fassung und Anschlusskabel
- Ein quaderförmiger Karton

Durchführung:

- Stelle eine Kerze und einen aufrecht stehenden Karton hintereinander vor einer weißen Wand oder einem optischen Schirm auf und achte auf das Schattenbild. Stelle dann eine zweite Kerze neben die erste und schiebe die Kerzen abwechselnd auseinander und wieder zusammen.
 - Wie verändert sich das Schattenbild durch die zweite Kerze?
 - Durch welche Kerze(n) werden der Kernschatten und die beiden Halbschatten verursacht?
 - Wie verändert sich das Schattenbild, wenn Du das Licht je einer der beiden Kerzen mit der Hand abschirmst?
-

Schattenspiel 3

Material:

- Ein Tennisball
- Eine dünne Schnur
- Eine Taschenlampe oder Experimentierleuchte

Durchführung:

- Hänge einen Tennisball mit einer dünnen Schnur an der Zimmerdecke oder an einem Stativ auf. Beleuchte den Ball mit einer Experimentierleuchte, dunkle den Raum ab und beobachte den Ball aus verschiedenen Richtungen. Halte dabei ein Auge geschlossen.
 - Von welcher Position aus erscheint der Ball voll beleuchtet, von wo aus erkennt man nur einen sichelförmigen Teil des Balls?
 - Lassen sich die Beobachtungen auf die Lichtformen des Mondes übertragen?
-

Reflexion von Licht

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Reflexion von Licht*.

Spiegelbild einer Kerze 1

Material:

- Eine Kerze
- Eine kleine (Plexi-)Glasplatte mit Halterung

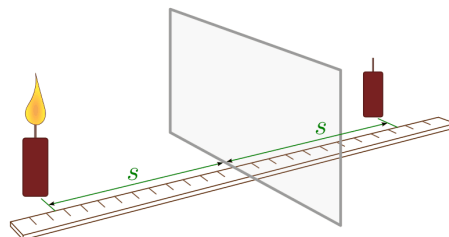


Abb. 226: Spiegelung einer Kerze an einer (halb-)transparenten Glasplatte

Durchführung:

- Stelle vor eine senkrecht stehende (Plexi-)Glasplatte eine brennende Kerze. Stelle eine zweite, nicht brennende Kerze in gleichem Abstand hinter die Glasplatte.
 - Blicke von vorne, d.h. von der brennenden Seite aus durch die Glasplatte. Was kannst Du beobachten?
 - Wie lässt sich die Beobachtung mit Hilfe des Reflexionsgesetzes erklären?
-

Spiegelbild einer Kerze 2

Material:

- Eine Kerze
- Ein Schuhkarton o.ä.
- Zwei Spiegel

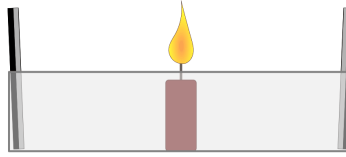


Abb. 227: Spiegelung einer Kerze an zwei gegenüber stehenden Spiegeln

Durchführung:

- Stelle zwei Spiegel entlang der kurzen Seiten in einen Schuhkarton. Stelle eine brennende Kerze vorsichtig in die Mitte zwischen beide Spiegel.
- Was kannst Du beobachten? Wie lässt sich die Beobachtung mit Hilfe des Reflexionsgesetzes erklären?

Spiegelbild einer Kerze 3 („Schottischer Adventskranz“)

Material:

- Eine Kerze
- Zwei kleine (Metall-)Spiegel mit Halterung

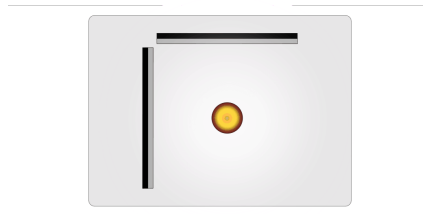


Abb. 228: Spiegelung einer Kerze an zwei zueinander senkrecht stehenden Spiegeln (Anordnung von oben betrachtet).

Durchführung:

- Stelle die beiden (Metall-)Spiegel im rechten Winkel zueinander auf, so dass ihre Kanten sich berühren. Stelle mittig zu beiden Spiegeln eine brennende Kerze.
- Was kannst Du beobachten, wenn Du auf beide Spiegel gleichzeitig blickst?

Richtung eines gespiegelten Lichtbündels

Material:

- Eine Experimentierleuchte mit Blende (oder ein kleiner Laser)
- Ein kleiner Spiegel mit Halterung
- Ein gewölbter Spiegel (optional)
- Ein Gradmesser (Kopiervorlage: PDF (A4), SVG)

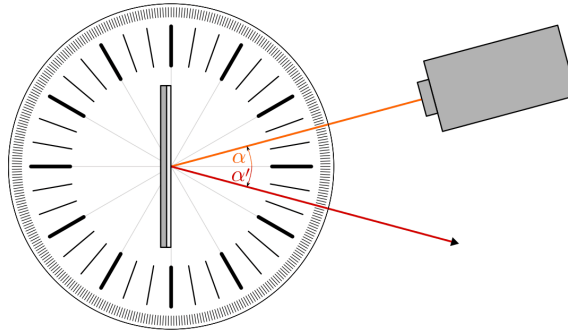


Abb. 229: Beobachtung des Reflexionsgesetzes mit Hilfe eines Gradmessers.

Durchführung:

- Lege einen Gradmesser auf einen Tisch oder eine erhöhte Experimentierunterlage und stelle einen kleinen Spiegel mit Hilfe einer Halterung in die Mitte des Gradmessers. Positioniere eine Experimentierleuchte so, dass ein dünnes Lichtbündel den Spiegel trifft und sowohl der einfallenden wie auch die reflektierten Lichtstrahlen am Gradmesser erkennbar sind.
- Messe bei unterschiedlichen Positionen der Experimentierleuchte jeweils den Winkel α des einfallenden und den Winkel α' des reflektierten Lichtstrahls. Was stellst Du fest?
- Funktioniert der Versuch auch mit einem breiteren Lichtbündel?
- Wiederhole den Versuch mit einem gewölbten Spiegel. Gilt das Reflexionsgesetz auch in diesem Fall?¹

Lichtbrechung

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Lichtbrechung*.

Tief im Wald, die hohe Eiche..

Material:

¹ Ist kein gewölbter Spiegel vorhanden, so kann ein provisorischer Spiegel mit Hilfe eines runden Gegenstandes, Karton, Alufolie und Klebeband selbst hergestellt werden.

- Ein Reagenzglas mit Stopfen
- Ein ausgedrucktes Din-A4-Blatt „Tief im Wald – Die hohe Eiche“



Abb. 230: Tief im Wald – Die hohe Eiche (Kopiervorlage).

Durchführung:

- Fülle ein Reagenzglas mit Wasser und verschließe es mit einem Stopfen. Wenn Du das Reagenzglas kippst, sollten möglichst keine Luftbläschen mehr zu sehen sein. Lege ein farbig ausgedrucktes Blatt mit den zwei Zeilen „TIEF IM WALD“ und „DIE HOHE EICHE“ auf einen Tisch und positioniere das Reagenzglas der Länge nach auf der Schrift.
- Rolle das Reagenzglas auf und ab, so dass Du entweder die obere oder die untere Zeile durch das mit Wasser gefüllte Reagenzglas beobachten kannst. Was stellst Du fest?
- Welchen Einfluss haben die Farben und die Form des Reagenzglases auf die Lichtbrechung?
- Funktioniert der Versuch auch mit einem leeren Reagenzglas?

Der verschwundene Bleistift

- Eine kleine, quaderförmige (Plexi-)Glasschale
- Ein Bleistift
- Wasser

Durchführung:

- Fülle Wasser in die Glasschale und lasse sie etwas über die Kante eines Tisches hinausragen. Achte dabei gut darauf, dass die Schale nicht herunterfallen kann!

- Lege einen Bleistift quer über die Glasschale.
 - Versuche den Bleistift von der Unterseite der Glasschale aus zu betrachten. Bis zu welchem Blickwinkel kannst Du den Bleistift erkennen? Wie kannst Du die Beobachtung anhand der Totalreflexion an der Wasseroberfläche erklären?
-

Experimente zur Wärmelehre

Achtung: Sicherheit hat immer Vorrang! Versuche mit offenem Feuer oder elektrischen Heizquellen dürfen stets nur in Anwesenheit eines Erwachsenen durchgeführt werden.

Temperatur und Wärme

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Temperatur und Wärme*.

Wärme-Empfindung der Hände

Material:

- Drei Schüsseln
- Wasserkocher
- Eiswürfel

Durchführung:

- Fülle drei Schüsseln mit warmem (nicht zu heißem!), lauwarmem und kaltem Wasser. Stelle sie nebeneinander und tauche die rechte Hand in das warme, die linke Hand in das kalte Wasser. Tauche dann beide Hände in die mittlere Schüssel mit dem lauwarmen Wasser.
 - Welche Wärme-Empfindung hast Du bei der rechten, welche bei der linken Hand?
 - Was folgerst Du daraus über die Wärme-Empfindung des Menschen? Lässt sie sich zur Temperaturmessung nutzen?
-

Ausbreitung von Wärme

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Ausbreitung von Wärme*.

„Kalte“ und „warme“ Materialien

Material:

- Eine Fliese, ein Stück Holz, etwas Watte, o.ä.
- Ein Thermometer (optional)
- Mehrere gleichförmige Materialproben (verschiedene Metalle, Kunststoff o.ä. als Stäbe oder Streifen) mit passender Halterung
- Eine Schüssel
- Heißes Wasser (ca. 50 °C)

Durchführung:

- Lasse eine Fliese, ein Stück Holz, etwas Watte oder ähnliche Materialien über längere Zeit im gleichen Raum liegen. Im Laufe der Zeit werden sich ihre Temperaturen wohl angleichen (Kontrolle: Temperaturmessung mit einem Thermometer). Dennoch fühlen sich manche Materialien „kalt“, andere „warm“ an. Woran kann dies liegen?
 - Fülle heißes Wasser in eine Schüssel oder ein anderes passendes Gefäß. Platziere gleich geformte Materialproben so in einer passenden Halterung, dass sie gleich weit in das heiße Wasser eintauchen. Fühle dann an den gegenüber liegenden Enden, wie schnell sich die einzelnen Materialproben auch dort „heiß“ anfühlen. Was kannst Du daraus bezüglich der Wärmeleitfähigkeit der einzelnen Materialien folgern?
-

Wärmeleitfähigkeit und Wärmeströmung in Luft

Material:

- Eine Kerze

Durchführung:

- Führe eine Hand von der Seite langsam und vorsichtig an die Kerzenflamme heran, ohne diese zu berühren. Ab welcher Entfernung spürst Du eine deutliche Erwärmung? Was kannst Du daraus bezüglich der Wärmeleitfähigkeit von Luft folgern?
 - Nähere eine Hand langsam und vorsichtig von oben an die Kerzenflamme heran. Ab welcher Entfernung spürst Du nun eine deutliche Erwärmung? Was kannst Du daraus bezüglich der Wärmeströmung von Luft folgern?
-

Wärmeleitfähigkeit von Wasser

Material:

- Ein Reagenzglas aus Glas
- Ein Reagenzglashalter aus Holz
- Eine Kerze oder ein Bunsenbrenner
- Ein kleiner Eiswürfel (optional)
- Ein kleines Steinchen (optional)

Durchführung:

- Fülle ein Reagenzglas mit kaltem Wasser, halte es mit einem Reagenzglashalter fest und erhitze es mit einer Kerze oder einem Bunsenbrenner am oberen Ende. Wie schnell verändert sich die Temperatur am unteren Ende? Was folgerst Du daraus bzgl. der Wärmeleitfähigkeit von Wasser?
 - Gebe einen kleinen Eiswürfel in das Reagenzglas und beschwere es mit einem kleinen Steinchen, so dass es an den Boden des Reagenzglases sinkt. Wiederhole den Versuch, indem Du mit einem Bunsenbrenner wiederum das obere Ende des Reagenzglases erwärmst. Kannst Du auf diese Weise Wasser in allen drei Aggregatzuständen (fest, flüssig, gasförmig) gleichzeitig beobachten?
-

Absorption von Wärmestrahlung

Material:

- Eine Wärmelampe oder elektrische Heizplatte
- Zwei Reagenzgläser aus Glas mit durchbohrtem Stopfen
- Zwei passende Glasröhrchen
- Tinte oder Lebensmittelfarbe
- Schwarzes und weißes Tonpapier
- Aluminiumfolie

Durchführung:

- Fülle zwei Reagenzgläser etwa 2 cm hoch mit gefärbtem Wasser und verschließe sie mit einem durchbohrten Stopfen. Stecke in die Bohrungen je ein enges Glasrohr, das bis in das Wasser hinab reicht.
 - Umwickle das erste Reagenzglas mit weißem, das andere mit schwarzem Papier. Stelle beide Gläser im gleichen Abstand vor einer elektrischen Wärmelampe auf. In welchem Reagenzglas steigt die Wassersäule schneller an?
 - Umwickle das erste Reagenzglas mit weißem Papier, das andere mit Aluminiumfolie. Stelle wiederum beide Gläser im gleichen Abstand von der Wärmelampe auf. In welchem Reagenzglas steigt die Wassersäule nun schneller an?
 - Umwickle beide Reagenzgläser mit schwarzem Papier. Stelle eines direkt vor die Wärmelampe, das andere hinter eine dicke, durchsichtige Glasplatte. In welchem Reagenzglas steigt die Wassersäule schneller an?
 - Stelle einen Spiegel vor einer Wärmelampe auf und beleuchte damit indirekt ein ein schwarz umwickeltes Reagenzglas. Ändert sich die Wassersäule in dem Reagenzglas?
-

Eigenbau eines Thermos-Gefäßes

Material:

- Ein großes Weck- oder Schraubglas
- Ein kleines Schraubglas
- Ein Trinkglas
- Ein flaches Stück Kork oder Styropor
- Aluminium-Folie
- Heißes Wasser
- Ein Messbecher
- Ein Thermometer

Durchführung:

- Wickle ein bis zwei Schichten Aluminium-Folie um das Schraubglas. Fixiere sie mit einem Stück Klebeband.
 - Lege ein Stück Styropor oder Kork mittig in das große Schraubglas. Es sollte nur so hoch sein, dass auch das kleine Schraubglas noch mit Platz hat.
 - Gieße mit Hilfe eines oder Messbechers je eine gleich große Menge an heißem Wasser in das Trinkglas und das kleine Schraubglas. Verschließe letzteres mit dem Deckel, stelle es in das große Schraubglas und verschließe auch hier den Deckel.
 - Miss nach knapp 10 Minuten mit einem Thermometer die Temperatur des Wassers im Trinkglas sowie im kleinen Schraubglas. Welches Gefäß „speichert“ die Wärme besser?
-

Ausdehnung bei Erwärmung

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Ausdehnung bei Erwärmung*.

Wärmeausdehnung einer Metallkugel

Material:

- Eine Metallkugel mit Aufhängung
- Eine Metallöse mit passender Bohrung

Durchführung:

- Erhitze eine Kugel, die bei Zimmertemperatur gerade noch durch eine passende Bohrung passt. Passt die Kugel immer noch durch die Bohrung?
 - Was passiert, wenn sie wieder abkühlt?
-

Wärmeausdehnung von Wasser

Material:

- Ein Reagenzglas mit durchbohrtem Stopfen
- Ein passendes Glasröhrchen
- Tinte oder Lebensmittelfarbe
- Wasserfester Filzstift
- Wasserbad (Elektrische Heizplatte, mit Wasser gefüllter Topf)

Durchführung:

- Fülle ein Reagenzglas bis zum Rand mit kaltem, schwach gefärbtem Wasser und verschließe es mit einem durchbohrten Stopfen. Führe durch den Stopfen ein enges Glasrohr. Unter dem Stopfen darf keine Luftblase bleiben.
 - Markiere den Wasserstand mit einem wasserfesten Filzstift. Erhitze das Reagenzglas in einem Wasserbad. Was passiert, wenn das Wasser erwärmt wird?
 - Was passiert, wenn das Reagenzglas wieder mit kaltem Wasser übergossen wird?
-

Wärmeausdehnung von Wasser und Petroleum im Vergleich

Material:

- Zwei Reagenzgläser mit durchbohrtem Stopfen
- Zwei passende Glasröhrchen
- Wasserbad (Elektrische Heizplatte, mit Wasser gefüllter Topf)
- Etwas Petroleum

Durchführung:

- Fülle ein Reagenzglas mit Wasser, ein anderes mit Petroleum. Verschließe sie mit einem durchbohrten Stopfen und führe durch den Stopfen ein dünnes Glasrohr. Erhitze beide Reagenzgläser in einem Wasserbad.
 - Warum werden gleich große Reagenzgläser und gleich weite Glasrohre benutzt?
 - Bei welcher Flüssigkeit nimmt das Volumen stärker zu?
-

Wärmeausdehnung von Luft

Material:

- Ein Reagenzglas oder Rundkolben mit durchbohrtem Stopfen
- Ein passendes Glasröhrchen
- Eine mit Wasser gefüllte Schale

Durchführung:

- Verschließe ein Reagenzglas oder einen Rundkolben mit einem durchbohrten Stopfen und führe durch den Stopfen ein dünnes Glasrohr. Tauche das Glasrohr in Wasser und erwärme das Reagenzglas mit der Hand oder mit einer Flamme. Was kannst Du beobachten?
-

- Was passiert, wenn das Reagenzglas anschließend mit kaltem Wasser übergossen wird?
-

Wärmeausdehnung von Wasser 2

Material:

- Eine Schüssel
- Eiskaltes und 10 °C warmes Wasser
- Zwei Thermometer

Durchführung:

- Fülle auf 0 °C kaltes Wasser vorsichtig Wasser mit einer Temperatur von etwa 10 °C (Tip: Gieße das Wasser auf ein kleines Hölzchen, das auf dem kalten Wasser schwimmt). Messe nach kurzer Zeit mit zwei Thermometern die Temperaturen an der Ober- und Unterseite der Wasser-Schichtung.
 - Welches Thermometer zeigt die höhere Temperatur an?
 - Bei welcher Temperatur besitzt Wasser somit die höhere Dichte?
-

Wärmeausdehnung von Wasser 3

Material:

- Ein Standzylinder (500 ml)
- Zwei Thermometer
- Eiswürfel

Durchführung:

- Fülle einen Standzylinder mit kaltem Wasser und gib (ohne Umrühren) einige Eisstückchen dazu. Messe nach einiger Zeit mit zwei Thermometern die Temperatur am oberen und unteren Rand des Eiswassers.
 - Welche Temperatur hat das Wasser an der Oberfläche, welche am Boden des Standzylinders?
 - Bei welcher Temperatur besitzt Wasser somit die höhere Dichte?
-

Experimente zu Elektrizität und Magnetismus

Beachte: Sicherheit hat immer Vorrang! Damit Elektrizität keine Gefahr darstellt, sind folgende Regeln stets zu beachten:

- Experimentiere niemals mit Elektrizität direkt aus der Steckdose!
- Verwende stets nur Stromquellen, die Deine Gesundheit nicht gefährden können – beispielsweise Batterien, Akkus, und/oder gesicherte Stromversorgungsgeräte.
- Achte darauf, dass niemals Wasser unbeabsichtigt in die Nähe einer elektrischen Schaltung gelangen kann.
- Schalte den Strom erst ein, wenn ein Experiment fertig aufgebaut ist. Schalte den Strom erst ab, bevor Du einen Versuch wieder abbaust.
- Berühre keine blanken Drähte oder Metallteile, solange der Strom angeschlossen ist. Schraube Elektrogeräte nicht auf, solange der Netzstecker in der Steckdose ist – offene Geräte dürfen nicht an das Stromnetz angeschlossen werden!

Elektrische Ladung

Das folgende Experiment bezieht sich auf den Abschnitt *Elektrische Ladung*.

Elektrizität durch Reibung

Material:

- Ein Hartgummistab
- Ein Stück (Baum-)Wolle
- Ein Elektroskop

Durchführung:

- Reibe einen Hartgummistab an einem Stück (Baum-)Wolle.
 - Prüfe mit einem Elektroskop, ob der Stab elektrisch geladen wurde.
 - Reibe einen Kamm aus Kunststoff an einem Pullover und halte ihn dicht an Deine Haare. Ist das Ergebnis mit dem ersten Versuchsteil vergleichbar?
-

Stromstärke, Spannung und Widerstand

Die folgenden Experimente beziehen sich auf den Abschnitt *Stromstärke, Spannung und Widerstand*.

Stromversorgung einer Glühbirne 1

Material:

- Ein Fahrrad-Dynamo
- Eine 6 V-Glühbirne
- Verbindungskabel
- Ein Schalter

Durchführung:

- Schraube einen Fahrrad-Dynamo an einer Stativstange fest. Verbinde das Gehäuse des Dynamos durch ein isoliertes Kabel mit einer der beiden Anschlüsse einer Glühlampe. Verbinde die untere, isolierte Anschlussstelle des Dynamos mit über einen Schalter mit der anderen Anschlussstelle der Glühlampe.
 - Schließe den Schalter und drehe ruckartig am Drehknopf des Dynamos. Leuchtet die Glühbirne auf?
 - Untersuche, ob die Glühbirne auch aufleuchtet, wenn nur ein Kabel zu ihr führt. Unter welchen Bedingungen leuchtet die Glühbirne?
 - Zeichne einen Schaltplan für den Versuchsaufbau.
-

Stromversorgung einer Glühbirne 2

Material:

- Eine 12 V-Glühbirne mit Fassung und Anschlusskabel
- Ein regelbares Stromversorgungsgerät (2 bis 12 V)

Durchführung:

- Schließe eine für 12 V vorgesehene Glühlampe an ein Stromversorgungsgerät an. Stelle nacheinander die Spannungen 1 V, 3 V, 5 V, 8 V, 10 V und 12 V ein.
 - Kannst Du an der Helligkeit der Glühbirne die angelegte Spannung „ablesen“? Was würde passieren, wenn Du die Spannung noch weiter erhöhen würdest?
 - Weshalb gibt es wohl keine für 230 V geeigneten Mini-Glühbirnen?
-

Wärmewirkung von Strom 1

Material:

- Ein regelbares Stromversorgungsgerät (2 bis 12 V)
 - Ein Draht aus Konstantan
 - Zwei Stativfüße („Tonnenfüße“)
 - Zwei Isolier-Halterungen
-

Durchführung:

- Spanne zwischen zwei Isolatoren einen Draht aus Konstantan. Lege eine Spannung von 2 V an und erhöhe sie schrittweise auf 12 V. Lege einen Papierstreifen quer über den stromdurchflossenen Draht.
 - Beobachte den Draht. Aus welchen Veränderungen kannst Du ohne Anfassen schließen, dass er erhitzt wird?
-

Wärmewirkung von Strom 2

Material:

- Ein regelbares Stromversorgungsgerät (2 bis 15 V)
- Ein Draht aus Konstantan
- Eine Stecknadel
- Zwei Stativfüße („Tonnenfüße“)
- Zwei Isolier-Halterungen

Durchführung:

- Wickle einen Teil eines Konstantandrahts auf einer Stricknadel eng zu einer Wendel auf. Spanne diese Wendel zwischen zwei Isolatoren und lege eine Spannung bis zu 14 V an.
 - Unter dem Einfluss des Stroms erhitzt sich der Draht fast bis zur Weißglut. Warum hält er dieser Belastung nur kurze Zeit stand?
 - Warum glüht eine Heizwendel in einer Glühlampe lange Zeit, ohne durchzubrennen?
-

Wärmewirkung von Strom 3

Material:

- Ein regelbares Stromversorgungsgerät (2 bis 12 V)
- Ein Draht aus Konstantan
- Eine Stecknadel
- Ein Becherglas
- Zwei Stativfüße („Tonnenfüße“)
- Zwei Isolier-Halterungen

Durchführung:

- Wickle einen Konstantandraht mit Hilfe eines Bleistiftes zu einer Wendel auf. Biege die Enden nach oben und befestige sie an zwei Isolatoren. Tauche die Wendel tief in ein mit Wasser gefülltes Becherglas ein.
 - Lege etwa zehn Minuten lang eine Spannung zwischen 6 und 12 V an und messe alle zwei Minuten die Wassertemperatur. Erstelle aus den Messwerten eine Tabelle.
 - Zeichne in ein Koordinatensystem ein, wie sich die Temperatur mit der Zeit ändert. Wie ändert sich die Zeit in gleich langen Zeitabschnitten?
-

- Warum kommt die „Heizwendel“ unter Wasser nicht zum Glühen?
-

Wärmewirkung und elektrischer Widerstand

Material:

- Ein regelbares Stromversorgungsgerät (2 bis 12 V)
- Drahtstücke gleicher Dicke aus Kupfer- und Eisen
- Zwei Stativfüße („Tonnenfüße“)
- Zwei Isolier-Halterungen
- Eine Zange

Durchführung:

- Spanne zwischen zwei Isolatoren eine Leiterkette, die abwechselnd aus gleich dicken und gleich langen Kupfer- und Eisendrahtstücken aufgebaut ist.
 - Verbinde die Drahtenden mit dem Stromversorgungsgerät und erhöhe die angelegte Spannung langsam von 2 V auf 12 V. Welcher Draht glüht auf, welcher nicht?
 - Wiederhole den Versuch mit Wechselspannung (optional).
 - Welches der Materialien besitzt einen höheren elektrischen Widerstand? Welchen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Widerstand und der Wärmewirkung in einem Leiter kannst Du feststellen?
-

Leiter, Halbleiter und Isolatoren

Das folgende Experiment bezieht sich auf den Abschnitt *Leiter, Halbleiter und Isolatoren*.

Prüfstrecke für elektrischen Widerstand

Material:

- 1 Flachbatterie (4,5 V) o.ä.
- 1 Glühbirne (6 V) mit Fassung
- 3 Verbindungskabel (ggf. mit Krokodilsklemmen)
- Materialproben
- Material-Halterungen (optional)

Durchführung:

- Spanne nacheinander je eine Materialprobe in eine Material-Halterung ein und/oder verbinde sie mit der Glühbirne und den beiden Polen einer Flachbatterie.
 - Bei welchen Stoffen leuchtet die Glühbirne auf, bei welchen nicht?
-

- Was kannst du daraus auf den elektrischen Widerstand der jeweiligen Stoffe schließen?
-

Magnetismus

Das folgende Experiment bezieht sich auf den Abschnitt *Magnetismus*.

Eine Leiterschaukel im Hufeisenmagneten

Material:

- Ein Stromversorgungsgerät
- Ein starker Hufeisenmagnet
- Eine Leiterschaukel
- Ein Schalter
- Drei Verbindungskabel

Durchführung:

- Hänge eine Leiterschaukel in das Magnetfeld eines Hufeisenmagneten.¹ Schicke über einen Schalter einen Strom durch die Leiterschaukel und beobachte die Leiterschaukel.
 - Wie verhält sich die Leiterschaukel bei umgekehrter Stromrichtung?
 - Wie verhält sich die Leiterschaukel bei verschiedenen Stromstärken?
-

Eine Leiterspule im Hufeisenmagneten

Material:

- Ein Stromversorgungsgerät (regelbar)
- Ein starker Hufeisenmagnet
- Eine Leiterspule
- Ein Trinkhalm
- Ein Schalter
- Drei Verbindungskabel

Durchführung:

- Hänge eine Leiterspule mit wenig Windungen in das Magnetfeld eines Hufeisenmagneten. Befestige an der Spule einen Trinkhalm als Zeiger. Verbinde die Spulenanlüsse mit einem regelbaren Stromversorgungsgerät.
 - Wie bewegt sich die Spule? Welche Kräfte wirken auf die einzelnen Bereiche der Spule?
 - Schalte zusätzlich ein Ampere-Messgerät in den Stromkreis. Hängt der Zeigerausschlag von der durch die Spule fließende Stromstärke ab?
-

¹ Die Richtungspfeile des Magnetfelds zeigen vom Nord- zum Südpol!

Elektromagnetische Induktion 1

Material:

- Ein starker Hufeisenmagnet
- Eine Leiterschaukel
- Ein empfindliches Spannungsmessgerät
- Zwei Verbindungskabel

Durchführung:

- Hänge eine Leiterschaukel in das Magnetfeld eines Hufeisenmagneten. Verbinde die Leiterschaukel mit einem empfindlichen Spannungsmessgerät. Bewege die Leiterschaukel quer zum Hufeisenmagneten ruckartig heraus und hinein.
 - Beobachte die Anzeige des Spannungsmessgerätes. Untersuche, ob das Versuchsergebnis davon abhängt, wie schnell sich die Leiterschaukel durch das Magnetfeld bewegt.
 - Wiederhole den Versuch. Lasse dabei allerdings die Leiterschaukel in Ruhe und bewege dafür den Magneten.
 - Tritt auch dann eine Spannung auf, wenn die Leiterschaukel vom Nordpol zum Südpol des Magneten bewegt wird?
-

Elektromagnetische Induktion 2

Material:

- Verschiedene Spulen (300, 600 und 1200 Windungen)
- Ein Stabmagnet
- Ein empfindliches Spannungsmessgerät
- Zwei Verbindungskabel

Durchführung:

- Lege eine Spule auf eine weiche Schaumgummi-Unterlage und verbinde ihre beiden Anschlussbuchsen mit einem empfindlichen Spannungsmessgerät. Führe einen Stabmagneten erst langsam, dann schneller in die Spule ein.
 - Untersuche, ob die angezeigte Spannung von der Geschwindigkeit des Stabmagneten und/oder der Anzahl der Windungen der Spule abhängt.
 - Wiederhole den Versuch, indem Du den Stabmagneten ab dem Spulenrand fallen lässt, und ziehe ihn anschließend wieder ruckartig aus dem Spuleninneren heraus. Was stellst Du fest?
 - Ändert sich das Versuchsergebnis, wenn einmal der Nordpol, einmal der Südpol des Stabmagneten nach unten zeigt? Ändert sich das Versuchsergebnis, wenn Du die Spule umdrehst?
-

Ein einfacher Stromgenerator

Material:

- Ein empfindliches Glühlämpchen (1,5 V; 0,4 A) mit Fassung
- Ein starker Hufeisenmagnet
- Eine Spule (600 Windungen)

Durchführung:

- Schließe ein Lämpchen an eine Spule an, und bewege die Spule rasch in einen Schenkel eines Hufeisenmagneten. Leuchtet das Glühlämpchen gleichmäßig?
 - Ändert sich das Versuchsergebnis, wenn die Spule gegen den Magneten bewegt wird?
-

Übungsaufgaben

Aufgaben zur Mechanik

Körpereigenschaften

Volumen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Volumen*.

- (*) Auf dem Etikett eines Wandfarbe-Eimers ist angegeben, dass $V = 1,0\text{l}$ der Farbe zum Anstreichen einer Fläche von $A = 6,0\text{ m}^2$ genügt. Mit welcher Schichtdicke muss dazu die Farbe aufgetragen werden?

Lösung

- (*) Eine Blechtafel der Größe $1,50\text{ m} \times 1,20\text{ m}$ soll beidseitig mit einer $0,1\text{ mm}$ dicken Lackschicht überzogen werden. Wie viel dm^3 Lack werden benötigt?

Lösung

Dichte

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Dichte*.

- (*) Warum haben Kork und Styropor – im Vergleich zu anderen Festkörpern – eine so geringe Dichte?

Lösung

- (*) Welche Dichte hat ein Würfel, wenn sein Volumen gleich $V = 20 \text{ cm}^3$ ist und seine Masse $m = 178 \text{ g}$ beträgt? Aus welchem Stoff besteht er wohl?

Lösung

- (*) Kann man 6 kg Quecksilber mit einer Dichte: von $\rho = 13,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 13,6 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) in eine Flasche mit einem Volumen von $V = 0,501$ füllen?

Lösung

- (**) Glaswolle besteht im Wesentlichen aus einem Glasgemisch und Luft. Bei einem Volumen von $V = 1 \text{ m}^3$ beträgt ihre Masse rund $m = 100 \text{ kg}$. Wie groß ist der Anteil des Glasgemisches am Gesamtvolumen, wenn die Dichte des Glasgemisches $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3 = 2500 \text{ kg/m}^3$ beträgt und die Masse der Luft vernachlässigt werden kann?

Lösung

- (**) Um die Dichte einer $m_{\text{Holz}} = 27,5 \text{ g}$ schweren Holzprobe zu bestimmen, wird diese an einem Bleistück der Masse $m_{\text{Pb}} = 400 \text{ g}$ (Dichte: $\rho_{\text{Pb}} = 11,3 \text{ g/cm}^3$) befestigt und in einem mit Wasser gefüllten Überlaufgefäß versenkt. Es fließen $75,0 \text{ cm}^3$ Wasser heraus. Welche Dichte hat das Holz?

Lösung

- (*) Welche Masse hat ein $l = 100 \text{ m}$ langer Kupferdraht mit einem Durchmesser von $d = 2,0 \text{ mm}$? (Die Dichte von Kupfer beträgt $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \text{ g/cm}^3$.)

Lösung

- (*) Auf einem Garagendach, das $l = 3,00 \text{ m}$ lang und $b = 2,00 \text{ m}$ breit ist, liegt eine $h = 0,25 \text{ m}$ hohe Schneedecke; die Dichte des Schnees beträgt $\rho = 200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Wie groß ist die Masse m der Schneelast?

Lösung

Kinematik

Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit*.

Eindimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

- (*) Bei den folgenden Aufgaben geht es jeweils um durchschnittliche Geschwindigkeiten oder Bewegungsvorgänge mit konstanter Geschwindigkeit:
 - Ein Läufer legt eine Strecke $s = 8,0$ km in einer Zeit von $t = 30$ min zurück. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} ?
 - Ein Radfahrer legt alle $\Delta t = 6,0$ s eine Wegstrecke von $\Delta s = 36$ m zurück. Wie groß ist seine Geschwindigkeit?
 - Der Weltrekord im 100 m-Lauf aus dem Jahr 2009 liegt bei $t = 9,58$ s. Welche mittlere Geschwindigkeit \bar{v} in km/h hatte der Läufer?
 - Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht ein Zug, der um 9:05 Uhr in Augsburg abfährt und um 12:35 Uhr im $\Delta s = 245$ km weit entfernten Würzburg ankommt?
 - Ein Auto fährt mit $v = 108$ km/h auf einer Autobahn. Welche Wegstrecke legt es in einer Sekunde, welche in einer Minute zurück?
 - Wie viel Sekunden braucht man, um mit einer Geschwindigkeit von $v = 5,0$ km/h eine Strecke von 800 m zurückzulegen?
 - Das Licht legt in einer Sekunde rund 300 000 km zurück. Die Entfernung Erde-Sonne beträgt ungefähr $s = 150\,000\,000$ km. Welche Zeit benötigt das Licht von der Sonne zur Erde?

Lösung

- (*) Die Schallgeschwindigkeit in Luft beträgt ca. $v = 330$ m/s. Ein Wanderer steht gegenüber einer großen Felswand und ruft laut „Haallooo!!“. Erst nach einer Zeit von $t = 5,0$ s hört er ein Echo. Wie weit ist die Felswand vom Wanderer entfernt?

Lösung

- (*) Bewegung ist relativ. Konkret bedeutet das:

„Eine Bewegung ist die Änderung der Lage eines Körpers gegenüber einem anderen Körper. Wenn ein Körper seine Lage gegenüber einem anderen Körper nicht ändert, dann ist er in Ruhe gegenüber diesem Körper.“

Wie verhält sich dies bezüglich der Lage eines sitzenden Fahrgasts in einem sich bewegendem Schnellzug? Ist der Fahrgast in Ruhe, oder bewegt er sich?

Lösung

- (**) Bei einem „Verfolgungsrennen“ startet zunächst eine Gruppe an Läufern; nach einer Zeit von $\Delta t = 30 \text{ min}$ startet ein Fahrzeug am Ausgangspunkt und fährt den Läufern mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_F = 35 \text{ km/h}$ hinterher. Das Rennen ist für jeden einzelnen Läufer beendet, sobald das Fahrzeug ihn eingeholt hat.

Nach welcher Wegstrecke Δs beziehungsweise welcher Zeit Δt holt das Fahrzeug einen Läufer ein, dessen durchschnittliche Geschwindigkeit $v_L = 15 \text{ km/h}$ beträgt?

Lösung

- (**) Ein Fahrzeug startet mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 30,0 \text{ km/h}$ von Ort A nach Ort B. Gleichzeitig startet von Ort B ein Fahrzeug mit $v_2 = 50,0 \text{ km/h}$ nach Ort A. Die Strecke zwischen beiden Orten kann als geradlinig angenommen werden, ihre Länge beträgt $s = 100 \text{ km}$. An welcher Stelle treffen sich die beiden Fahrzeuge?

Lösung

Mehrdimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Mehrdimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit*.

- (*) Ein Schwimmer bewegt sich mit $v_y = 0,5 \text{ m/s}$ quer zur Strömung eines Flusses. Er wird um $s_x = 35 \text{ m}$ abgetrieben, bis er das $s_y = 100 \text{ m}$ entfernte Ufer erreicht. Wie groß ist die (durchschnittliche) Strömungsgeschwindigkeit v_x des Flusses?

Lösung

- (**) Zwei als punktförmig anzusehende Objekte, die sich zunächst am gleichen Ort befinden, bewegen sich in einem Winkel von 90° mit $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auseinander. Mit welcher Relativgeschwindigkeit \vec{v}_r entfernen sich die beiden Objekte voneinander? Welche relative Ortsveränderung ergibt sich nach $t = 15 \text{ s}$, von einem der Punkte aus betrachtet?
-

Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Bewegungen mit konstanter Beschleunigung*.

Eindimensionale Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

- (*) Welche durchschnittliche Beschleunigung erreicht ein Radfahrer, der aus dem Stand ($v_0 = 0 \text{ m/s}$) in einer Zeit von $t = 8,0 \text{ s}$ eine Geschwindigkeit von $v = 30 \text{ km/h}$ erreicht?

Lösung

- (*) Wie groß ist die Beschleunigung eines Fahrzeugs, das in 10 s von 0 km/h auf 100 km/h beschleunigt? Welche Beschleunigung ergibt sich im umgekehrten Fall, wenn das Fahrzeug in 10 s von 100 km/h auf 0 km/h abbremst?

Lösung

- (*) Wie groß ist die Beschleunigung a eines Fahrzeugs, das in $\Delta t = 5,0 \text{ s}$ von $v_1 = 20,0 \text{ m/s}$ auf $v_2 = 36,5 \text{ m/s}$ beschleunigt? Wie groß ist der Beschleunigungswert im Vergleich zum Wert der Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$), und welche Wegstrecke legt das Fahrzeug während des Beschleunigungsvorgangs zurück?

Lösung

- (**) Ein PKW fährt innerorts mit $v_0 = 40 \text{ km/h}$. Plötzlich bemerkt der Fahrer in $\Delta s = 25 \text{ m}$ Entfernung ein Hindernis. Nach einer Reaktionszeit von $\Delta t = 1,0 \text{ s}$ bremst er den Wagen mit einer Beschleunigung von $a = -4,5 \text{ m/s}^2$ ab. Kommt der Wagen noch rechtzeitig vor dem Hindernis zum Stillstand?

Lösung

- (**) Ein Badegast eines Schwimmbades springt aus einer Höhe von $h = 5,0 \text{ m}$ ins Wasser. Der Luftwiderstand kann hierbei vernachlässigt werden, die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Wie lange dauert seine Flugzeit, und welche Geschwindigkeit hat er in dem Moment, in dem er ins Wasser eintaucht?

Lösung

- (**) Ein Stein, der in einen Brunnen fallen gelassen wird, erfährt durch die Erdanziehung eine Beschleunigung von ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Anfangs hat der Stein eine Geschwindigkeit von $v_0 = 0 \text{ m/s}$; nach einer Zeit von $t = 1,7 \text{ s}$ kommt er auf dem Grund des Brunnens auf. Welche Geschwindigkeit erreicht der Stein dabei, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann? Welche Strecke legt er bis zum Aufprall zurück?

Lösung

- (**) Wie groß ist die Beschleunigung, die ein Fahrer bei frontalem Aufprall eines Fahrzeugs gegen eine Mauer erfährt, wenn die Knautschzone $\Delta s = 0,5 \text{ m}$ und die Aufprallgeschwindigkeit $v = 30 \text{ km/h}$ beträgt? Wie groß ist die Beschleunigung, wenn das Fahrzeug nicht gegen eine Wand fährt, sondern frontal auf ein baugleiches und gleich schnell in die Gegenrichtung fahrendes Fahrzeug trifft?

Wie groß ist die Beschleunigung, wenn die Aufprallgeschwindigkeit bei 50 km/h oder 100 km/h liegt?

Lösung

Kreisförmige Bewegungen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Kreisförmige Bewegungen*.

- (*) Ein Stein wird an eine Schnur gebunden und im Kreis geschleudert; plötzlich reißt die Schnur. In welcher Richtung fliegt der Stein weiter? Um was für einen Bewegungstyp handelt es sich folglich bei einer kreisförmigen Bewegung?

Lösung

- (*) Ein Fahrradreifen mit einem Durchmesser von $d = 72 \text{ cm}$ dreht sich in einer Sekunde 1,8 mal. Wie groß ist dabei die Umlaufzeit T ? Welche Winkelgeschwindigkeit und welche Bahngeschwindigkeit hat ein Kieselstein, der sich im Profil des Mantels festgesetzt hat?

Lösung

- (*) Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h . Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeit ω und die Drehzahl n der Räder, wenn deren Durchmesser $d = 45 \text{ cm}$ beträgt?

Lösung

- (*) Wie groß ist die Radialbeschleunigung a_φ einer Zentrifuge mit Radius $r = 1,00 \text{ cm}$, wenn sie eine Drehzahl von $n = 3000 \text{ U/min}$ aufweist?

Lösung

- (**) Welche Radialbeschleunigung a_φ erfährt ein Körper, der auf Höhe des Äquators mit der Erde (Radius $r_E = 6378 \text{ km}$) mitrotiert? Wie groß ist a_φ bei einem Körper, der sich auf Höhe des 45. nördlichen Breitengrades bzw. am Nordpol befindet?

Lösung

Dynamik

Mechanische Kräfte

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanische Kräfte*.

- (*) Wieso ist es gefährlich, beim Fahrradfahren mit höherer Geschwindigkeit die Hinter- mit der Vorderbremse zu verwechseln? Welche Rolle spielt dabei die Masse des Radfahrers beziehungsweise seine (Massen-)Trägheit?

Lösung

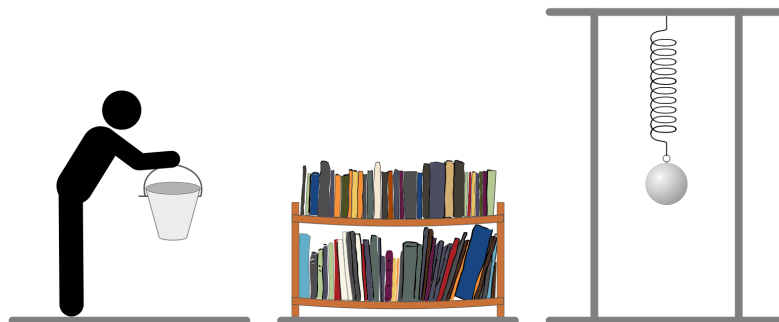
- (*) Wenn eine Straßenbahn vor dem Anhalten allmählich abbremst, erfahren die Fahrgäste beim Anhalten einen Ruck nach hinten. Wie ist das zu erklären?

Lösung

- (*) Um einen Körper in Bewegung zu versetzen, ist stets eine Kraft notwendig. Ist der Körper nicht verformbar („starr“), so haben gleich gerichtete Zug- und Druckkräfte eine gleiche Wirkung. Erkläre dies am Beispiel eines Einkaufswagens, der gezogen oder geschoben wird. Wo befindet sich jeweils der Angriffspunkt, wo die Wirkungslinie der Kraft?

Lösung

- (*) Zu jeder Kraft \vec{F}_{12} gibt es stets eine gleich große, in die umgekehrte Richtung wirkende Gegenkraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Finde in der folgenden Abbildung zueinander gehörende Kraft-Gegenkraft-Paare und zeichne Kraftpfeile mit passenden Richtungen ein.



Lösung

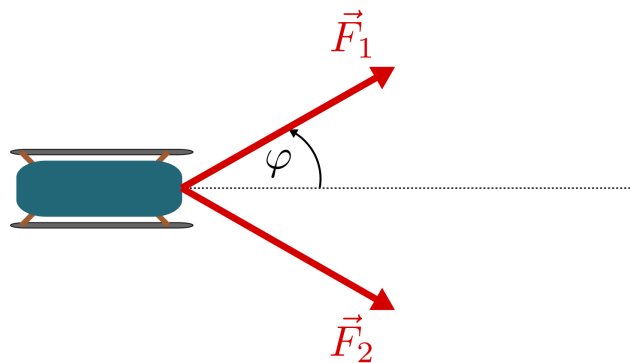
Zusammenwirken mehrerer Kräfte

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Zusammenwirken mehrerer Kräfte*.

- (*) Ein Kind mit einer Masse von $m = 30 \text{ kg}$ sitzt auf einer Schaukel. Welche Kraft wirkt auf die beiden Seile der Schaukel?

Lösung

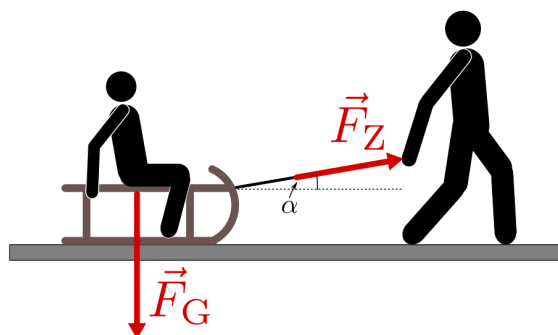
- (**) Zwei Kinder ziehen einen Schlitten mit den beiden Kräften $F_1 = F_2 = 40 \text{ N}$. Die Kräfte wirken in unterschiedlicher Richtung, der Winkel gegenüber der zum Schlitten senkrecht verlaufenden Linie beträgt jeweils $\varphi = 30^\circ$. Welche resultierende Gesamtkraft ergibt sich?



Hinweis: Die Aufgabe lässt sich graphisch (mit Hilfe eines Kräfte-Parallelogramms) oder rechnerisch lösen.

Lösung

- (*) Ein Schlitten mit Kind (Gesamt-Gewichtskraft: 500 N) wird von einem Erwachsenen gezogen. Das Zugseil schließt dabei mit der Horizontalen einen Winkel von $\alpha = 10^\circ$ ein. Wie groß ist die nötige Zugkraft F_{zug} , wenn die Reibungszahl zwischen Schlitten und Schnee $\mu = 0,15$ beträgt?

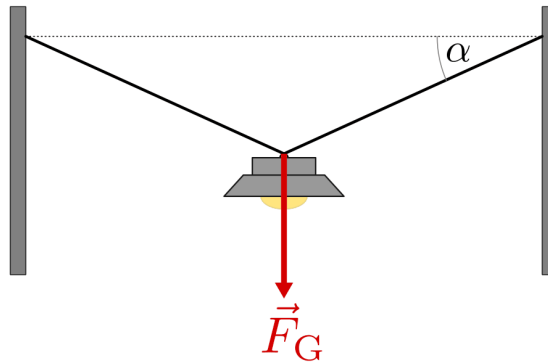


Lösung

- (**) Welche Winkel α , β und γ müssen drei an einem gemeinsamen Punkt angreifende Kräfte $F_1 = 50\text{ N}$, $F_2 = 70\text{ N}$ und $F_3 = 90\text{ N}$ einschließen, damit zwischen ihnen ein Kräftegleichgewicht herrscht?

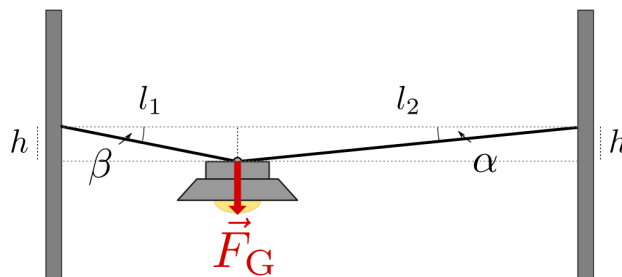
Lösung

- (*) Eine Straßenlaterne mit einer Gewichtskraft von $F_G = 50\text{ N}$ wird von zwei Stahlseilen in einem Winkel von $\alpha = 25^\circ$ gehalten. Wie groß ist die Kraft im linken bzw. im rechten Seilstück?



Lösung

- (**) Eine Straßenlaterne mit einer Gewichtskraft von $F_G = 50\text{ N}$ wird asymmetrisch von zwei Stahlseilen. Der Aufhängepunkt der Lampe befindet sich jeweils $h = 1,0\text{ m}$ unterhalb der Befestigungsstellen der Seile an den tragenden Wänden; der Abstand der Lampe zur linken Wand beträgt $l_1 = 5,0\text{ m}$, der Abstand zur rechten Wand $l_2 = 10\text{ m}$. Welche Beträge haben die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 , die entlang der Seilstücke auf diese einwirken?



Lösung

Arten mechanischer Kräfte

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Arten mechanischer Kräfte*.

- (*) Welche Gewichtskraft entspricht einer Masse von 1 kg auf der Erde? Wie groß ist die Gewichtskraft der gleichen Masse auf dem Mond?

Lösung

- (*) Die Gewichtskraft eines Astronauten beträgt auf dem Mond 130 N. Wie groß ist seine Gewichtskraft auf der Erde? Wie groß ist seine Masse?

Lösung

- (*) Könnte man sich ohne Vorhandensein einer Reibungskraft überhaupt zu Fuß fortbewegen?

Lösung

- (*) Eine 50 kg schwere Holzkiste aus Eichenholz soll auf einem Holzboden verschoben werden. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_H = 0,54$, die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0,34$. Welche Kraft ist nötig, um die Kiste aus der Ruhelage in Bewegung zu versetzen, und welche Kraft ist nötig, um die Kiste weiter gleiten zu lassen?

Lösung

- (*) Eine zu untersuchende Schraubenfeder dehnt sich durch das Einwirken einer Zugkraft $F = 1,0 \text{ N}$ um $\Delta s = 33 \text{ cm}$. Wie groß ist die Federkonstante D der Schraubenfeder?

Lösung

- (*) Welche Kraft ist nötig, um eine Schraubenfeder mit einer Federkonstante von $D = 40 \text{ N/m}$ um 12 cm auszudehnen?

Lösung

- (*) Wie weit dehnt sich eine Schraubenfeder mit einer Federkonstante von 650 N/m , wenn man mit einer Kraft von 20 N an ihr zieht?

Lösung

- (**) Welchen Radius r muss ein Kreisverkehr mindestens haben, wenn ein Fahrzeug der Masse $m = 1500 \text{ kg}$ ihn mit einer Geschwindigkeit von $v = 36 \text{ km/h}$ ohne Wegrutschen durchfahren können soll? Als Haftreibungszahl kann dabei $\mu_H = 0,8$ angenommen werden.

Lösung

Drehmoment und Gleichgewicht

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Drehmoment und Gleichgewicht*.

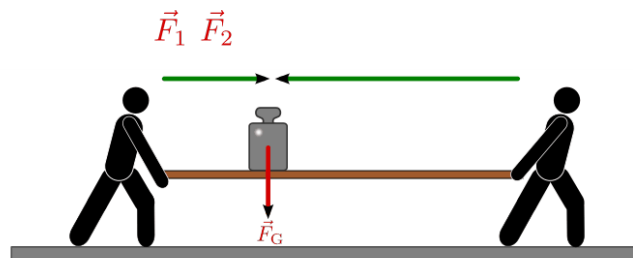
- (*) Die Standfestigkeit eines Körpers hängt von seiner Masse, der Lage seines Schwerpunkts und der Größe seiner Auflagefläche ab. Wann ist die Standfestigkeit eines Körpers groß, wann nur gering?

Lösung

- Wie muss ein Stehaufmännchen aufgebaut sein, damit es von selbst wieder aufrichtet, wenn es „umgeschubst“ wird?

Lösung

- (**) Zwei Personen tragen auf einem $m = 20 \text{ N}$ und insgesamt $l = 3 \text{ m}$ langen Holzbrett eine $F_G = 120 \text{ N}$ schwere Last. Wie groß sind dabei die Kräfte F_1 und F_2 , welche die beiden Träger aufwenden müssen, wenn sich die Last $s_1 = 1 \text{ m}$ weit vom hinteren Träger entfernt befindet?



Lösung

Kraftwandler und Getriebe

Hebel

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Hebel*.

- (*) Funktioniert eine Balkenwaage auch auf dem Mond? Gilt das gleiche auch für eine Federkraftwaage?

Lösung

- (*) Weshalb ist weniger Kraft nötig, um Deckel einer Farbdose mit Hilfe eines Schraubenziehers zu öffnen, wenn dieser unter dem Deckelrand angesetzt wird?

Beispiel: Wie groß ist die Kraft F_2 auf den Deckel, wenn der Abstand vom Dosenrand zum Griff des Schraubenziehers $s_2 = 0,16$ m, der Abstand vom Dosenrand zum Deckel $s_1 = 0,01$ m und die am Griff angreifende Kraft $F_1 = 5$ N beträgt?

Lösung

- (*) An einer Balkenwaage hängt im Abstand $s_1 = 10$ cm eine Last $m_1 = 2$ kg. In welchem Abstand zur Drehachse muss man ein Gegengewicht mit einer Masse von $m_2 = 500$ g anbringen, damit die Waage im Gleichgewicht ist?

Lösung

- (*) Eine Person hält ein $m = 2$ kg schweres Gewicht mit horizontal gehaltenem Unterarm in der Hand (der Oberarm hängt dabei lose nach unten). Der Anriffspunkt des Muskels am Unterarm ist $s_1 = 5$ cm vom Drehpunkt im Ellenbogen entfernt, der Abstand der Hand zum Drehpunkt beträgt $s_2 = 35$ cm. Welche Kraft F_1 muss der Muskel aufbringen, um den Unterarm in horizontaler Position zu halten?

Lösung

- (**) An der linken Seite eines zweiseitigen Hebels sind zwei Gewichte $F_1 = 3,5$ N und $m_2 = 5$ N im Abstand $s_1 = 0,2$ m bzw. $s_2 = 0,1$ m von der Drehachse befestigt. Am rechten Arm sind zwei Gewichte $F_3 = 1,5$ N und $m_4 = 4$ N im Abstand $s_3 = 0,6$ m bzw. $s_4 = 0,075$ m angebracht. Befindet sich der Hebel im Gleichgewicht?

Lösung

Schiefe Ebene

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Schiefe Ebene*.

- (*) Eine Schubkarre mit einer Gewichtskraft von 600 N wird entlang einer schiefen Ebene verschoben. Die schiefe Ebene ist 2,4 m lang, ihre Höhe beträgt 0,6 m. Wie groß ist die zum (reibungsfreien) Schieben der Schubkarre notwendige Kraft F ?

Lösung

Flaschenzüge und Rollen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Flaschenzügen und Rollen*.

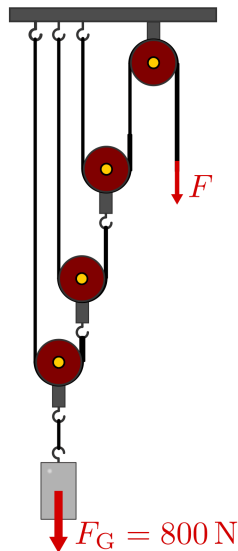
- (*) Mit einem Flaschenzug aus vier losen und vier festen Rollen wird eine Last der Masse $m = 200\text{ kg}$ um eine Höhe von $h = 3\text{ m}$ angehoben. Die Masse einer einzelnen Rolle beträgt 5 kg . Wie groß ist die Zugkraft F , wie lang die Zugstrecke s ?

Lösung

- (*) Welche Masse kann eine Person, die selbst 50 kg wiegt, durch ihre Gewichtskraft mit Hilfe eines Flaschenzugs aus zwei festen und zwei losen Rollen anheben, wenn das Gewicht des Flaschenzugs und die in den Rollen auftretende Reibung vernachlässigt werden können?

Lösung

- (**) Eine Anordnung, wie sie in der folgenden Abbildung dargestellt ist, heißt „Potenzflaschenzug“. Mit welcher Kraft F muss am losen Seilende mindestens gezogen werden, um eine Last mit einem Gewicht von $F_G = 800\text{ N}$ anzuheben? Mit welcher Kraft muss man am losen Seilende ziehen, wenn man die Gewichtskraft $F_{G,R} = 20\text{ N}$ jeder einzelnen Rolle berücksichtigt? (Der Einfluss von Reibungskräften wird bei dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.)

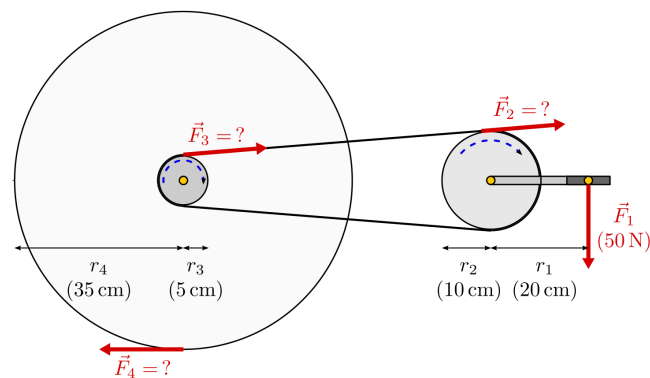


Lösung

Zahnräder und Getriebe

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Zahnräder und Getriebe*.

- (**) An einem Fahrrad wird die Kraft von den Pedalen mittels dem Pedal und der Kurbel, dem vorderen Zahnrad, der Kette und schließlich dem hinteren Zahnrad auf das Hinterrad übertragen. Wie groß ist die auf ein Hinterrad mit einem Radius von $r_4 = 0,35\text{ m}$ wirkende Kraft F_4 , wenn der Radfahrers auf eine $r_1 = 0,2\text{ m}$ lange Kurbel eine senkrechte Kraft von $F_1 = 50\text{ N}$ ausübt, der Umfang des vorderen Zahnkranz einen Radius von $r_2 = 0,1\text{ m}$ und der hintere Zahnkranz einen Radius von $r_3 = 0,05\text{ m}$ hat?



Wie groß ist im Vergleich die auf das Hinterrad wirkende Kraft F_2 , wenn der Fahrer vorne auf einen kleineren Zahnkranz mit Radius $r_2 = 0,05\text{ m}$ herunter schaltet und die gleiche Kraft auf das Pedal ausübt?

Lösung

Arbeit, Leistung und Energie

Mechanische Arbeit

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanische Arbeit*.

- (*) Warum handelt es sich um Arbeit, wenn man eine 10 kg schwere Getränke-Kiste um 1 m anhebt? Verrichtet man auch Arbeit, wenn man die Kiste längere Zeit in dieser Höhe hält? Handelt es sich um Arbeit, wenn die Kiste auf gleicher Höhe entlang einer 10 m langen, ebenen Strecke getragen wird?

Lösung

- (*) Durch eine Kraft $F_{\text{Zug}} = 25 \text{ N}$ wird ein Körper über eine $s = 5 \text{ m}$ lange Strecke gezogen. Welche Menge an Arbeit wird dabei verrichtet? Wie groß ist die Arbeit der Schwerkraft auf diesem Weg, wenn der Körper eine Gewichtskraft von $F_G = 100 \text{ N}$ hat?

Lösung

- (*) Ein Gewicht mit einer Masse von 100 kg soll um 1 m angehoben werden. Wie viel Arbeit muss dafür aufgebracht werden?

Lösung

- (*) Ein Wanderer der Masse 70 kg trägt einen 7 kg schweren Rucksack auf einen um 200 m höher gelegenen Gipfel eines Berges hinauf. Wie viel Hubarbeit verrichtet er am Rucksack, wie viel insgesamt?

Lösung

- (**) Welche Arbeit ist nötig, um zehn auf der Erde liegende, $h = 7 \text{ cm}$ hohe und $F_g = 35 \text{ N}$ schwere Ziegelsteine aufeinander zu stapeln?

Lösung

- (*) Durch eine Kraft $F = 15 \text{ N}$ wird ein Körper über eine $s = 5 \text{ m}$ lange Strecke gezogen. Welche Menge an Arbeit wird dabei verrichtet?

Lösung

- (**) Zwei Jugendliche mit den Massen $m_1 = 55 \text{ kg}$ und $m_2 = 40 \text{ kg}$ sitzen auf einem Schlitten und werden von einem Pferd über ein ebenes, $l = 200 \text{ m}$ langes Schneefeld gezogen. Der Schlitten wiegt $m_S = 5 \text{ kg}$, die Reibungszahl von Metall auf Schnee beträgt $\mu_G = 0,04$. Welche Arbeit verrichtet das Pferd?

Lösung

- (*) Ein Fahrzeug mit einer Masse von $m = 1000 \text{ kg}$ wird von $v_1 = 0 \text{ m/s}$ konstant auf $v_2 = 30 \text{ m/s}$ (entspricht 108 km/h) beschleunigt. Wie groß ist die dabei verrichtete Beschleunigungsarbeit?

Lösung

- (**) Ein Fahrzeug mit einer Masse von $m = 750 \text{ kg}$ wird aus dem Stand $t = 10 \text{ s}$ lang mit einer konstanten Beschleunigung $a = 2,5 \text{ m/s}^2$ beschleunigt. Wie groß ist die dabei verrichtete Arbeit?

Lösung

-
- (*) Welche Menge an Arbeit ist nötig, um ein Fahrzeug mit einer Masse von $m = 1000 \text{ kg}$ von 0 auf $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beziehungsweise von 0 auf $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu beschleunigen? Welche Menge an Arbeit ist nötig, um das Fahrzeug von $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu beschleunigen?

Lösung

Wirkungsgrad

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Wirkungsgrad*.

- (*) Wie groß ist der Wirkungsgrad eines „idealen“ (also reibungsfreien und gewichtslosen) Flaschenzugs? Inwiefern gilt in diesem Fall die „Goldene Regel der Mechanik“?

Lösung

- (*) Das Zugseil eines Flaschenzugs wird einer Kraft von $F = 80 \text{ N}$ um eine Strecke $s = 7 \text{ m}$ angezogen. Dadurch wird eine Last mit einer Gewichtskraft von $F_G = 250 \text{ N}$ um die Höhe $h = 2 \text{ m}$ angehoben. Wie groß ist der Wirkungsgrad η des Flaschenzugs?

Lösung

- (*) Einem Kraftwandler mit einem Wirkungsgrad von 33% wird eine Arbeit von $W_{\text{in}} = 7200 \text{ J}$ zugeführt. Welche Menge an Arbeit wird dabei von dem Kraftwandler abgegeben?

Lösung

- (*) Welche Menge an Arbeit muss in eine mechanische Vorrichtung mit einem Wirkungsgrad von 80% aufgewandt werden, wenn sie $W_{\text{ab}} = 5000 \text{ J}$ an Arbeit abgeben soll?

Lösung

Mechanische Leistung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanische Leistung*.

- (*) Wie groß ist die Leistung eines Sportlers mit einer Masse von $m = 70 \text{ kg}$, wenn er zehn Klimmzüge mit einem Höhenunterschied von je $h = 0,5 \text{ m}$ in einer Zeit von insgesamt $t = 8 \text{ s}$ schafft?

Lösung

- (*) Welche Leistung liefert ein Motor, der eine Kiste mit einer Masse von 200 kg in $t = 6 \text{ s}$ auf eine Höhe von $h = 4 \text{ m}$ anheben kann?

Lösung

- (*) Welche Masse kann durch eine Leistung von $P = 1 \text{ PS} = 735 \text{ W}$ in einer Sekunde um einen Meter angehoben werden?

Lösung

- (**) Ein Löschfahrzeug der Feuerwehr pumpt mit einer Leistung von 5 kW Wasser in $h = 15 \text{ m}$ Höhe. Wie viel Liter Wasser stehen den Feuerwehrleuten in einer Sekunde, wie viel in einer Minute zur Verfügung?

Lösung

- (**) Zum Ziehen eines Schlittens sei eine horizontale Kraft von $F = 300 \text{ N}$ nötig. Wie groß ist die mechanische Leistung, wenn der Schlitten mit $v = 0,75 \text{ m/s}$ gezogen wird?

Lösung

- (**) Ein Fahrzeug der Masse $m = 1200 \text{ kg}$ wird beim Einfahren auf eine Autobahn in $t = 8 \text{ s}$ konstant von $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beschleunigt. Wie groß muss die Beschleunigungsleistung des Motors dabei mindestens sein?

Lösung

Mechanische Energie

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanische Energie*.

- (*) Wie viel Energie besitzt 1 m^3 Wasser ($m = 1000 \text{ kg}$), das aus einem Stausee $h = 120 \text{ m}$ tief hinab fließt?

Lösung

- (*) Ein PKW mit einer Masse von $m_{\text{PKW}} = 1\,000\text{ kg}$ und ein LKW mit einer Masse von $m_{\text{LKW}} = 8\,000\text{ kg}$ fahren jeweils $v_1 = 50\text{ km/h}$. Wie groß sind die Bewegungsenergien der beiden Fahrzeuge? Wie groß ist die Bewegungsenergie des PKWs, wenn seine Geschwindigkeit verdoppelt bzw. verdreifacht wird?

Lösung

- (**) Angenommen, ein Fahrzeug würde mit $v = 72\text{ km/h}$ gegen ein festes Hindernis prallen. Aus welcher Höhe müsste das Fahrzeug stürzen, um – bei Vernachlässigung des Luftwiderstands – eine vergleichbare Wirkung zu erfahren?

Lösung

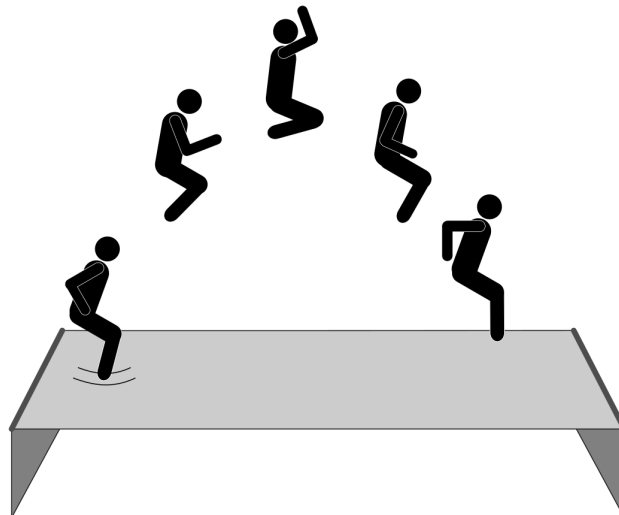
- (**) Ein Badegast springt von einem 5-m-Turm ins Wasser. Wie groß ist seine Geschwindigkeit v beim Eintauchen, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann?

Lösung

- (*) Stimmt es, dass alle Lebensmittel gespeicherte Sonnen-Energie beinhalten?

Lösung

- (*) Welche Energieumwandlungen finden beim Trampolinspringen statt?



Lösung

Impuls und Drehimpuls

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Impuls und Drehimpuls*.

- (*) Wie groß ist der Impuls einer $m = 20$ g schweren Schwalbe, wenn sie $v = 75$ km/h schnell fliegt?

Lösung

- (*) Ein Eisenbahnwagen koppelt mit $v = 3$ m/s an drei stehende, Eisenbahnwagen gleicher Bauart an. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die Wagen anschließend weiter, wenn die Reibung vernachlässigt werden kann?

Lösung

- (**) Zwei Fahrzeuge mit $m_1 = 1000$ kg und $m_2 = 2000$ kg prallen unelastisch mit $v_1 = +50$ km/h und $v_2 = -50$ km/h frontal aufeinander. Welche Beschleunigung wirken auf die Fahrer der beiden Fahrzeuge ein, wenn für beide Fahrzeuge eine „Knautschzone“ von $s = 0,5$ m angenommen werden kann?

Lösung

Mechanik der Festkörper, Flüssigkeiten und Gase

Mechanik der Festkörper

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanik der Festkörper*.

- (*) Muss bei einem Querträger aus Stahlbeton (beispielsweise bei einer Brücke) der Stahl auf der Ober- oder auf der Unterseite in den Beton eingebracht werden?

Lösung

Mechanik der Flüssigkeiten

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanik der Flüssigkeiten*.

Statischer Druck

- (*) Auf einen Kolben mit einer Fläche von $1 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$ wird eine Kraft von 350 N ausgeübt. Welcher Druck wird dadurch auf das Fluid im Zylinder ausgeübt?

Lösung

- (*) Welcher Schweredruck stellt sich in Wasser ($\rho = 1,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) bei einer Eintauchtiefe von $h = 10 \text{ m}$ ein?

Lösung

- (*) Bis zu welcher Höhe kann Wasser in den Leitungen eines Gebäudes maximal steigen, wenn der Druck in Bodenhöhe $p = 6 \text{ bar}$ beträgt?

Lösung

Statischer Auftrieb

- (**) Welchen Auftrieb erfährt ein badender Mensch mit einem Volumen von 80 l und einer Dichte von $\rho_K = 1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ in normalem Wasser $\rho_W = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und in gesättigtem Salzwasser mit einer Dichte $\rho_{\text{SW}} = 1120 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

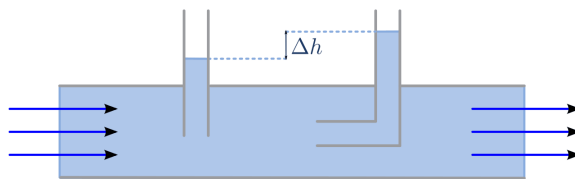
Lösung

- (*) Durch welchen Mechanismus können Fische im Wasser auf- und abtauchen, ohne sich dabei in horizontaler Richtung fortzubewegen? Wie funktioniert das Auf- und Abtauchen bei einem Unterseeboot?

Lösung

Bernoulli-Gleichung

- (**) Durch ein horizontal verlaufendes Rohr fließt eine Flüssigkeit. Der Unterschied der Flüssigkeitsniveaus in der vorderen und hinteren Röhre beträgt 10 cm, wobei die Durchmesser der beiden Röhren identisch sind. Wie groß die Strömungsgeschwindigkeit v der Flüssigkeit im Rohr?
-



Lösung

- (*) Welche maximale Austrittsgeschwindigkeit v kann sich maximal ergeben, wenn ein Leck an einer Leitung auftritt, in der ein Wasserdruck von $p = 1 \text{ bar}$ vorherrscht?

Lösung

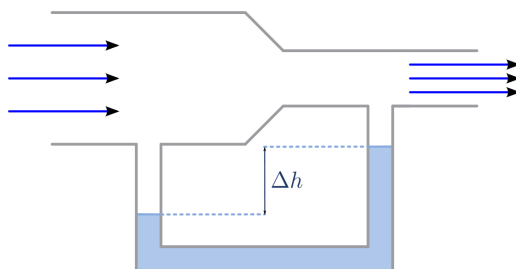
Mechanik der Gase

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Mechanik der Gase*.

- (***) Welche Strömungsgeschwindigkeit v ist notwendig, um einen dynamischen Druck von $p_{\text{dyn}} = 10 \text{ kPa}$ zu erzeugen, wenn es sich bei dem Fluid um Wasser ($\rho_{\text{Wasser}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) beziehungsweise Luft ($\rho_{\text{Luft}} = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) handelt?

Lösung

- (***) Durch ein sich verengendes Rohr wird Luft geblasen. In jeder Minute strömen $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ durch das Rohr. Die Querschnittsfläche des weiten Teils beträgt 2 cm^2 , die des engen Teils $0,5 \text{ cm}^2$. Wie groß ist der Unterschied Δh der Wasserstände im angebrachten U-Rohr, wenn die Dichte der Luft $\rho_{\text{Luft}} = 1,32 \text{ kg/m}^3$ beträgt?



Lösung

- (***) Ein Fallschirm hat einen Luftwiderstandswert von $c_w = 1,3$, die Gesamt-Masse des Fallschirms und der angehängten Last soll maximal 100 kg betragen. Wie groß muss in diesem Fall der Durchmesser des Fallschirms sein, wenn bei einer angenommenen Luftdichte von $\rho_L = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ eine Sinkgeschwindigkeit von $v = 8,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nicht überschritten werden soll?

Lösung

Aufgaben zur Optik

Ausbreitung des Lichts

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Ausbreitung des Lichts*.

- (*) Weshalb trifft nur ein kleiner Anteil des Sonnenlichts auf die Erde? Wieso erscheint uns das Weltall als dunkel?

Lösung

- (*) Weshalb kann Licht nicht – ähnlich wie Wasser – in einem Behälter eingefangen und aufbewahrt werden?

Lösung

Reflexion von Licht

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Reflexion von Licht*.

- (*) Welche der Stoffe aus der folgenden Tabelle eignen sich dazu, Licht direkt (wie ein Spiegel) zu reflektieren? Welche Eigenschaft müssen ihre Oberflächen dafür besitzen?

Fensterglas	Kalkstein	Mehl	Eis
Mattglas	Granit	Kochsalz	Schnee
Kunststoff	Diamant	Zucker	Wasser
Holz	Metall	Sirup	Nebel

Lösung

- (*) Weshalb können wir nachts Sterne sehen, die unvorstellbar weit entfernt sind, aber auf der Erde eine Lichtquelle kaum 50 km weit sehen?

Lösung

Lichtbrechung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Lichtbrechung*.

- (*) Ein optisches Medium hat eine Brechzahl von $n = 1,48$. Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit c in diesem optischen Medium?

Lösung

- (*) Licht breitet sich in einem optischen Medium mit $c = 2,29 \cdot 10^8$ m/s aus. Wie groß ist die Brechzahl n des optischen Mediums?

Lösung

- (**) Ein Lichtstrahl, der sich zunächst in Luft ($n_1 = 1$) ausbreitet, fällt in einem Winkel $\alpha = 30,0^\circ$ auf die Oberfläche eines transparenten Materials mit einer Brechzahl $n_2 = 1,45$ Lichtstrahl. Wie groß ist der Winkel β des gebrochenen Lichtstrahls?

Lösung

- (**) Ein Lichtstrahl geht von Quarzglas ($n_1 = 1,46$) in Flintglas ($n_2 = 1,70$) über. Wie groß ist hierbei die relative Brechzahl $\frac{n_2}{n_1}$? Wie groß ist der Winkel β des gebrochenen Lichtstrahls, wenn der Winkel des einfallenden Lichtstrahls $\alpha = 20^\circ$ beträgt?

Lösung

- (**) Ein Lichtstrahl, der sich zunächst in Luft ($n_1 = 1$) ausbreitet, fällt in einem Winkel $\alpha_1 = 50,0^\circ$ auf die Oberfläche eines transparenten Materials. Der Winkel des gebrochenen Lichtstrahls beträgt $\beta_1 = 30,9^\circ$. Im gleichen Winkel $\alpha_2 = \beta_1$ trifft der Lichtstrahl auf ein zweites transparentes Material, wobei der Winkel des zum zweiten mal gebrochenen Lichtstrahls $\beta_2 = 33,6^\circ$ beträgt. Wie groß sind die beiden Brechzahlen n_2 und n_3 beider Materialien?

Lösung

- (**) Wie groß ist der Grenzwinkel α_{\max} , wenn ein Lichtstrahl von Diamant ($n_1 = 2,4$) in Luft ($n_2 = 1$) übergeht? Was passiert, wenn für den Einfallswinkel $\alpha > \alpha_{\max}$ gilt?

Lösung

- (*) In welchen zwei möglichen Fällen wird Licht, das von einem durchsichtigen Medium in ein anderes übergeht, *nicht* gebrochen?

Lösung

Linsensysteme

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Linsensysteme*.

- (*) Eine Sammellinse hat eine Brennweite von $f = 150$ mm. Wie groß ist ihre Brechkraft D ?

Lösung

- (*) Eine Zerstreuungslinse hat eine Brechkraft von $D = -4,0$ dpt. Wie groß ist ihre Brennweite f ?

Lösung

- (*) Welche Brennweite f_{ges} hat eine Kombination zweier Sammellinsen, deren Brennweiten $f_1 = 50$ mm und $f_2 = 75$ mm betragen?

Lösung

- (**) Die Brechkraft einer dünnen Linse beträgt $D = 5,0$ dpt. Ein Gegenstand befindet sich im Abstand $g = 60$ cm vor der Linse. In welcher Entfernung b von der Linse befindet sich das Bild des Gegenstands? Wie groß ist der Abbildungsmaßstab $\tilde{\beta}$?

Lösung

- (**) Eine Zerstreuungslinse hat eine Brechkraft von $-8,0$ dpt. Wie groß ist die Brennweite der Linse, und an welcher Stelle b befindet sich das eines Gegenstands, der sich in $g = 9,0$ cm Entfernung von der Linse befindet?

Lösung

Optische Geräte

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Optische Geräte*.

- (*) Ein Kepler-Fernrohr hat ein Objektiv mit einer Brennweite von $f_{\text{Obj}} = 32$ cm und ein Okular mit einer Brennweite von $f_{\text{Ok}} = 4$ cm. Welche Vergrößerung hat das Fernrohr insgesamt?

Lösung

Aufgaben zur Wärmelehre

Temperatur und Wärme

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Temperatur und Wärme*.

- (*) Wie viel Grad Fahrenheit entsprechen einer Temperatur von $20\text{ }^\circ\text{C}$?

Lösung

- (*) Ab einer Körpertemperatur von über $40\text{ }^\circ\text{C}$ spricht man bei einem Menschen von „hohem Fieber“. Wie viel Kelvin beziehungsweise Grad Fahrenheit entsprechen dieser Temperatur?

Lösung

Wärmekapazität und Phasenübergänge

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Wärmekapazität und Phasenübergänge*.

- (**) Welche Wärmemenge Q ist nötig, um $m = 5\text{ kg}$ Eis mit einer Temperatur von $T = 0\text{ }^\circ\text{C}$ und einer spezifischen Schmelzwärme von $q_s = 334\text{ kJ/kg}$ zu schmelzen? Auf welche Temperatur T_2 könnten $m = 5\text{ kg}$ Wasser mit einer Temperatur von $T_1 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ und einer spezifischen Wärmemenge von $c = 4,2\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ mit der gleichen Wärmemenge erwärmt werden?

Lösung

- (**) Wie viel Energie ist mindestens notwendig, um $V = 3,0\text{ l}$ Wasser mit einer spezifischen Wärmekapazität von $4,2\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ zum Sieden zu bringen, wenn die Temperatur des Wassers zunächst $20\text{ }^\circ\text{C}$ beträgt? Wie lange dauert dieser Vorgang mindestens, wenn die Heizleistung $2,0\text{ kW}$ beträgt? (Wärmeverluste sollen bei dieser Aufgabe vernachlässigt werden.)

Lösung

Ausbreitung von Wärme

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Ausbreitung von Wärme*.

- (*) Wie groß ist der Wärmestrom I_Q durch ein 1 m^2 großes Fenster mit einfacher, 4 mm dicker Verglasung (Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$), wenn die Temperatur an der Innenseite $20\text{ }^\circ\text{C}$ und an der Außenseite $5\text{ }^\circ\text{C}$ beträgt?

Lösung

- (**) Wie groß ist der Wärmestrom I_Q durch ein $A = 2\text{ m}^2$ großes Fenster mit doppelter Verglasung (Dicke der Scheiben je 4 mm, Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$), zwischen denen ein 1 cm breiter Luftspalt mit einer Wärmeleitfähigkeit von $\lambda_2 = 0,025 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$ liegt? Die Temperatur an der Innenseite beträgt wiederum $20\text{ }^\circ\text{C}$ und an der Außenseite $5\text{ }^\circ\text{C}$.

Lösung

- (**) Um welchen Faktor steigt die Leistung der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers, wenn man seine Oberflächentemperatur verdoppelt? Um welchen Faktor steigt die Strahlungsleistung, wenn die Oberflächentemperatur von $T_1 = 10\text{ }^\circ\text{C}$ auf $T_2 = 40\text{ }^\circ\text{C}$ erhöht wird?

Lösung

Ausdehnung bei Erwärmung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Ausdehnung bei Erwärmung*.

- (*) Im Hochsommer wird ein Lineal aus Metall in der Sonne liegen gelassen und erwärmt sich. Kann man das erhitzte Lineal weiterhin – trotz der Ausdehnung bei Erwärmung – zur Längenmessung verwenden?

Lösung

- (*) Ein Bimetall-Streifen besteht aus zwei aufeinander gewälzten Blechstreifen, beispielsweise aus Aluminium ($\alpha_{\text{Al}} = 0,024 \frac{\text{mm}}{\text{m}\cdot\text{K}}$) und Chrom-Stahl ($\alpha_{\text{FeCr}} = 0,010 \frac{\text{mm}}{\text{m}\cdot\text{K}}$). In einem Bügeleisen soll sich der Bimetallstreifen bei ausreichender Erwärmung nach oben verbiegen und die Heizung unterbrechen. Welches Metall muss oben, welches unten liegen?

Lösung

- (*) Wie lang wird ein $l = 120$ m langer Kupferdraht ($\alpha_{\text{Cu}} = 0,0168 \frac{\text{mm}}{\text{m}\cdot\text{K}}$), wenn er um $\Delta T = 50$ K erhitzt wird?

Lösung

- (*) Welchen Längenschwankungen ist eine bei einer Temperatur von $T_1 = 15$ °C insgesamt $l_1 = 300$ m lange Brücke aus Beton ($\alpha_{\text{Beton}} = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$) unterworfen, wenn sie im Winter auf $T_2 = -15$ °C abkühlt beziehungsweise sich im Sommer auf $T_3 = 40$ °C erhitzt?

Lösung

- (*) An einem Sommertag scheint die Sonne auf einen Tank aus Stahl ($\alpha = 11,8 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$) mit einem Volumen von $V_0 = 50$ l; der Tank erhitzt sich dabei von $T_0 = 15$ °C auf 50 °C. Auf welches Volumen dehnt sich der Tank aus? Um welches Volumen würde sich ein gleiches Volumen an Benzin ($\gamma = 1,06 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$) bei gleicher Temperaturdifferenz ausdehnen?

Lösung

- (*) Inwiefern verhält sich Wasser bei der Ausdehnung durch Erwärmung anders als andere Flüssigkeiten?

Lösung

- (*) Warum erhitzt sich beim Zusammendrücken einer Luftpumpe die Luft (und damit auch die Luftpumpe)? Wie lässt sich dieser Effekt mit Hilfe des Teilchenmodells erklären?

Lösung

- (**) Wie verändert sich die Molekülbewegung eines idealen Gases bei der Abkühlung bis zum absoluten Nullpunkt? Was passiert mit realen Gasen, bevor sie den absoluten Nullpunkt erreichen?

Lösung

- (**) Ein Gas mit einem Volumen von $V_1 = 30$ cm³, einem Druck $p_1 = 1$ bar (abs) und einer Temperatur $T_1 = 300$ K wird erwärmt. Dabei steigt seine Temperatur auf $T_2 = 500$ K; gleichzeitig wird der Druck auf $p_2 = 4$ bar (abs.) erhöht. Welches Volumen nimmt das Gas nach dieser Zustandsänderung an?

Lösung

- (*) Ein ungeheiztes Zimmer mit einer Fläche von 20 m^2 und einer Höhe von $2,5\text{ m}$ wird im Winter von $T_1 = 12^\circ\text{C}$ auf $T_2 = 20^\circ\text{C}$ aufgeheizt. Wie viel Luft muss dabei aus dem Zimmer entweichen, wenn der Luftdruck während der Erwärmung konstant bleibt?

Lösung

- (**) Ein Druckbehälter mit einem Volumen von 500 l ist mit Luft gefüllt, wobei der Überdruck $p_1 = 3 \cdot 10^5\text{ Pa}$ beträgt. Wieviel Luft mit einem normalen Atmosphärendruck $p_0 = 1,0 \cdot 10^5\text{ Pa}$ müssen zusätzlich in den Behälter gepumpt werden, damit ein Überdruck von $p_2 = 8 \cdot 10^5\text{ Pa}$ entsteht?

Lösung

Allgemeine Gasgleichung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Allgemeine Gasgleichung*.

- (**) Wie viele Moleküle sind ungefähr in $V = 1,0\text{ l}$ Luft unter Normbedingungen enthalten?

Lösung

- (**) Wie groß ist die Dichte von Luft in einem Gefäß, wenn dieses bei einer Temperatur von $T = 20^\circ\text{C}$ bis auf ein Ultrahochvakuum mit einem Restdruck von $p = 1 \cdot 10^{-10}\text{ Pa}$ leergepumpt wird? Wie viele Teilchen befinden sich dabei in $V = 1\text{ cm}^3$ dieses Restgases?

Lösung

Aufgaben zu Elektrizität und Magnetismus

Elektrische Ladung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Elektrische Ladung*.

- (*) Warum laden sich beim Reiben zweier Körper stets *beide* Körper elektrisch auf?

Lösung

Stromstärke, Spannung und Widerstand

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Stromstärke, Spannung und Widerstand*.

Ohmsches Gesetz

- (*) Die Stromquelle eines Stromkreises stellt eine Spannung von $U = 5,0\text{ V}$ bereit. Welchen Widerstand hat der Stromkreis insgesamt, wenn die Stromstärke $I = 0,2\text{ A}$ beträgt?

Lösung

- (*) Der Gesamt-Widerstand in einem Stromkreis beträgt $R = 800\ \Omega$, die Stromquelle stellt eine Spannung von $U = 12\text{ V}$ bereit. Wie groß ist dabei der Betrag der Stromstärke?

Lösung

- (*) Wie groß ist die Stromstärke in einem Stromkreis mit einem Gesamt-Widerstand von $75\ \Omega$, wenn eine Spannung von $U = 230\text{ V}$ angelegt wird?

Lösung

- (*) Welche Spannung ist nötig, um in einem Stromkreis mit einem Gesamtwiderstand von $R = 50\ \Omega$ eine Stromstärke von $I = 0,3\text{ A}$ zu erreichen?

Lösung

- (*) Bei einer Spannung von $U = 230\text{ V}$ beträgt die Stromstärke eines Stromkreises $I = 4,0\text{ A}$. Wie groß ist der Gesamt-Widerstand des Stromkreises?

Lösung

Spezifischer Widerstand

- (*) Wie groß ist der elektrische Widerstand eines Kupferdrahts mit einem Radius von $r = 2,0\text{ mm}$ und einer Länge von $l = 10\text{ m}$? Der spezifische Widerstand von Kupfer beträgt $\rho_{\text{Cu}} = 0,0156\ \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$.

Lösung

-
- (*) Wie groß ist der elektrische Widerstand eines Kupferdrahts mit einem Radius von $r = 8,0 \text{ mm}$ und einer Länge von $l = 11,4 \text{ km}$? Der spezifische Widerstand von Kupfer beträgt $\rho_{\text{Cu}} = 0,0156 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$. Welchen Widerstand hätte ein baugleicher Draht aus Aluminium ($\rho_{\text{Al}} = 0,0265 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$) oder Edelstahl ($\rho_{\text{Edelstahl}} = 0,720 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$)?

Lösung

- (*) Welchen Durchmesser muss ein Eisendraht mindestens haben, wenn er bei einer Länge von $l = 50 \text{ m}$ einen elektrischen Widerstand von weniger als $R = 1,0 \Omega$ aufweisen soll? Der spezifische Widerstand von Eisen beträgt circa $\rho_{\text{Fe}} = 0,125 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$.

Lösung

Elektrische Felder

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Elektrische Felder*.

- (*) Im Blitzgerät einer Foto-Kamera ist ein Kondensator mit einer Kapazität von $C = 220 \mu\text{F}$ als Energiespeicher eingebaut. Wie viel Energie wird beim Auslösen des Blitzes beziehungsweise Entladen des Kondensators freigesetzt, wenn der Kondensator mit einer Ladespannung $U = 6,0 \text{ V}$ voll geladen war?

Lösung

- (*) Ein Strom mit einer konstanten Stärke von 3 mA fließt durch einen Kondensator mit einer Kapazität von $470 \mu\text{F}$. Welche Spannung hat sich nach 1, 2, 3, 4 beziehungsweise 5 Sekunden aufgebaut? Welche Energiemenge sind zu den jeweiligen Zeitpunkten im Kondensator gespeichert?¹

Lösung

Magnetismus

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Magnetismus*.

- (*) Der Nordpol einer Magnetnadel zeigt annähernd zum geographischen Nordpol der Erde. Was folgt daraus für den magnetischen Nord- bzw. Südpol der Erde, wenn man bedenkt, dass sich gleichnamige Pole abstoßen und ungleichnamige Pole anziehen?

Lösung

¹ Diese Aufgabe stammt aus Clifford Wolfs Skript, Seite 33.

Elektrische Arbeit, Energie und Leistung

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den Abschnitt *Elektrische Arbeit, Energie und Leistung*.

- (*) Wie groß ist die Stromstärke, die durch eine 40 W-Glühbirne fließt, die mit 230 V Spannung betrieben wird? Welche Energiemenge E wird dabei bei einer Betriebsdauer von $t = 6,0$ h benötigt? Welche Ladungsmenge Q fließt in dieser Zeit durch die Glühbirne? $Q = I \cdot t$

Lösung

- (**) Eine Glühbirne wird mit einer Leistung von $P = 2,5$ W bei einer Spannung von $V = 6,0$ V über eine Zeitdauer von $\Delta t = 5,0$ min betrieben. Wie viele Elektronen fließen in dieser Zeit durch die Glühbirne?

Lösung

- (*) Die Leistung eines Wasserkochers ist mit 1800 W angegeben. Wie groß ist die Stromstärke, die sich durch Anlegen einer Spannung von 230 V ergibt?

Lösung

- (**) Die an einem elektrischen Heizgerät anliegende Spannung U soll um 25% erhöht werden. Um wie viel Prozent steigt dadurch die elektrische Leistung des Heizgeräts, wenn der Heizwiderstand R als konstant angenommen werden kann?

Lösung

Aufgaben zur Atom- und Kernphysik

Lösungen

Lösungen zur Mechanik

Körpereigenschaften

Volumen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Volumen*.

- Wird die Farbe gleichmäßig aufgetragen, so gilt für das zum Anstreichen einer Fläche A mit einer Schichtdicke h benötigte Farbvolumen:

$$V = A \cdot h$$

Umgekehrt kann aus dieser Formel die Dicke h der Farbschicht berechnet werden, wenn das Volumen V und die Fläche A bekannt sind. Dazu muss nur berücksichtigt werden, dass ein Liter einem Kubik-Dezimeter entspricht:

$$1 \text{ l} \equiv 1 \text{ dm}^3 = \frac{1}{1000} \text{ m}^3$$

Somit gilt:

$$h = \frac{V}{A} = \frac{\frac{1}{1000} \text{ m}^3}{6 \text{ m}^2} \approx 0,00017 \text{ m} = 0,17 \text{ mm}$$

Bei der Etikettenangabe wird somit davon ausgegangen, dass die Farbe mit einer Schichtdicke von knapp 0,2 mm aufgetragen wird.

Zurück zur Aufgabe

- Die Fläche A der (rechteckigen) Blechtafel ist gleich dem Produkt aus ihrer Länge l und Breite b :

$$A = l \cdot b = 1,50 \text{ m} \cdot 1,20 \text{ m} = 1,80 \text{ m}^2$$

Das Volumen V der nötigen Lackschicht kann damit als Produkt der Fläche A und der (gleichmäßigen) Schichtdicke $h = 0,1 \text{ mm} = 0,0001 \text{ m}$ berechnet werden:

$$V = A \cdot h = 1,8 \text{ m}^2 \cdot 0,0001 \text{ m} = 0,00018 \text{ m}^3 = 0,18 \text{ dm}^3$$

Zum Streichen der Fläche mit der angegebenen Schichtdicke sind somit je Fläche rund $0,2 \text{ dm}^3 = 0,2 \text{ l}$ nötig; für beide Seiten sind entsprechend 0,4 l Lack notwendig.

Zurück zur Aufgabe

Dichte

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Dichte*.

- In Kork und Styropor ist verhältnismäßig viel Luft eingelagert. Körper aus Kork oder Styropor nehmen daher bei einer bestimmten Masse m ein großes Volumen V ein. Die Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ ist somit gering.

Zurück zur Aufgabe

- Die Formel für die Dichte ρ eines Körpers lautet $\rho = \frac{m}{V}$. Die Masse m und das Volumen V des Würfels sind bekannt. Eingesetzt ergibt sich:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{178 \text{ g}}{20 \text{ cm}^3} = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Die Dichte des Würfels beträgt $8,9 \text{ g/cm}^3$. Da Kupfer die gleiche Dichte besitzt, handelt es sich wahrscheinlich um einen Würfel aus Kupfer.

Zurück zur Aufgabe

- Eine mögliche Lösung besteht darin zu überlegen, dass Kubick-Dezimeter gerade einem Liter entspricht:

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$$

Quecksilber hat eine Dichte von $13,6 \text{ kg/dm}^3$, d.h. es passen $m = 13,6 \text{ kg}$ in ein Volumen $V = 1 \text{ l}$. Nun steht in der $0,5$ -Liter-Flasche nur die Hälfte dieses Volumens zur Verfügung, so dass auch nur die Hälfte dieser Masse hinein passt – das sind $6,8 \text{ kg}$. Quecksilber der Masse $m = 6 \text{ kg}$ füllt die Flasche somit nicht aus.

Ein anderer Lösungsweg ergibt sich, indem man berechnet, welches Volumen die sechs Kilogramm Quecksilber einnehmen:

Aus der gegebenen Dichte $\rho = \frac{m}{V} = 13,6 \text{ kg/dm}^3$ des Quecksilbers und seiner Masse $m = 6 \text{ kg}$ lässt sich das Volumen des Quecksilbers bestimmen:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{6 \text{ kg}}{13,6 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}} = 0,441 \text{ dm}^3 = 0,441 \text{ l}$$

Dieses Volumen ist kleiner als $0,5$ Liter, also kann man es in die Flasche füllen.

Zurück zur Aufgabe

- Würde Glaswolle ausschließlich aus dem Glasgemisch bestehen, so würde sich aus der Dichte $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3 = 2500 \text{ kg/m}^3$ bei einem Volumen von $V = 1 \text{ m}^3$ eine Masse von $m = 2500 \text{ kg}$ ergeben:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho \cdot V$$

$$m = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1 \text{ m}^3 = 2500 \text{ kg}$$

Tatsächlich wiegt ein Kubikmeter Glaswolle jedoch nur 100 kg . Das Glasgemisch kann somit – das Gewicht der Luft wird an dieser Stelle vernachlässigt – den entsprechenden Bruchteil des Volumens ausmachen:

$$\frac{V_{\text{Glasgemisch}}}{V_{\text{gesamt}}} = \frac{100}{2500} = 0,04 = 4\%$$

Der Anteil des Glasgemisches am Gesamtvolumen beträgt somit 4% .

Zurück zur Aufgabe

-
- Das Volumen $V = 75,0 \text{ cm}^3$ an Wasser, das aus dem Überlaufgefäß heraus fließt, entspricht dem Volumen des Holz-Blei-Klotzes.

Das Bleistück mit der Masse $m_{\text{Pb}} = 400 \text{ g}$ und der Dichte $\rho_{\text{Pb}} = 11,3 \text{ g/cm}^3$ hat alleine folgendes Volumen:

$$V_{\text{Pb}} = \frac{m_{\text{Pb}}}{\rho_{\text{Pb}}} = \frac{400 \text{ g}}{11,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 35,4 \text{ cm}^3$$

Das restliche Volumen $V - V_{\text{Pb}} = 75,0 \text{ cm}^3 - 35,4 \text{ cm}^3 = 39,6 \text{ cm}^3$ entspricht somit dem Volumen V_{Holz} des Holzstücks. Da die Masse $m_{\text{Holz}} = 27,5 \text{ g}$ des Holzstücks ebenfalls bekannt ist, kann seine Dichte durch Einsetzen der Werte in die Dichte-Formel berechnet werden:

$$\rho_{\text{Holz}} = \frac{m_{\text{Holz}}}{V_{\text{Holz}}} = \frac{27,5 \text{ g}}{39,6 \text{ cm}^3} \approx 0,69 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Bei der Holzprobe könnte es sich nach Tabelle *Dichte einiger Festkörper* somit um Buche handeln.

Zurück zur Aufgabe

- Das Volumen des Drahts ($r = 1,00 \text{ mm} = 0,10 \text{ cm}$; $l = 100 \text{ m} = 10\,000 \text{ cm}$) kann mit Hilfe der Volumen-Formel für zylindrische Körper berechnet werden:

$$V_{\text{Draht}} = \pi \cdot r^2 \cdot l = \pi \cdot 0,01 \text{ cm}^2 \cdot 10\,000 \text{ cm} \approx 314 \text{ cm}^3$$

Die Masse des Kupferdrahts $m_{\text{Draht}} = V_{\text{Draht}} \cdot \rho_{\text{Cu}} = 314 \text{ cm}^3 \cdot 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 2795 \text{ g}$ beträgt somit rund $2,8 \text{ kg}$.

Zurück zur Aufgabe

- Die Masse des Schnees ist gleich dem Produkt aus seinem Volumen und seiner Dichte:

$$m = \rho \cdot V = 200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (3,00 \text{ m} \cdot 2,00 \text{ m} \cdot 0,25 \text{ m}) = 300 \text{ kg}$$

Die Schneelast hat somit eine Masse von 300 kg .

Zurück zur Aufgabe

Kinematik

Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit*.

Eindimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

- Alle Teil-Aufgaben können mittels der Formel $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ beziehungsweise $\bar{v} = \frac{\Delta s_{\text{ges}}}{\Delta t_{\text{ges}}}$ berechnet werden:

- Der Läufer legt eine Wegstrecke von $\Delta s_{\text{ges}} = 8,0 \text{ km}$ in einer Zeitspanne von $\Delta t_{\text{ges}} = 0,5 \text{ h}$ zurück. Somit beträgt seine Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s_{\text{ges}}}{\Delta t_{\text{ges}}} = \frac{8,0 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

- Der Radfahrer legt kontinuierlich $\Delta s = 36 \text{ m}$ in $\Delta t = 6 \text{ s}$ zurück. Seine Geschwindigkeit beträgt damit:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36 \text{ m}}{6 \text{ s}} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 21,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Bei der letzten Umrechnung wurde verwendet, dass $1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist.

- Der Weltrekord-Läufer legt $\Delta s_{\text{ges}} = 100 \text{ m}$ in $\Delta t_{\text{ges}} = 9,58 \text{ s}$ zurück. Für seine Durchschnittsgeschwindigkeit gilt damit:

$$v = \frac{\Delta s_{\text{ges}}}{\Delta t_{\text{ges}}} = \frac{100 \text{ m}}{9,58 \text{ s}} \approx 10,44 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 37,58 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

- Der Zug legt $\Delta s_{\text{ges}} = 245 \text{ km}$ in einer Zeit von $\Delta t_{\text{ges}} = 3,5 \text{ h}$ zurück. Somit ergibt sich:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s_{\text{ges}}}{\Delta t_{\text{ges}}} = \frac{245 \text{ km}}{3,5 \text{ h}} = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

- Um die Wegstrecke zu berechnen, die das Auto in einer Sekunde zurücklegt, muss man die in km/h angegebene Geschwindigkeit in m/s umrechnen:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \quad \Rightarrow \quad v = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{108 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

In einer Sekunde legt das Auto somit 30 m zurück. Die Strecke, die das Fahrzeug in einer Minute (60 s) zurück legt, ist das 60-fache dieser Strecke, also $1800 \text{ m} = 1,80 \text{ km}$.

- Um die Zeit zu berechnen, die man bei einer Geschwindigkeit von $v = 5,0 \text{ km/h}$ für eine Strecke von $s = 800 \text{ m}$ benötigt, muss die Geschwindigkeit wiederum in m/s umgerechnet werden:

$$v = 5,0 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{5,0 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 1,39 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Löst man nun die Formel $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nach Δt auf und setzt die obigen Werte ein, erhält man:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$
$$\Delta t = \frac{800 \text{ m}}{1,39 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 576 \text{ s}$$

Man benötigt somit etwa 576 Sekunden (das entspricht rund 9,6 min).

- Um die benötigte Zeit zu berechnen, die das Licht von der Sonne bis zur Erde benötigt, muss die Geschwindigkeitsformel $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ wieder nach der Zeitdauer Δt aufgelöst werden:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

Die Strecke, die das Licht von der Sonne bis zur Erde zurücklegt, beträgt $\Delta s = 150\,000\,000$ km. Die Geschwindigkeit des Lichts liegt bei $300\,000$ km/s. Eingesetzt ergibt sich:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{150\,000\,000 \text{ km}}{300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 500 \text{ s} = 8 \text{ min } 20 \text{ s}$$

Das Licht benötigt für seinen Weg zur Erde somit etwas mehr als 8 Minuten.

Zurück zur Aufgabe

- Um den vom Schall zurückgelegten Weg zu berechnen, muss die Geschwindigkeitsformel $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nach der Wegstrecke Δs aufgelöst werden:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta s = v \cdot \Delta t$$

Die Zeit, welche der Schall auf seinem Weg zur Felswand und zurück benötigt, ist gleich $\Delta t = 5$ s. Die Schallgeschwindigkeit in Luft beträgt $v = 330$ m/s. Eingesetzt ergibt sich:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} = 1650 \text{ m}$$

Die Gesamtstrecke, welche der Schall auf dem Hin- und Rückweg durchläuft, beträgt 1650 m. Die Entfernung der Felswand vom Wanderer ist gleich der Hälfte dieser Strecke, also rund 0,8 km.

Zurück zur Aufgabe

- Je nach Betrachtungsweise sind zwei Aussagen möglich:
 1. Der Fahrgast ändert, genauso wie der Zug, seine Lage gegenüber dem Bahnhofsgebäude (als feststehend angenommen). Der Fahrgast ist in Bewegung.
 2. Der Fahrgast ändert nicht seine Lage gegenüber dem Abteil, in dem er sitzt. Der Fahrgast ist in Ruhe gegenüber dem Abteil.

Übrigens soll Albert Einstein einmal einen Schaffner gefragt haben: „*Wann hält denn Ulm an diesem Zug?*“

Die Wahl eines Bezugspunktes, gegenüber dem die weiteren Bewegungen beschrieben werden, ist frei und ändert nichts an den physikalischen Gesetzmäßigkeiten. Wir nehmen beispielsweise gerne auf der Erde ‚ruhende‘ Objekte als feste Bezugspunkte an, obwohl sich die Erde selbst mit ca. 30 km/s um die Sonne bewegt!

Zurück zur Aufgabe

- Wenn das Fahrzeug einen Läufer einholt, so ist dies gleichbedeutend damit, dass zu diesem Zeitpunkt beide die gleiche Wegstrecke zurückgelegt haben, also $\Delta s_F = \Delta s_L$ ist.

Bis das Fahrzeug nach $\Delta t = 30 \text{ min} = 0,5 \text{ h}$ startet, hat sich der Läufer mit $v_L = 15 \text{ km/h}$ einen „Vorsprung“ von $15 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} = 7,5 \text{ km}$ erkämpft. Für den Treffpunkt muss damit gelten:

$$\begin{aligned}\Delta s_F &= \Delta s_L \\ v_F \cdot \Delta t &= v_L \cdot \Delta t + 7,5 \text{ km}\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Δt die Zeit, die ab dem Start des Fahrzeugs vergeht. Die Gleichung enthält nur Δt als unbekannte Größe und kann somit unmittelbar aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}v_F \cdot \Delta t - v_L \cdot \Delta t &= 7,5 \text{ km} \\ (v_F - v_L) \cdot \Delta t &= 7,5 \text{ km} \\ \Delta t &= \frac{7,5 \text{ km}}{v_F - v_L} = \frac{7,5 \text{ km}}{(35 - 15) \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0,375 \text{ h}\end{aligned}$$

Das Fahrzeug ist bis zum Treffpunkt $\Delta t = 0,375 \text{ h}$ unterwegs, bis es den Läufer einholt. In dieser Zeit legt es folgende Wegstrecke zurück:

$$\Delta s = v_F \cdot \Delta t = 35 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,375 \text{ h} = 13,125 \text{ km}$$

In dieser Entfernung vom Startpunkt treffen sich der Läufer und das Fahrzeug also; der Läufer war insgesamt $(0,5 + 0,375) \text{ h} = 0,875 \text{ h}$ unterwegs.

Alternativ kann die Aufgabe auch mittels einer anders formulierten Bedingung für den Treffpunkt gelöst werden. Da das Fahrzeug immer eine konstante Geschwindigkeit hat und erst nach einer halben Stunde startet, könnte es ebenso zeitgleich starten, aber von einer Stelle aus, die sich $35 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} = 17,5 \text{ km}$ vor dem Startpunkt befindet. Die Gleichung für den Treffpunkt kann also gleichwertig folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned}s_F &= s_L \\ v_F \cdot t - 17,5 \text{ km} &= v_L \cdot t\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet t die insgesamt verstrichene Zeit, da beide Fahrzeuge zum gleichen Zeitpunkt starten. Die Gleichung kann wiederum nach t aufgelöst werden, man erhält dabei $t = 0,875 \text{ h}$.

Eine dritte Lösungsmöglichkeit liegt darin, bei der Formulierung der Gleichung für den Treffpunkt die unterschiedlichen Startzeiten zu berücksichtigen. Eine so aufgestellte Gleichung lautet;

$$v_F \cdot (t - 0,5 \text{ h}) = v_L \cdot t$$

Bei dieser Formulierung wird berücksichtigt, dass das Fahrzeug insgesamt um $\Delta t = 30 \text{ min} = 0,5 \text{ h}$ weniger lang unterwegs ist. Löst man die Gleichung nach t auf, erhält man wiederum $t = 0,875 \text{ h}$ als Ergebnis.

Zurück zur Aufgabe

-
- Der Treffpunkt s_T beider Fahrzeuge lässt sich bestimmen, indem man die jeweiligen Ortsfunktionen aufstellt gleichsetzt. Wählt man ein Koordinatensystem so, dass der Ort A mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt und bezeichnet man die Richtung von A nach B als „positiv“, so lauten die Ortsfunktionen der beiden Fahrzeuge:

$$\begin{aligned}s_1 &= v_1 \cdot t \\ s_2 &= -v_2 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des zweiten Fahrzeugs wird dabei negativ gewertet, da sie in die entgegengesetzte Richtung verläuft. Treffen sich beide Fahrzeuge, so ist $s_1 = s_2$, und damit:

$$\begin{aligned}v_1 \cdot t &= -v_2 \cdot t + s_0 \\ \Rightarrow v_1 \cdot t + v_2 \cdot t &= s_0\end{aligned}$$

In dieser Gleichung kann auf der linken Seite t ausgeklammert werden. Man erhält damit für die Zeit des Treffpunkts:

$$t \cdot (v_1 + v_2) = s_0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{s_0}{v_1 + v_2}$$

Setzt man die gegebenen Werte $v_1 = 30,0 \text{ km/h}$, $v_2 = 50,0 \text{ km/h}$ und $s_0 = 100 \text{ km}$ in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$t = \frac{s_0}{v_1 + v_2} = \frac{100 \text{ km}}{30,0 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 50,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1,25 \text{ h}$$

Beide Fahrzeuge treffen sich also nach $t = 1,25$ Stunden. Um die Entfernung s zu bestimmen, die beide Fahrzeuge zu diesem Zeitpunkt vom Koordinatenursprung (dem Ort A) haben, kann man diese Zeit in die Gleichung $s_1 = v_1 \cdot t$ einsetzen und erhält:

$$s = v_1 \cdot 1,25 \text{ h} = 30,0 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,25 \text{ h} = 37,5 \text{ km}$$

Beide Fahrzeuge treffen sich somit $s = 37,5 \text{ km}$ vom Ort A entfernt.

Zurück zur Aufgabe

Mehrdimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Mehrdimensionale Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit*.

- Um den $s_y = 100$ m breiten Fluss mit einer Geschwindigkeit von $v_y = 0,5$ m/s zu überqueren, ist folgende Zeit nötig:

$$v_y = \frac{s_y}{t} \iff t = \frac{s_y}{v_y} = \frac{100 \text{ m}}{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 200 \text{ s}$$

In dieser Zeit wird der Schwimmer durch die Strömung um $s_x = 35$ m abgetrieben. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt somit:

$$v_x = \frac{s_x}{t} = \frac{35 \text{ m}}{200 \text{ s}} = 0,175 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dies entspricht einer (mittleren) Strömungsgeschwindigkeit von etwa $0,63$ km/h.

Zurück zur Aufgabe

- Im folgenden wird angenommen, dass sich das erste Objekt entlang der x -Achse bewegt. Dann gilt für \vec{v}_1 und \vec{v}_2 :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Betrag dieses Vektors ist $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Nach $\Delta t = 15$ s gilt für die Ortskoordinaten \vec{s}_1 und \vec{s}_2 :

$$\vec{s}_1 = v_1 \cdot t = \begin{pmatrix} 5 \cdot 15 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{s}_2 = v_2 \cdot t = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \cdot 15 \end{pmatrix}$$

Die Entfernung beider Objekte voneinander ergibt sich aus der Differenz der beiden Ortsvektoren. Aus Sicht des ersten Gegenstands gilt:

$$\Delta \vec{s}_{\text{rel}} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 75 \\ -45 \end{pmatrix}$$

Der Betrag dieses Vektors ist:

$$|\Delta \vec{s}_{\text{rel}}| = \sqrt{75^2 + (-45)^2} \approx 87,5 \text{ m}$$

Die Objekte sind nach 15 s somit rund $87,5$ m voneinander entfernt.

Zurück zur Aufgabe

Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Bewegungen mit konstanter Beschleunigung*.

Eindimensionale Bewegungen mit konstanter Beschleunigung

- Die Beschleunigung des Radfahrers ist gleich dem Verhältnis aus der Veränderung seiner Geschwindigkeit $\Delta v = 30 \text{ km/h} \approx 8,33 \text{ m/s}$ und der dafür benötigten Zeit $\Delta t = 8,0 \text{ s}$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{8,0 \text{ s}} \approx 1,04 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Beschleunigung des Radfahrers entspricht somit rund $1,0 \text{ m/s}^2$.

Zurück zur Aufgabe

- Die Geschwindigkeitsänderung Δv Fahrzeugs beträgt $100 \text{ km/h} \approx 27,28 \text{ m/s}$, die dafür benötigte Zeit $\Delta t = 10 \text{ s}$. Für die Beschleunigung des Fahrzeugs folgt somit:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{27,28 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} \approx 2,73 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Beschleunigung des Fahrzeugs beträgt also rund $2,8 \text{ m/s}^2$. Die Beschleunigung beim Abbrems-Vorgang hat den gleichen Betrag, denn sowohl die Geschwindigkeitsänderung Δv als auch die dafür benötigte Zeit Δt sind identisch. Der Beschleunigungswert trägt allerdings beim Bremsvorgang ein negatives Vorzeichen, denn ein Abbremsen entspricht einer Beschleunigung in die entgegengesetzte Richtung.

Zurück zur Aufgabe

- Die Geschwindigkeitsänderung des Fahrzeugs ergibt sich aus der Differenz zwischen der Endgeschwindigkeit $v_2 = 36,5 \text{ m/s}$ (entspricht $131,4 \text{ km/h}$) und der Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = 20,0 \text{ m/s}$ (entspricht $72,0 \text{ km/h}$):

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 36,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 20,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 16,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Teilt man diesen Wert durch die für die Geschwindigkeitsänderung benötigte Zeit $t = 5,0 \text{ s}$, so ergibt sich für die Beschleunigung:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5,0 \text{ s}} = 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Beschleunigung des Fahrzeugs beträgt somit $a = 3,3 \text{ m/s}^2$. Vergleicht man diesen Wert mit dem Wert der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, so erkennt man, dass ein Körper im freien Fall – sofern die Reibung vernachlässigbar ist – eine rund dreifach höhere Beschleunigung erfährt als im beschleunigenden Fahrzeug.

Die Wegstrecke Δs , die das Fahrzeug für den Beschleunigungsvorgang benötigt, beträgt:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 + v_1 \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5,0 \text{ s})^2 + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5,0 \text{ s} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 25 \text{ s}^2 + 100 \text{ m} \approx 141,25 \text{ m} \end{aligned}$$

(Alternativ kann die für den Beschleunigungsvorgang benötigte Strecke auch mittels der „Bremsformel“ $v_2^2 - v_1^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta s$ berechnet werden.)

Das Fahrzeug benötigt somit für den Beschleunigungsvorgang rund 141 m.

Zurück zur Aufgabe

- Während der Reaktionszeit von $\Delta t = 1,0 \text{ s}$ bewegt sich der PKW mit seiner Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 40 \text{ km/h} \approx 11,1 \text{ m/s}$ weiter; für den Reaktionsweg gilt also:

$$s_{\text{Reaktion}} = v_0 \cdot \Delta t = 11,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,0 \text{ s} = 11,1 \text{ m}$$

Der anschließende Bremsweg kann mittels der *Bremsformel* $v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s$ berechnet werden; da die Endgeschwindigkeit v gleich Null ist, folgt:

$$\begin{aligned} -v_0^2 &= 2 \cdot a \cdot s_{\text{Brems}} \quad \iff \quad s_{\text{Brems}} = \frac{-v_0^2}{2 \cdot a} \\ s_{\text{Brems}} &= \frac{-(11,1 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot (-4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})} \approx 13,69 \text{ m} \end{aligned}$$

Der PKW kommt somit nach einem Anhalteweg von rund $s_{\text{Reaktion}} + s_{\text{Brems}} = (11,1 + 13,69) \text{ m} = 24,8 \text{ m}$ gerade noch rechtzeitig vor dem Hindernis zum Stehen.

Zurück zur Aufgabe

- Während des Sprungs wird der Badegast durch die Erdanziehung $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ konstant beschleunigt. Um die Flugzeit zu bestimmen, kann die Formel für die zurückgelegte Wegstrecke $s = 5,0 \text{ m}$ nach der Zeit t aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \iff \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} \\ t &= \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,0 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 1,01 \text{ s} \end{aligned}$$

Die Flugzeit beträgt somit rund 1,0 s. Die Geschwindigkeit beim Eintauchen kann durch Einsetzen der (Erd-)Beschleunigung $a = g$ und der Flugzeit t in die Gleichung $v = a \cdot t$ berechnet werden:

$$v = a \cdot t = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,01 \text{ s} \approx 9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Geschwindigkeit des Badegastes beim Eintauchen beträgt somit rund $9,9 \text{ m/s}$ (entspricht $35,7 \text{ km/h}$).

Zurück zur Aufgabe

- Der Stein wird, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann, mit der konstanten Beschleunigung $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ beschleunigt. Die Endgeschwindigkeit v ist gleich dem Produkt aus der Beschleunigung und der Zeit $t = 1,7 \text{ s}$, während der die Beschleunigung wirkt:

$$v = a \cdot t = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,7 \text{ s} \approx 16,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Geschwindigkeit des Steins beträgt beim Aufprall somit rund $17 \text{ m/s} \approx 60 \text{ km/h}$. Bis zu diesem Zeitpunkt legt der Stein folgende Wegstrecke s zurück:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1,7 \text{ s})^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,89 \text{ s}^2 \approx 14,2 \text{ m}$$

Der Brunnen ist somit (mindestens) 14 m tief.

Zurück zur Aufgabe

- Um die beim Aufprall wirkende Beschleunigung a anhand des Bremsweges (der „Knautschzone“) $\Delta s = 0,5 \text{ m}$ zu ermitteln, kann die Bremsformel $v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s$ genutzt werden; die Endgeschwindigkeit v des Fahrzeugs ist dabei gleich Null, die Beschleunigung erfolgt entgegen der Bewegungsrichtung und hat damit ein negatives Vorzeichen.

Eine Geschwindigkeit von 30 km/h entspricht rund $8,3 \text{ m/s}$. Eingesetzt in die Bremsformel ergibt sich folgende Beschleunigung:

$$|a| = \frac{v_0^2}{2 \cdot s} = \frac{(8,3 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,5 \text{ m}} \approx 69,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Eine Beschleunigung von $69,4 \text{ m/s}^2$ entspricht etwa $7,1 \text{ g}$, also einer gut siebenfachen Erdbeschleunigung. Dies kann ein Mensch noch überleben, wenn auch mit erheblichen Verletzungen und sogar Bewusstlosigkeit gerechnet werden muss.

Trifft der Wagen nicht auf eine Mauer, sondern ein identisches und mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkommendes Fahrzeug, so tritt die gleiche Beschleunigung auf. Beide Fahrzeuge kommen genau in der Mitte zwischen beiden zum Stillstand und haben somit den gleichen Bremsweg, als würden sie gegen eine an dieser Stelle angebrachte Wand fahren. Sind die Fahrzeuge unterschiedlich schwer oder unterschiedlich schnell, so haben beide unterschiedliche Beschleunigungen, die mit Hilfe des *Impulserhaltungssatzes* berechnet werden können.

Erfolgt der Aufprall mit $v_1 = 50 \text{ km/h} \approx 13,9 \text{ m/s}$ oder $v_2 = 100 \text{ km/h} \approx 27,8 \text{ m/s}$, so ergeben sich folgende Beschleunigungen:

$$|a_1| = \frac{v_1^2}{2 \cdot s} = \frac{(13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,5 \text{ m}} \approx 193 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$|a_2| = \frac{v_2^2}{2 \cdot s} = \frac{(27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,5 \text{ m}} \approx 772 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Diese Beschleunigungen entsprechen rund 20 g beziehungsweise 79 g und sind somit lebensgefährlich bzw. tödlich.

Zurück zur Aufgabe

Kreisförmige Bewegungen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Kreisförmige Bewegungen*.

- Wenn die Schnur reißt, fliegt der Stein geradlinig in Richtung seiner Momentangeschwindigkeit \vec{v} weiter, also senkrecht zu der Richtung, welche die Schnur zum Zeitpunkt des Reißens hatte.

Bei der kreisförmigen Bewegung handelt es sich somit um eine beschleunigte Bewegung: Auch wenn sich der Wert seiner Geschwindigkeit nicht ändert, so ändert sich auf einer Kreisbahn doch kontinuierlich die Richtung. Die dazu nötige (Radial-)Kraft wird mittels der Schnur auf den Stein übertragen.

Zurück zur Aufgabe

- Die Umlaufzeit des Kieselsteins kann anhand seiner Kreisfrequenz $f = 1,8 \text{ s}$ berechnet werden:

$$f = \frac{1}{T} \iff T = \frac{1}{f}$$

$$T = \frac{1}{f} = 11,8 \frac{1}{\text{s}} \approx 0,56 \text{ s}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit ω des Kieselsteins gilt:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 1,8 \frac{1}{\text{s}} \approx 11,3 \frac{1}{\text{s}}$$

Für die Bahngeschwindigkeit v des Kieselsteins auf seiner Kreisbahn ($r = \frac{d}{2} = 36 \text{ cm} = 0,36 \text{ m}$) gilt:

$$v = \omega \cdot r = 11,3 \frac{1}{\text{s}} \cdot 0,36 \text{ m} = 4,07 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Kieselstein hat somit eine Bahngeschwindigkeit von etwa $4,1 \text{ m/s} \approx 15 \text{ km/h}$.

Zurück zur Aufgabe

- Der PKW bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$; mit dem Radius $r = \frac{d}{2} = 22,5 \text{ cm} = 0,225 \text{ m}$ folgt für die Winkelgeschwindigkeit ω der Räder:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,225 \text{ m}} \approx 111,1 \frac{1}{\text{s}}$$

Die Winkelgeschwindigkeit beträgt somit rund $111,1 \text{ rad/s}$. Da eine voll Umdrehung einem Drehwinkel von $2 \cdot \pi$ entspricht, folgt für die Drehzahl n :

$$n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{111,1 \frac{1}{\text{s}}}{2 \cdot \pi} \approx 17,7 \frac{\text{U}}{\text{s}}$$

Das Rad führt in je Sekunde somit rund 17,7 Umdrehungen aus.

Zurück zur Aufgabe

- Die Bahngeschwindigkeit $v = \omega \cdot r$ der Zentrifuge lässt sich mit $n = 3000 \text{ U/min}$ und $r = 0,0100 \text{ m}$ folgendermaßen berechnen:

$$v = \omega \cdot r = (n \cdot 2 \cdot \pi) \cdot r = \frac{3000 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,0100 \text{ m}}{60 \text{ s}} \approx 3,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Damit folgt für die Radialbeschleunigung a_φ :

$$a_\varphi = \frac{v^2}{r} = \frac{(3,14 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{0,01 \text{ m}} \approx 986 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Radialbeschleunigung in der Zentrifuge beträgt bei der angegebenen Drehzahl rund 986 m/s^2 ; dies entspricht etwa dem 100-fachen der Erdbeschleunigung g .

Zurück zur Aufgabe

- Um die Radialbeschleunigung zu bestimmen, welche die Erde auf einen Körper am Äquator ausübt, sollte zunächst die Bahngeschwindigkeit $v = \omega \cdot r$ eines auf der Erdoberfläche mitrotierenden Körpers berechnet werden. Auf Höhe des Äquators gilt mit $r_E = 6370 \text{ km}$:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km}}{1 \text{ d}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6370 \cdot 10^3 \text{ m}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \approx 463 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Damit gilt für die Radialkraftbeschleunigung a_φ :

$$a_\varphi = \frac{v^2}{r} = \frac{(463 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{6370 \cdot 10^3 \text{ m}} \approx 0,033 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Radialbeschleunigung beträgt am Äquator somit rund $0,033 \text{ m/s}^2$.

Auf einem nördlich bzw. südlich vom Äquator gelegenen Punkt auf der Erde bewegt sich ein mit der Erde mitrotierender Körper auf einer Kreisbahn mit einem Radius r , der kleiner als der Erdradius r_E ist. Für r gilt in Abhängigkeit vom Breitengrad Φ :

$$\cos \Phi = \frac{r}{r_E} \quad \Leftrightarrow \quad r = r_E \cdot \cos \Phi$$

Für den 45. Breitengrad ($\Phi = 45^\circ$) ergibt sich damit für Rotationsradius r :

$$r = r_E \cdot \cos 45^\circ \approx 4\,505 \text{ km}$$

Für die Bahngeschwindigkeit $v = \omega \cdot r$ des rotierenden Körpers und die Radialkraftbeschleunigung a_φ gilt somit:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4\,505 \text{ km}}{1 \text{ d}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4\,505 \cdot 10^3 \text{ m}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \approx 328 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_\varphi = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(328 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{4\,505 \cdot 10^3 \text{ m}} \approx 0,024 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Radialbeschleunigung durch die Erdrotation beträgt am 45. Breitengrad somit rund nur noch $0,024 \text{ m/s}^2$. Am Nordpol verschwindet sie völlig, da in diesem Fall $\cos \Phi = \cos 90^\circ = 0$ und somit $r = r_E \cdot \cos \Phi = 0$ gilt.

Die Werte der Radialbeschleunigungen an den verschiedenen Stellen der Erde bewirken eine Verringerung der Erdbeschleunigung g . An den Polen ist daher $g \approx 9,83 \text{ m/s}^2$, in mittleren Breitengraden ist $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$, und am Äquator ist $g \approx 9,78 \text{ m/s}^2$. Obwohl die Unterschiede nur gering sind, so hatten sie doch im Laufe der Erdgeschichte eine leichte Abplattung der Erde zu den Polen hin zur Folge: Am Äquator beträgt der Erdradius $r_E \approx 6\,378 \text{ km}$, am Nord- bzw. Südpol hingegen „nur“ $6\,370 \text{ km}$.

Zurück zur Aufgabe

Dynamik

Mechanische Kräfte

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Mechanische Kräfte*.

- Bremst man beim Fahrradfahren abrupt mit der Vorderbremse, so ähnelt dies einer Fahrt gegen eine hohe Bordsteinkante: Der Fahrer, der Fahrrad-Rahmen sowie das ungebremste Hinterrad behalten aufgrund ihrer Massenträgheit ihre ursprüngliche Bewegungsrichtung und (zunächst) auch ihre Geschwindigkeit bei.

Da der Weg nach vorne „blockiert“ ist, ähnelt die Situation eher einem (schwungvollen) Hebelarm, der sich um eine feste Drehachse bewegt: Durch die Trägheit seiner Masse wird der Fahrer im schlimmsten Fall über die Lenkstange katapultiert. Die Vorderbremse sollte daher stets mit Bedacht und möglichst nur als „Unterstützung“ der Hinterrad-Bremse eingesetzt werden..

Zurück zur Aufgabe

- Während des Bremsens spürt ein Fahrgast seine Trägheitskraft und drückt unbewusst nach hinten. Der plötzliche Wegfall der Trägheitskraft beim Anhalten wird jedoch nicht schnell genug bemerkt, und der Körper gibt rückwärts nach.

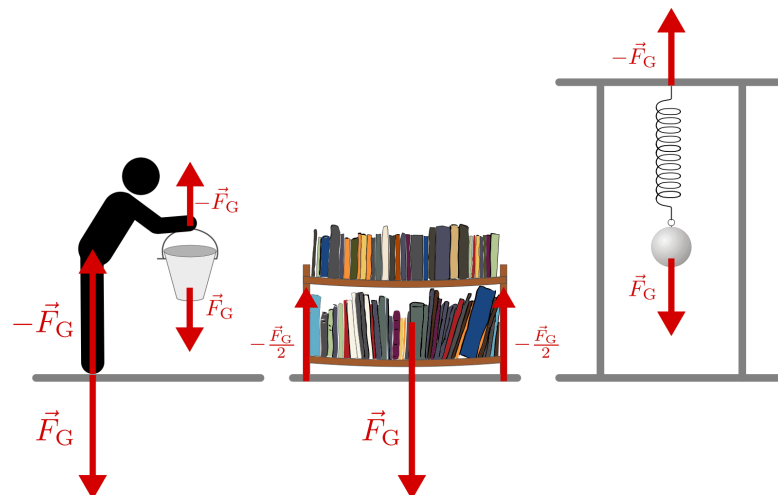
Zurück zur Aufgabe

- Da der Einkaufswagen starr ist, können Zug- und Druckkräfte an ihm keine Verformung, sondern lediglich eine Veränderung seiner Geschwindigkeit hervorrufen. Wird der Wagen exakt im rechten Winkel zu seiner Querachse geschoben oder gezogen, so liegen die Wirkungslinien der jeweiligen Kraft auf einer Linie. In diesem Fall wird der Wagen durch gleich große Zug- oder Druckkräfte in gleichem Maße beschleunigt.

Zurück zur Aufgabe

- Kraft und Gegenkraft haben immer die gleiche Wirkungslinie, aber unterschiedliche Richtungen. Sie treten an allen Stellen auf, an denen Kräfte übertragen werden.

In den drei abgebildeten Fällen wirken jeweils Gewichtskräfte, denen jeweils eine Auflagekraft des Bodens oder eine Haltekraft (des Armes bzw. der Decke) entgegen wirken. Im mittleren Teil der Abbildung könnte für jedes im Regal stehende Buch ein eigener Kraftpfeil eingezeichnet werden. Die Wirkung der einzelnen Gewichtskräfte auf den Boden ist allerdings mit der im Schwerpunkt wirkenden Gesamtkraft identisch. Da sich die Gewichtskraft gleichmäßig auf zwei Punkte verteilt, sind dort die Längen (Beträge) der Kraft-Gegenkraft-Pfeile nur halb so groß.



Im rechten Teil der Abbildung müssten korrekterweise zwei Kraftpaare eingezeichnet werden: Einerseits zieht die Kugel mit ihrer Gewichtskraft an der Feder und dehnt diese dabei, gleichzeitig hält die Feder die Kugel und hindert sie am Herunterfallen. Andererseits ziehen Kugel und Feder gemeinsam an der Decke, die wiederum mit ihrer Haltekraft entgegenwirkt. Die obige Darstellung kann in der vereinfachten Form nur dann genutzt werden, wenn das Gewicht der Feder gegenüber dem Gewicht der Kugel vernachlässigt werden kann.

Zurück zur Aufgabe

Zusammenwirken mehrerer Kräfte

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Zusammenwirken mehrerer Kräfte*.

- Die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ des Kindes ($m = 30 \text{ kg}$) verteilt sich gleichmäßig auf beide Seilstücke. Somit gilt für die Kraft F in jedem der beiden Seile:

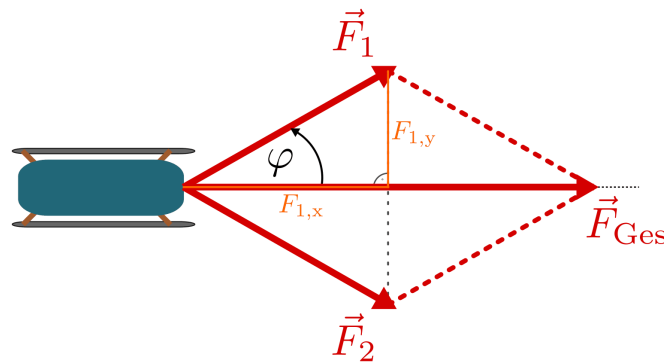
$$F = \frac{1}{2} \cdot F_G = \frac{1}{2} \cdot 30 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 147,15 \text{ N}$$

In beiden Seilen wirkt somit eine Zugkraft von rund 147 N.

Zurück zur Aufgabe

- Zeichnerisch findet man die Gesamtkraft \vec{F}_{Ges} , indem man ein Kräfteparallelogramm durch paralleles Verschieben der beiden Kraftpfeile konstruiert. Die gesuchte Gesamtkraft entspricht der Diagonalen des Kräfteparallelogramms.

(Es würde bereits genügen, nur einen Pfeil parallel an die Spitze des anderen zu verschieben. Durch Bildung eines Kräfteparallelogramms erhöht sich bei Zeichnungen von Hand allerdings die Genauigkeit.)



Rechnerisch lässt sich die Aufgabe lösen, indem man den Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen \sin und \cos in jeweils eine x - und eine y -Komponente aufteilt.

Für die Kraft \vec{F}_1 gilt:

$$F_{1,x} = 40 \text{ N} \cdot \cos(30^\circ) \approx 35 \text{ N}$$
$$F_{1,y} = 40 \text{ N} \cdot \sin(30^\circ) \approx 20 \text{ N}$$

Für die Kraft \vec{F}_2 gilt:

$$F_{2,x} = 40 \text{ N} \cdot \cos(30^\circ) \approx 35 \text{ N}$$
$$F_{2,y} = 40 \text{ N} \cdot \sin(30^\circ) \approx -20 \text{ N}$$

Das Minuszeichen der Kraftkomponente $F_{2,y}$ gibt an, dass die Kraft entgegen der als positiv festgelegten y -Richtung verläuft. Um beide Kräfte zu addieren, werden die x - und die y -Komponenten beider Kräfte addiert. Es ergibt sich:

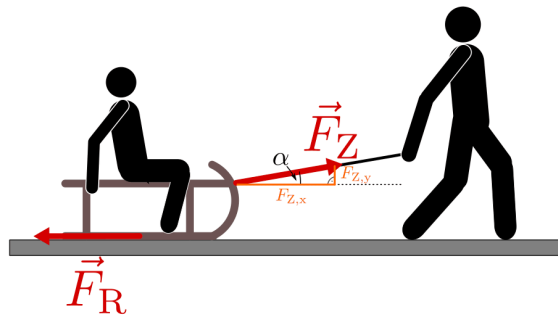
$$\begin{aligned} F_{1,x} + F_{2,x} &= 35 \text{ N} + 35 \text{ N} = 70 \text{ N} \\ F_{1,y} + F_{2,y} &= 20 \text{ N} - 20 \text{ N} = 0 \text{ N} \end{aligned}$$

Die Gesamtkraft \vec{F}_{Ges} hat somit einen Betrag von rund 70 N und verläuft in die positive x -Richtung.

Zurück zur Aufgabe

- Bei einer Gleitreibungszahl von $\mu = 0,15$ ergibt sich aus der Gewichtskraft $F_G = 500 \text{ N}$ folgende Reibungskraft F_R :

$$F_R = \mu \cdot F_G = 0,15 \cdot 500 \text{ N} = 75 \text{ N}$$



Wird der Schlitten mit konstanter Geschwindigkeit gezogen, so muss diese Reibungskraft von der horizontalen Komponente der Zugkraft ausgeglichen werden. Für die horizontale bzw. vertikale Komponente der Zugkraft gilt:

$$\begin{aligned} \frac{F_{Z,y}}{F_Z} &= \sin(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad F_{Z,y} = F_Z \cdot \sin(\alpha) \\ \frac{F_{Z,x}}{F_Z} &= \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad F_{Z,x} = F_Z \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Für den Betrag der Zugkraft gilt somit $F_Z = \frac{F_{Z,x}}{\cos(\alpha)} = \frac{75 \text{ N}}{\cos(10^\circ)} \approx 76,2 \text{ N}$.

Zurück zur Aufgabe

- Wenn ein Kräfte-Gleichgewicht herrscht, so bilden die beteiligten Kräfte eine geschlossene Vektorkette; im Fall dreier Kräfte lassen sich die Vektoren zu einem Kräfte-Dreieck anordnen. Um die Winkel α , β und γ in diesem Dreieck zu bestimmen, kann der **Cosinus-Satz** genutzt werden. Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_2^2 + F_3^2 - 2 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{F_2^2 + F_3^2 - F_1^2}{2 \cdot F_2 \cdot F_3}\right) \\ F_2^2 &= F_3^2 + F_1^2 - 2 \cdot F_3 \cdot F_1 \cdot \cos(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{F_3^2 + F_1^2 - F_2^2}{2 \cdot F_3 \cdot F_1}\right) \\ F_3^2 &= F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \arccos\left(\frac{F_1^2 + F_2^2 - F_3^2}{2 \cdot F_1 \cdot F_2}\right) \end{aligned}$$

Mit $F_1 = 50 \text{ N}$, $F_2 = 70 \text{ N}$ und $F_3 = 90 \text{ N}$ folgt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{70^2 + 90^2 - 50^2}{2 \cdot 70 \cdot 90}\right) \approx 33,56^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{90^2 + 50^2 - 70^2}{2 \cdot 90 \cdot 50}\right) \approx 50,70^\circ$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{50^2 + 70^2 - 90^2}{2 \cdot 50 \cdot 70}\right) \approx 95,74^\circ$$

In Summe ergeben die obigen Winkel 180° . Die Winkel zwischen drei in einem Punkt wirkenden Kräften beträgt jedoch 360° , die „richtigen“ Winkel α^* , β^* und γ^* entsprechen also den zu den obigen Winkeln gehörenden Außenwinkeln. Sie lassen sich berechnen, indem man für jeden Innenwinkel des Dreiecks die Differenz zu 180° bildet:

$$\alpha^* = 180^\circ - \alpha \approx 180^\circ - 33,56^\circ = 146,44^\circ$$

$$\beta^* = 180^\circ - \beta \approx 180^\circ - 50,70^\circ = 129,30^\circ$$

$$\gamma^* = 180^\circ - \gamma \approx 180^\circ - 95,74^\circ = 84,26^\circ$$

Für die Summe dieser Winkel gilt schließlich $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 360^\circ$.

Zurück zur Aufgabe

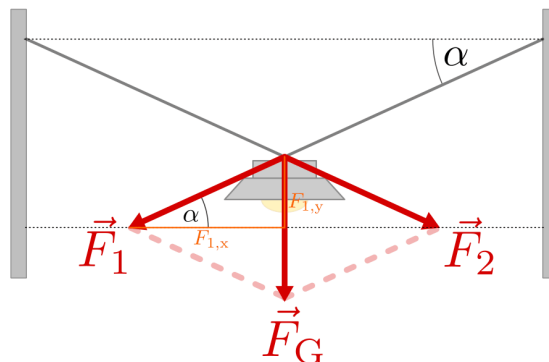
- Da die Laterne symmetrisch aufgehängt ist, müssen die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 im linken und im rechten Seilstück betragsmäßig gleich sein. Jedes der beiden Seilstücke muss somit in vertikaler Richtung die Hälfte der Gewichtskraft $F_G = 50 \text{ N}$ der Lampe ausgleichen:

$$F_{1,y} = F_{2,y}$$

$$F_{1,y} + F_{2,y} = 50 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_{1,y} = F_{2,y} = 25 \text{ N}$$

Die Größe der horizontalen Kraftkomponente kann graphisch mit Hilfe eines Kräfte-Parallelogramms oder rechnerisch mit Hilfe der [trigonometrischen Funktionen](#) anhand des Winkels $\alpha = 25^\circ$ bestimmt werden.



Der Winkel zwischen \vec{F}_1 bzw. \vec{F}_2 und der Horizontalen ist ebenfalls gleich α , da es sich um [Z-Winkel](#) handelt. Betrachtet man in der obigen Abbildung das orange

hervorgehobene Dreieck, so lässt sich die horizontale Komponente $F_{1,x}$ anhand der folgenden Beziehung ausdrücken:

$$\frac{F_{1,y}}{F_{1,x}} = \tan(\alpha) \quad \text{oder} \quad \frac{F_{1,x}}{F_{1,y}} = \cot(\alpha)$$

$$\Rightarrow F_{1,x} = F_{1,y} \cdot \cot(\alpha)$$

Mit dem Cotangens-Wert $\cot(\alpha) = \cot(25^\circ) \approx 2,145$ folgt somit $F_{1,x} \approx 53,61 \text{ N}$. Der Kraftanteil $F_{2,x}$ ist ebenso groß, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung.

Zurück zur Aufgabe

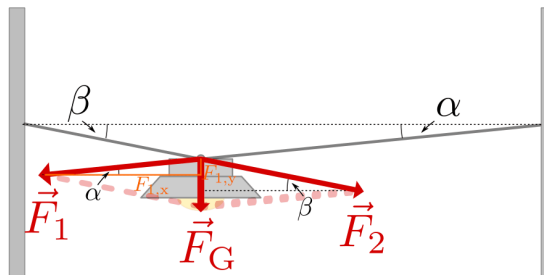
- Mit $h = 1 \text{ m}$, $l_1 = 5 \text{ m}$ und $l_2 = 10 \text{ m}$ lassen sich die Größen der Winkel α und β folgendermaßen berechnen:

$$\tan(\alpha) = \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ m}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \text{atan}\left(\frac{1}{10}\right) \approx 5,7^\circ$$

$$\tan(\beta) = \frac{1 \text{ m}}{5 \text{ m}} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \text{atan}\left(\frac{1}{5}\right) \approx 11,3^\circ$$

Um die Beträge F_1 und F_2 der zwei unbekanntten Kräfte zu berechnen, kann man ein Gleichungssystem der wirkenden Kräfte aufstellen. Dabei lassen sich als Bedingungen nutzen, dass die vertikalen Anteile der Kräfte in Summe die Gewichtskraft $F_G = 50 \text{ N}$ der Lampe ausgleichen, und sich die horizontalen Anteile der Kräfte zu Null addieren. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot \sin(\alpha) + F_2 \cdot \sin(\beta) &= 50 \text{ N} \\ -F_1 \cdot \cos(\alpha) + F_2 \cdot \cos(\beta) &= 0 \text{ N} \end{aligned}$$



Um dieses Gleichungssystem zu lösen, kann beispielsweise die zweite Gleichung nach F_1 aufgelöst werden:

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Dieser Ausdruck für F_1 kann anschließend in die erste Gleichung eingesetzt werden. Es folgt:

$$\frac{F_2 \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha) + F_2 \cdot \sin(\beta) = 50 \text{ N}$$

$$F_2 \cdot \left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta) \right) = 50 \text{ N}$$

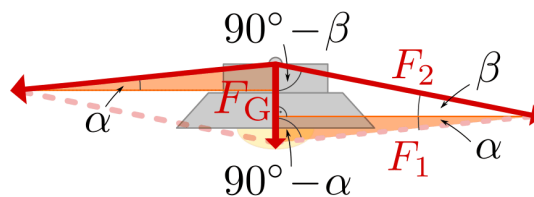
Man erhält damit als allgemeine Lösungsformeln:

$$\Rightarrow F_2 = \frac{50 \text{ N}}{\left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta)\right)}$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{50 \text{ N}}{\left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta)\right)} \cdot \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Setzt man hier $\alpha \approx 5,7^\circ$ und $\beta \approx 11,3^\circ$ ein, so erhält man $F_2 \approx 169,0 \text{ N}$ und $F_1 \approx 167,5 \text{ N}$.

Diese Lösung kann ebenfalls (wesentlich schneller!) gefunden werden, wenn man feststellt, dass die in der folgenden Abbildung farblich hervorgehobenen Dreiecke kongruent sind. Damit folgt mit Hilfe des Sinus-Satzes unmittelbar:



$$\frac{F_G}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{F_1}{\sin(90^\circ - \beta)} \iff F_1 = \frac{F_G}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin(90^\circ - \beta)$$

$$\frac{F_G}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{F_2}{\sin(90^\circ - \alpha)} \iff F_2 = \frac{F_G}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$$

Auch hier liefert ein Einsetzen der Werte $\alpha \approx 5,7^\circ$ und $\beta \approx 11,3^\circ$ die Werte $F_1 \approx 167,5 \text{ N}$ und $F_2 \approx 169,0 \text{ N}$.

Die an den beiden Seilstücken ziehenden Kräfte sind also jeweils deutlich größer als die Gewichtskraft der Lampe. Da $\beta > \alpha$ ist, hat die Kraft F_2 einen größeren Kraftteil in vertikaler Richtung als F_1 .

Zurück zur Aufgabe

Arten mechanischer Kräfte

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Arten mechanischer Kräfte*.

- Um die Gewichtskraft F_G zu berechnen, die einer Masse m entspricht, muss diese mit dem jeweiligen Ortsfaktor g multipliziert werden. Für die Erde gilt mit $m = 1 \text{ kg}$ und $g_{\text{Erde}} = 9,81 \text{ N/kg}$:

$$F_{G,\text{Erde}} = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9,81 \text{ N}$$

Auf dem Mond gilt für den Ortsfaktor $g_{\text{Mond}} = 1,60 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ und somit:

$$F_{\text{G,Mond}} = 1 \text{ kg} \cdot 1,60 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1,60 \text{ N}$$

Die Gewichtskraft der 1 kg-Masse ist auf der Erde mit $F_{\text{G,Erde}} = 9,81 \text{ N}$ somit etwa 6 mal größer als die Gewichtskraft $F_{\text{G,Mond}} = 1,60 \text{ N}$ der gleichen Masse auf dem Mond.

Zurück zur Aufgabe

- Der Ortsfaktor auf dem Mond ist $g_{\text{Mond}} = 1,60 \text{ N/kg}$, der Ortsfaktor auf der Erde ist $g_{\text{Erde}} = 9,81 \text{ N/kg}$. Der Astronaut spürt auf der Erde somit eine $9,81/1,60 \approx 6,13$ -fache Gewichtskraft:

$$F_{\text{G,Erde}} = 130 \text{ N} \cdot \frac{9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{1,60 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} \approx 130 \text{ N} \cdot 6,13 \approx 797 \text{ N}$$

Die Masse des Astronauten lässt sich berechnen, indem man seine Gewichtskraft durch den jeweiligen Ortsfaktor teilt:

$$m = \frac{130 \text{ N}}{1,60 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} = \frac{797 \text{ N}}{9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 81,25 \text{ kg}$$

Die Masse des Astronauten beträgt somit $m = 81,25 \text{ kg}$.

Zurück zur Aufgabe

- Ohne Reibung würden die Füße – extremer als auf Eis – unkontrollierbar über den Boden gleiten.

Tatsächlich muss die Erde immer „dagegen halten“, wenn ein Körper (durch Muskelkraft oder einen Motor) in eine bestimmte Richtung beschleunigt werden soll. Ohne Reibung würde die Erde keine Kraft spüren, und damit wäre auch die Gegenkraft der Erde auf den Körper gleich Null. Der Körper erfährt somit keine Beschleunigung.

Zurück zur Aufgabe

- Um die Holzkiste in Bewegung zu versetzen, muss ihre Haftreibungskraft $F_{\text{R,H}}$ überwunden werden. Setzt man die Masse $m = 50 \text{ kg}$ und die Haftreibungszahl $\mu_{\text{H}} = 0,54$ in die Haftreibungs-Gleichung ein, so ergibt sich:

$$F_{\text{R,H}} = \mu_{\text{H}} \cdot F_{\text{G}} = 0,54 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \approx 265 \text{ N}$$

Es muss somit eine Kraft $F \geq 265 \text{ N}$ aufgebracht werden, um die Kiste in Bewegung zu versetzen. Um das Gleiten aufrecht zu erhalten, muss nur die Gleitreibungskraft $F_{\text{R,G}}$ ausgeglichen werden:

$$F_{\text{R,G}} = \mu_{\text{G}} \cdot F_{\text{G}} = 0,34 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \approx 167 \text{ N}$$

Somit gilt für die zum (Weiter-)Gleiten der Kiste nötige Kraft $F \geq 167 \text{ N}$.

Zurück zur Aufgabe

-
- Die Federkonstante D einer Schraubenfeder ist gleich dem Verhältnis aus der auf sie wirkenden Kraft F und der resultierenden Längenänderung Δs :

$$D = \frac{F}{\Delta s}$$

Setzt man die Werte $F = 1 \text{ N}$ und $\Delta s = 33 \text{ cm} = 0,33 \text{ m}$ ein, erhält man:

$$D = \frac{1 \text{ N}}{0,33 \text{ m}} = 3,03 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Die Federkonstante D beträgt somit $3,03 \text{ N/m}$.

Zurück zur Aufgabe

- Für den Betrag der zum Dehnen einer Feder nötigen Spannkraft F_S gilt mit $D = 40 \text{ N/m}$ und $s = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$:

$$F_S = D \cdot s = 40 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,12 \text{ m} = 4,8 \text{ N}$$

Es ist somit eine Kraft von $4,8 \text{ N}$ nötig, um die Schraubenfeder 12 cm weit zu dehnen.

Zurück zur Aufgabe

- Die Dehnung s einer Feder lässt sich anhand der bekannten Federhärte $D = 650 \text{ N/m}$ und der wirkenden Kraft $F = 20 \text{ N}$ wie folgt berechnen:

$$F_s = D \cdot s \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{F_s}{D}$$

$$s = \frac{F_S}{D} = \frac{20 \text{ N}}{650 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \approx 0,031 \text{ m}$$

Die Schraubenfeder wird somit um $0,031 \text{ m} = 3,1 \text{ cm}$ gedehnt.

Zurück zur Aufgabe

- Damit das Fahrzeug nicht aus der Kurve gleitet, muss die Haftreibungskraft F_H zwischen der Straße und den Reifen mindestens genauso groß sein wie die zum Durchfahren der Kurve nötige Radialkraft F_{rad} , es muss also gelten:

$$\begin{aligned} F_H &= F_{\text{rad}} \\ \mu_H \cdot m \cdot g &= m \cdot \frac{v^2}{r} \\ \Rightarrow r &= \frac{v^2}{\mu_H \cdot g} \end{aligned}$$

Der Mindestradius r der Kurvenbahn beim Durchfahren mit einer bestimmten Geschwindigkeit v ist also unabhängig von der Fahrzeugmasse. Mit $v = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$, $\mu_H = 0,8$ und $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ folgt:

$$r = \frac{v^2}{\mu_H \cdot g} = \frac{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,8 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 12,75 \text{ m}$$

Der Mindestradius beträgt somit knapp 13 m.

Zurück zur Aufgabe

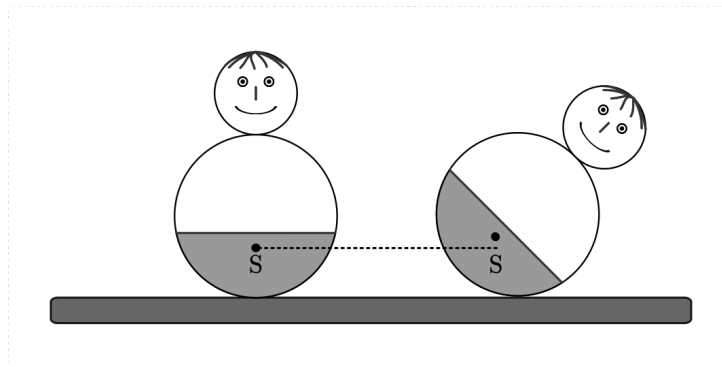
Drehmoment und Gleichgewicht

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Drehmoment und Gleichgewicht*.

- Die Standfestigkeit eines Körpers ist umso größer, je größer seine Masse und Standfläche und je tiefer sein Schwerpunkt ist.

Zurück zur Aufgabe

- Bei Stehaufmännchen muss der Schwerpunkt in der unteren Hälfte des Grundkörpers liegen; diese Verlagerung des Schwerpunkts wird durch einen Einbau von Zusatzgewichten im unteren Teil des Stehaufmännchens erreicht.



Wird ein Stehaufmännchen aus seiner aufrechten Position ausgelenkt, so wird dadurch der Schwerpunkt angehoben. Ein stabiles Gleichgewicht ist allerdings durch die niedrigst mögliche Lage des Schwerpunkts charakterisiert. Das Stehaufmännchen wird sich daher, wenn man es loslässt, von selbst wieder aufrichten, da hierdurch der Schwerpunkt zum niedrigsten Punkt zurückkehrt.

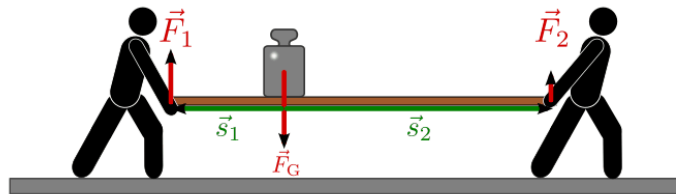
Zurück zur Aufgabe

- Während die Last getragen wird, ist sie im statischen Gleichgewicht; das heißt, die an ihr angreifenden Kräfte und Drehmomente ergeben in Summe jeweils Null. Betrachtet man zunächst nur den Einfluss $F_G = 120\text{ N}$ der Last, so gilt:

$$F_1 + F_2 - F_G = 0$$

$$F_1 \cdot s_1 + F_2 \cdot s_2 = 0$$

Die erste Gleichung ergibt sich daraus, dass die beiden von den Trägern ausgeübten Kräfte das Gewicht der Last ausgleichen, die Last also nicht nach unten sinkt. Die zweite Gleichung erhält man, wenn man sich jeweils einen der beiden Träger „weggeschnitten“ denkt; das Brett mitsamt Last würde dann kippen, wobei die Drehachse mit der Hand des verbliebenen Trägers identisch wäre. An der Stelle des jeweils „weggeschnittenen“ Trägers muss also eine Kraft wirken, die das von der Last bewirkte Drehmoment ausgleicht.



Aus der zweiten der obigen Gleichungen folgt:

$$F_1 \cdot s_1 = -F_2 \cdot s_2$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = -\frac{s_2}{s_1}$$

Die von den beiden Trägern aufzubringenden Kräfte stehen also im umgekehrten Verhältnis zu den jeweiligen Entfernungen der Last von den beiden Trägern. Das Vorzeichen ergibt sich daraus, dass die Wegstrecke s_2 in die umgekehrte Richtung zeigt wie s_1 ; da linksdrehende Drehmomente definitionsgemäß als positiv und rechtsdrehende Drehmomente definitionsgemäß als positiv gezählt werden, erhält in diesem Fall s_1 ein negatives Vorzeichen. Mit $s_1 = 1\text{ m}$ und $s_2 = -2\text{ m}$ folgt also $F_1 = 2 \cdot F_2$.

Setzt man dieses Zwischenergebnis in die erste der obigen Gleichungen ein, so erhält man:

$$F_1 + F_2 = F_G$$

$$(2 \cdot F_2) + F_2 = F_G$$

$$F_2 = \frac{F_G}{3} = \frac{120\text{ N}}{3} = 40\text{ N}$$

Der hintere Träger muss zum Heben der Last somit die Kraft $F_1 = 80\text{ N}$, der vordere Träger die Kraft $F_2 = 40\text{ N}$ aufbringen. Zusätzlich müssen beide Träger weitere 10 N zum Heben des Brettes aufbringen; dessen Gewicht verteilt sich nämlich (nach dem gleichen Prinzip) gleichmäßig auf beide Träger, da sich sein Schwerpunkt in der Mitte zwischen den beiden Personen befindet.

Zurück zur Aufgabe

Kraftwandler und Getriebe

Hebel

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Hebel*.

- Das Funktionsprinzip einer Balkenwaage beruht darauf, eine unbekannte Masse mit einer oder mehreren Massen bekannter Größe zu vergleichen. Da die Masse überall den gleichen Wert hat und die Gewichtskraft der unbekanntes Masse in gleichem Maß vom Ort abhängt wie die der Vergleichs-Masse(n), funktioniert eine Balkenwaage an jeder beliebigen Stelle, also auch auf dem Mond.

Bei einer Federkraftwaage wird die Gewichtskraft einer unbekanntes Masse mit der (bekanntes) Spannkraft der Feder verglichen. Da auf dem Mond die Gewichtskraft der unbekanntes Masse geringer ist, die Spannkraft der Feder jedoch gleich bleibt, zeigt eine Federkraftwaage auf dem Mond einen „falschen“ Wert an – die Skala müsste neu kalibriert werden.

Zurück zur Aufgabe

- Beim Öffnen einer Farbdose dient ein Schraubenzieher als Hebel. Die Länge des Kraftarms ist gleich der Strecke zwischen der Drehachse und dem Griff des Schraubenziehers. Die Länge des Lastarms ist gleich der Strecke zwischen der Drehachse und der Spitze des Schraubenziehers. Umso länger der Kraftarm im Vergleich zum Lastarm ist, desto weniger Kraft ist nötig, um den Deckel zu heben.

Beispiel:

Wenn der Abstand zwischen dem Dosenrand (der Drehachse) und Spitze des Schraubenziehers $s_2 = 0,01$ m und der Abstand zum Griff $s_1 = 0,16$ m beträgt, dann bewirkt eine Kraft $F_1 = 5$ N am Griff eine Kraft von $F_2 = \frac{s_1}{s_2} \cdot F_1 = 16 \cdot 5 \text{ N} = 80 \text{ N}$.

Zurück zur Aufgabe

- Damit die Balkenwaage als zweiseitiger Hebel im Gleichgewicht ist, müssen die auf der linken und auf der rechten Seite wirkenden Drehmomente $M_1 = s_1 \cdot F_1$ und $M_2 = s_2 \cdot F_2$ gleich groß sein:

$$\begin{aligned}M_1 &= M_2 \\s_1 \cdot F_1 &= s_2 \cdot F_2\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nach der gesuchten Größe s_2 aufgelöst werden:

$$s_1 \cdot F_1 = s_2 \cdot F_2 \quad \Leftrightarrow \quad s_2 = \frac{s_1 \cdot F_1}{F_2}$$

Die beiden wirkenden Kräfte F_1 und F_2 entsprechen jeweils den Gewichtskräften $F_G = m \cdot g$ der beiden an der Balkenwaage hängenden Lasten. Eingesetzt ergibt sich mit $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 500$ g = 0,5 kg und $s_1 = 10$ cm = 0,1 m:

$$s_2 = \frac{s_1 \cdot F_1}{F_2} = \frac{0,1 \text{ m} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{0,5 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 0,4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

Die zweite Last, deren Masse nur ein Viertel der ersten Last beträgt, muss somit vier mal so weit entfernt von der Drehachse aufgehängt werden, damit die Balkenwaage im Gleichgewicht ist.

Zurück zur Aufgabe

- Beim Unterarm handelt es sich um einen einseitigen Hebel. Das in der Hand im Abstand $s_2 = 0,35 \text{ m}$ vom Ellenbogen gehaltene Gewicht hat eine Gewichtskraft von $F_2 = m \cdot g = 2,00 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 19,62 \text{ N}$.

Das vom Gewicht bewirkte Drehmoment $M_2 = F_2 \cdot s_2$ muss durch die im Abstand $s_1 = 0,05 \text{ m}$ wirkende Kraft F_1 des Muskels ausgeglichen werden. Da alle Kräfte senkrecht auf den Unterarm einwirken, muss gelten:

$$M_1 = M_2 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{F_2 \cdot s_2}{s_1} = 19,6 \text{ N} \cdot \frac{0,35 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} \approx 137 \text{ N}$$

Der Muskel muss mit $F_1 \approx 137 \text{ N}$ somit eine sieben mal grössere Kraft aufbringen, als wenn das gleiche Gewicht bei vertikal gehaltenem Unterarm getragen würde.

Zurück zur Aufgabe

- Damit sich der Hebel im Gleichgewicht befindet, muss die Summe der Drehmomente auf der linken Seite gleich der Summe der Drehmomente auf der rechten Seite des Hebels sein. Dies kann überprüft werden, indem man die jeweiligen Werte in die Drehmoment-Gleichung einsetzt und die erhaltenen Werte der Drehmomente miteinander vergleicht:

$$M_{\text{links}} = F_1 \cdot s_1 + F_2 \cdot s_2 = 3,5 \text{ N} \cdot 0,2 \text{ m} + 5 \text{ N} \cdot 0,1 \text{ m} = 1,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{\text{rechts}} = F_3 \cdot s_3 + F_4 \cdot s_4 = 1,5 \text{ N} \cdot 0,6 \text{ m} + 4 \text{ N} \cdot 0,075 \text{ m} = 1,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Die Drehmomente auf der linken und auf der rechten Seite sind gleich groß, der Hebel befindet sich somit im Gleichgewicht.

Zurück zur Aufgabe

Schiefe Ebene

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Schiefe Ebene*.

- Entlang einer schiefen Ebene gilt als Kraftverhältnis:

$$\frac{F}{F_G} = \frac{h}{l}$$

Die Höhe $h = 0,4 \text{ m}$ der schiefen Ebene sowie ihre Länge $l = 2,4 \text{ m}$ sind gegeben, auch die Gewichtskraft $F_G = 600 \text{ N}$ der Schubkarre ist bekannt. Löst man die obige Gleichung nach der Kraft F auf, so erhält man nach Einsetzen der gegebenen Werte die gesuchte Kraft.

$$F = \frac{F_G \cdot h}{l} = \frac{600 \text{ N} \cdot 0,4 \text{ m}}{2,4 \text{ m}} = 100 \text{ N}$$

Die zum Schieben der Schubkarre nötige Kraft beträgt somit 100 N .

Zurück zur Aufgabe

Flaschenzüge und Rollen

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Flaschenzüge und Rollen*.

- Bei einem Flaschenzug mit 4 losen Rollen wird die Last gleichmäßig auf $n = 8$ Seilstücke verteilt. Die nötige Zugkraft F_{Zug} am losen Seilende beträgt, von Reibungskräften abgesehen, folglich auch nur $1/8$ der Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ der Last. Zur Masse $m = 200 \text{ kg}$ der Last muss allerdings die Masse $m = 4 \cdot 5 \text{ kg}$ der losen Rollen hinzu addiert werden, da diese ebenfalls mit angehoben werden.

$$F_{\text{Zug}} = \frac{F_G}{n} = \frac{m \cdot g}{n} = \frac{220 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{8} = 269,8 \text{ N}$$

Anstelle $F_G = 200 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ N/kg} = 1962 \text{ N}$ muss somit nur etwas mehr als ein Achtel des Kraftwertes, also $269,8 \text{ N}$, aufgewendet werden. Gleichzeitig muss das Seil um die 8-fache Weglänge, also um $8 \cdot 3 \text{ m} = 24 \text{ m}$, angehoben werden.

Zurück zur Aufgabe

- Bei einem Flaschenzug mit 2 losen Rollen wird die Last gleichmäßig auf $n = 4$ tragende Seilstücke verteilt. Die Zugkraft $F_{\text{Zug}} = m_{\text{Person}} \cdot g$ am losen Seilende kann entsprechend, wenn keine Reibungskräfte auftreten und das Gewicht des Flaschenzugs vernachlässigbar ist, auch eine 4-fach höhere Last $F_{\text{L}} = m_{\text{Last}} \cdot g$ anheben.

$$F_{\text{Zug}} = \frac{F_{\text{Last}}}{n} \iff F_{\text{Last}} = n \cdot F_{\text{Zug}}$$

$$m_{\text{Last}} \cdot g = n \cdot m_{\text{Person}} \cdot g$$

$$m_{\text{Last}} = n \cdot m_{\text{Person}} = 4 \cdot 50 \text{ kg} = 200 \text{ kg}$$

Eine 50 kg schwere Person kann somit mit Hilfe des Flaschenzugs eine Last mit einer Masse von maximal 200 kg anheben.

Zurück zur Aufgabe

- Bei einem Potenzflaschenzug wird die zum Anheben der Last nötige Kraft an jeder losen Rolle halbiert. Bei $n = 3$ Rollen ist – sofern man ihr Eigengewicht und die Reibung vernachlässigen kann – zum Anheben einer Last mit einem Gewicht von $F_{\text{G}} = 800 \text{ kg}$ somit nur folgende Kraft F nötig:

$$F = \frac{1}{2^n} \cdot F_{\text{G}} = \frac{1}{2^3} \cdot 800 \text{ N} = \frac{1}{8} \cdot 800 \text{ N} = 100 \text{ N}$$

Die zum Anheben nötige Kraft beträgt also mindestens $F = 100 \text{ N}$. Berücksichtigt man das Eigengewicht $F_{\text{G,R}} = 20 \text{ N}$ der einzelnen Rollen, so muss dieser Betrag an jeder losen Rolle zur jeweiligen Last hinzuaddiert werden.

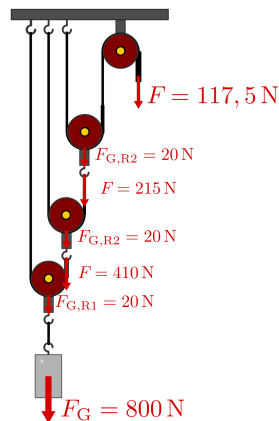


Abb. 231: Anheben eines Gewichts mit Hilfe eines Potenzflaschenzugs.

Zum Anheben der Last ist in diesem Fall, wie in der obigen Abbildung gezeigt, eine Kraft von $F = 117,5 \text{ N}$ nötig.

Zurück zur Aufgabe

Zahnräder und Getriebe

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Zahnräder und Getriebe*.

- Die Kurbel und das vordere Zahnrad sind fest miteinander verbunden, ebenso das hintere Zahnrad und die Felge des Hinterrads. In diesen beiden Teile-Kombinationen sind die wirkende Drehmomente jeweils gleich. Somit kann als zunächst die Kraft F_2 berechnet werden, die das vordere Zahnrad auf die Kette ausübt. Für das Drehmoment, das der Fahrer auf die Kurbel ausübt, gilt:

$$M_1 = F_1 \cdot r_1 = 50 \text{ N} \cdot 0,2 \text{ m} = 10 \text{ Nm}$$

Das gleiche Drehmoment tritt auch im vorderen Zahnrad auf; da es jedoch einen kleineren Radius r_2 als die Kurbel hat, muss die auf die Kette wirkende Kraft F_2 entsprechend größer sein:

$$M_1 = M_2 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot F_1 = \frac{0,2 \text{ m}}{0,1 \text{ m}} \cdot 50 \text{ N} = 100 \text{ N}$$

Auf die Kette wird somit eine Zugkraft von $F_2 = 100 \text{ N}$ ausgeübt. Die Kette überträgt diese Kraft auf das hintere Zahnrad, so dass an diesem eine gleich große Kraft $F_3 = F_2$ angreift. Für das Drehmoment M_3 am hinteren Zahnrad gilt somit:

$$M_3 = F_3 \cdot r_3 = 100 \text{ N} \cdot 0,05 \text{ m} = 5 \text{ Nm}$$

Das gleiche Drehmoment wirkt wegen der starren Verbindung mit dem hinteren Zahnrad auch in der Felge; da diese jedoch einen größeren Radius r_4 hat, ist die zugehörige Kraft F_4 am Umfang entsprechend geringer:

$$M_3 = M_4 \quad \Leftrightarrow \quad F_3 \cdot r_3 = F_4 \cdot r_4$$

$$\Rightarrow F_4 = \frac{r_3}{r_4} \cdot F_3 = \frac{0,05 \text{ m}}{0,35 \text{ m}} \cdot 100 \text{ N} \approx 14,3 \text{ N}$$

Die auf die Pedale einwirkende Kraft von $F_1 = 50 \text{ N}$ beschleunigt somit die Felge mit $F \approx 14,3 \text{ N}$ beziehungsweise kann – beispielsweise mittels Bremsbacken – durch eine solche an der Felge angreifende Kraft ausgeglichen werden.

Schaltet man bei gleicher Tretkraft F_1 vorne auf ein kleines Zahnrad ($r_2 = 5 \text{ cm}$) herunter, so muss die dort wirkende Kraft F_2 wegen des nur halb so großen Radius doppelt so groß sein, um ein gleiches Drehmoment zu bewirken. Die auf die Kette wirkende Kraft ist also mit $F_2 = 200 \text{ N}$ doppelt so groß. Am hinteren Rad bleibt alles unverändert, so dass die Kette dort ein doppelt so großes Drehmoment bewirkt und folglich auch die Kraft auf die Felge doppelt so groß wird, also $F_4 \approx 28,6 \text{ N}$ gilt.

Zurück zur Aufgabe

Arbeit, Leistung und Energie

Mechanische Arbeit

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Mechanische Arbeit*.

- Beim Anheben einer Getränkekiste der Masse $m = 10 \text{ kg}$ um $h = 1 \text{ m}$ wird Hubarbeit verrichtet. Die Richtungen der hebenden Kraft $F = F_G$ und Wegstrecke $s = h$ stimmen überein, für den Betrag der verrichteten Arbeit W_{Hub} gilt somit:

$$\begin{aligned}W_{\text{Hub}} &= F \cdot s = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h \\ &= 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 1 \text{ m} = 98,1 \text{ N} \cdot \text{m} = 98,1 \text{ J}\end{aligned}$$

Wird die Kiste 1 m über dem Boden *gehalten*, so muss zwar die Gewichtskraft F_G der Kiste ausgeglichen werden, doch keine Arbeit verrichtet werden; die nötige Kraft wirkt dann nicht *entlang* einer Wegstrecke – die Gewichtskraft der Kiste könnte beispielsweise auch von einem Tisch „gehalten“ werden, ohne dass dieser Arbeit verrichtet bzw. ihm Energie zugeführt werden muss.

Wird die Kiste in gleicher Höhe entlang einer beliebig langen Strecke getragen, so stehen die Richtungen der aufgewandten Kraft F und der zurück gelegten Wegstrecke s senkrecht aufeinander. Da somit keine Kraft entlang des Weges s wirkt, wird beim Tragen der Kiste auf gleicher Höhe auch keine Arbeit verrichtet.¹

Zurück zur Aufgabe

- Beim Verschieben des Körpers wirkt die Zugkraft ($F_{\text{Zug}} = 25 \text{ N}$) entlang der zurückgelegten Wegstrecke ($s = 5 \text{ m}$). Für die verrichtete Arbeit W gilt damit:

$$W = F_{\text{Zug}} \cdot s = 25 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = 125 \text{ J}$$

Die Zugkraft verrichtet somit eine Arbeit von 125 J. Die Schwerkraft $F_G = 100 \text{ N}$ hingegen verrichtet keine Arbeit, da sie senkrecht zur Wegstrecke s wirkt.²

Zurück zur Aufgabe

¹ Man könnte die Kiste ebenso auf einem Rollenwagen entlang der ebenen Strecke s transportieren und dabei lediglich die anfallende Reibung (Rollreibung und Luftwiderstand) überwinden – diese versucht man bei Transportprozessen durch geschickte Bauformen, reibungsarme Kugellager usw. zu minimieren.

² Die Gewichtskraft kann lediglich als Ursache der Reibungskraft angesehen werden, gegen die beim Verschieben der Kiste Arbeit verrichtet wird. Aus der Formel für die Reibungskraft $F_{\text{Reib}} = \mu \cdot F_{\perp}$ folgt dabei für den Reibungskoeffizienten $\mu = \frac{F_{\text{Reib}}}{F_{\perp}} = \frac{F_{\text{Zug}}}{F_G} = \frac{25 \text{ N}}{100 \text{ N}} = 0,25$.

- Um eine $m = 100 \text{ kg}$ schwere Masse anzuheben, muss eine Kraft von $F = F_G = m \cdot g$ aufgebracht werden, wobei $g = 9,81 \text{ N/kg}$ den Ortsfaktor bezeichnet. Wird die Masse um $h = 1 \text{ m}$ angehoben, so ergibt sich mit der Formel der Hubarbeit:

$$\begin{aligned} W_{\text{Hub}} &= F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h \\ &= 100 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 1 \text{ m} = 981 \text{ N} \cdot \text{m} = 981 \text{ J} \end{aligned}$$

Es ist somit eine Arbeit von 981 J (also knapp 1 kJ) nötig, um eine Masse von 100 kg einen Meter weit anzuheben.

Zurück zur Aufgabe

- Um die Hubarbeit zu berechnen, die der Wanderer für seine eigene Masse ($m_1 = 70 \text{ kg}$) und die Masse seines Rucksacks ($m_2 = 7 \text{ kg}$) beim Anstieg zum $h = 200 \text{ m}$ höheren Gipfel aufzubringen hat, müssen die gegebenen Werte nur in die Formel der Hubarbeit eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} W_1 &= m_1 \cdot g \cdot h = 70 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 200 \text{ m} = 137340 \text{ N} \cdot \text{m} = 137,34 \text{ kJ} \\ W_2 &= m_2 \cdot g \cdot h = 7 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 200 \text{ m} = 13734 \text{ N} \cdot \text{m} = 13,734 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Insgesamt muss der Wanderer auf seinem Weg zum Gipfel somit eine Hubarbeit von $W_{\text{Hub}} = W_1 + W_2 \approx 151 \text{ kJ}$ verrichten.³

Zurück zur Aufgabe

- Ein Ziegelstein bildet das Fundament, die restlichen neun müssen je um ein entsprechendes Vielfaches der Ziegelsteinhöhe angehoben werden – der erste um $h_1 = 7 \text{ cm} = 0,07 \text{ m}$, der zweite um $h_2 = 14 \text{ cm} = 0,14 \text{ m}$ usw. Die Gesamtarbeit entspricht der Summe aller einzelnen Hubarbeiten:

$$\begin{aligned} W_{\text{Hub,gesamt}} &= F_G \cdot h_1 + F_G \cdot h_2 + \dots + F_G \cdot h_9 \\ &= F_G \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_9) \\ &= 35 \text{ N} \cdot (0,07 \text{ m} + 0,14 \text{ m} + \dots + 0,63 \text{ m}) \\ &= 35 \text{ N} \cdot 3,15 \text{ m} \approx 110,25 \text{ J} \end{aligned}$$

Die insgesamt zu verrichtende Arbeit beträgt somit 110,25 J.

Zurück zur Aufgabe

- Die verrichtete (Reibungs-)Arbeit lässt sich durch Einsetzen der gegebenen Werte $F = 15 \text{ N}$ und $s = 5 \text{ m}$ in die allgemeine Definition der Arbeit berechnen:

$$W = F \cdot s = 15 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = 75 \text{ N} \cdot \text{m} = 75 \text{ J}$$

Es wird somit eine Arbeit von 75 J verrichtet.

Zurück zur Aufgabe

³ Alternativ kann man zur Lösung der Aufgabe auch zuerst die Massen m_1 und m_2 zu einer Gesamtmasse $m = m_1 + m_2$ addieren und diese in die Formel der Hubarbeit einsetzen.

-
- Die Gesamtmasse der Jugendlichen ($m_1 = 55 \text{ kg}$, $m_2 = 40 \text{ kg}$) und des Schlittens ($m_S = 5 \text{ kg}$) ist gleich der Summe der einzelnen Massen:

$$m = m_1 + m_2 + m_S = 55 \text{ kg} + 40 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 100 \text{ kg}$$

Mit der (Gleit-)Reibungszahl $\mu_G = 0,04$ von Eisen auf Schnee ergibt sich damit für die Reibungskraft $F_R = \mu_G \cdot m \cdot g$:

$$F_R = \mu_G \cdot m \cdot g = 0,04 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 39,24 \text{ N}$$

Diese Reibungskraft wird durch die Zugkraft F_{Zug} des Pferdes ausgeglichen. Da die Kraft entlang der Strecke von $s = 200 \text{ m}$ konstant ist, kann die Zugarbeit $W = W_R$ des Pferdes ausgerechnet werden:

$$W = W_R = F_R \cdot s = 39,24 \text{ N} \cdot 250 \text{ m} = 7848 \text{ N} \cdot \text{m} = 7848 \text{ J} \approx 7,5 \text{ kJ}$$

Das Pferd verrichtet beim Ziehen des Schlittens über das Feld somit eine Arbeit von rund $7,5 \text{ kJ}$.

Zurück zur Aufgabe

- Für die zur Beschleunigung eines Körpers aus der Ruhelage ($v_1 = 0$) verrichtete Arbeit gilt:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Setzt man die gegebenen Werte $m = 1000 \text{ kg}$ und $v = v_2 = 30 \text{ m/s}$ in die obige Gleichung ein, so ergibt sich:⁴

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ &= 445\,000 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 445\,000 \text{ J} \end{aligned}$$

Zur Beschleunigung des Fahrzeugs sind somit $445\,000 \text{ J} = 445 \text{ kJ}$ nötig.

Zurück zur Aufgabe

⁴ Nach der Definition $F = m \cdot a$ gilt für die Einheit der Kraft:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Für die Einheit der Arbeit gilt somit:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

- Um die Beschleunigungsarbeit zu berechnen, muss die Differenz zwischen Anfangs- und Endgeschwindigkeit Δv bekannt sein. Diese lässt sich mittels der Werte der gegebenen Beschleunigung $a = 2,5 \text{ m/s}^2$ und ihrer Dauer $\Delta t = 10 \text{ s}$ berechnen:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Daraus lässt sich mit $m = 750 \text{ kg}$ durch Einsetzen der Werte in die Definition der Beschleunigungsarbeit die verrichtete Arbeit ΔW berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\Delta v)^2 = \frac{1}{2} \cdot 750 \text{ kg} \cdot \left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 750 \text{ kg} \cdot 625 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ &= 234\,375 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 234\,375 \text{ J} \end{aligned}$$

Die verrichtete Arbeit beträgt somit rund 234 kJ.

Zurück zur Aufgabe

- Die zum Beschleunigen des Fahrzeugs auf $v_1 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nötige Arbeit beträgt mit $m = 1000 \text{ kg}$:

$$W_{B,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 96\,451 \text{ J}$$

Zum Beschleunigen des Fahrzeugs auf $v_2 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ muss folgende Arbeit verrichtet werden:

$$W_{B,2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 385\,802 \text{ J}$$

Die zum Beschleunigen des Fahrzeugs von $v_1 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $v_2 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ nötige Arbeitsmenge $W_{B,3}$ muss der Differenz $W_2 - W_1$ der Arbeitsmengen entsprechen, die zum Beschleunigen aus der Ruhelage auf 50 beziehungsweise 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nötig sind:

$$W_{B,3} = W_{B,2} - W_{B,1} = 385\,802 \text{ J} - 96\,451 \text{ J} \approx 289\,351 \text{ J}$$

Es sind somit rund 289 kJ zum Beschleunigen von 50 auf 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an Beschleunigungsarbeit nötig.

Hinweis: Die Arbeitsmenge $W_{B,3}$ könnte ebenfalls mittels $W_{B,3} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)$ berechnet werden; falsch wäre es hingegen, $\frac{1}{2} \cdot m \cdot (\Delta v)^2$ zu rechnen, da $(\Delta v)^2 = (v_2 - v_1)^2 \neq v_2^2 - v_1^2$ ist!

Zurück zur Aufgabe

Wirkungsgrad

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Wirkungsgrad*.

- Nach der *Goldenen Regel der Mechanik* bleibt auch bei der Benutzung eines Flaschenzugs die zu verrichtende Arbeit $W = F \cdot s$ unverändert – zwar ist bei Benutzung eines Flaschenzugs weniger Kraft nötig, dafür muss diese entlang einer entsprechend längeren Wegstrecke aufgebracht werden. Die zugeführte Arbeit W_1 und die abgegebene Arbeit W_2 sind somit gleich groß:

$$W_1 = F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2 = W_2$$

Damit gilt für den Wirkungsgrad η :

$$\eta = \frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} = \frac{W_1}{W_2} = 1 = 100\%$$

Der Wirkungsgrad eines idealen Flaschenzugs beträgt somit 100%.

Zurück zur Aufgabe

- Die Menge an Hubarbeit W_{Hub} , die im Idealfall zum Heben der Last (Gewichtskraft: $F_G = 250 \text{ N}$, Zughöhe: $h = 2 \text{ m}$) nötig ist, lässt sich nach folgender Formel berechnen:

$$W_{\text{Hub}} = F_G \cdot h = 250 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 500 \text{ N} \cdot \text{m} = 500 \text{ J}$$

Diese Menge an Arbeit muss mit der Menge an Arbeit W_{out} übereinstimmen, die vom Flaschenzug abgegeben wird. Es gilt somit $W_{\text{out}} = W_{\text{Hub}}$.

Nach der Angabe reduziert sich durch die Verwendung des Flaschenzugs die aufzubringende Kraft auf 80 N, die Zugstrecke beträgt dabei $s = 7 \text{ m}$. Somit wird folgende Arbeit am Flaschenzug verrichtet:

$$W_{\text{in}} = F \cdot s = 80 \text{ N} \cdot 7 \text{ m} = 560 \text{ N}$$

Die vom Flaschenzug abgegebene Arbeit W_{out} ist somit kleiner als die investierte Arbeit W_{in} . Der Wirkungsgrad des Flaschenzugs, der dem Verhältnis beider Größen entspricht, ist somit kleiner als eins:

$$\eta = \frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} = \frac{500 \text{ N}}{560 \text{ N}} \approx 0,893$$

Der Wirkungsgrad η des Flaschenzugs beträgt also rund 89,3%.

Zurück zur Aufgabe

- Um die Menge an abgegebener Arbeit W_{out} aus den gegebenen Größen $W_{\text{in}} = 7200 \text{ J}$ und $\eta = 33\% = 0,33$ zu berechnen, muss man die Formel für den Wirkungsgrad entsprechend umstellen:

$$\eta = \frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} \iff W_{\text{out}} = W_{\text{in}} \cdot \eta$$

$$W_{\text{out}} = W_{\text{in}} \cdot \eta = 7200 \text{ J} \cdot 0,33 = 2376 \text{ J}$$

Der Kraftwandler gibt somit 2376 W an Arbeit ab.

Zurück zur Aufgabe

-
- Um die Menge an aufzuwendender Arbeit W_{in} aus den gegebenen Größen $W_{\text{out}} = 5000 \text{ J}$ und $\eta = 80\% = 0,8$ zu berechnen, muss die Formel für den Wirkungsgrad umgestellt werden:

$$\eta = \frac{W_{\text{out}}}{W_{\text{in}}} \iff W_{\text{in}} = \frac{W_{\text{out}}}{\eta}$$

$$W_{\text{in}} = \frac{W_{\text{out}}}{\eta} = \frac{5000 \text{ J}}{0,8} = 6250 \text{ J}$$

Es müssen somit 6250 J an Arbeit an der Vorrichtung verrichtet werden.

Zurück zur Aufgabe

Mechanische Leistung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Mechanische Leistung*.

- Die gesamte Arbeit W_{ges} , die der Sportler verrichtet, lässt sich als das Zehnfache der Hubarbeit $W_{\text{Hub}} = m \cdot g \cdot h$ während eines Klimmzugs berechnen.⁵

$$\begin{aligned} W_{\text{ges}} &= 10 \cdot m \cdot g \cdot h \\ &= 10 \cdot 70 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5 \text{ m} \\ &= 3433,5 \text{ N} \cdot \text{m} = 3433,5 \text{ J} \end{aligned}$$

Die Zeit, die der Sportler dafür benötigt, beträgt $t = 8 \text{ s}$. Damit beträgt seine Leistung P (Arbeit je Zeit):

$$P = \frac{W_{\text{ges}}}{t} = \frac{3433,5 \text{ J}}{8 \text{ s}} \approx 429,2 \text{ W}$$

Die Leistung des Sportlers beträgt somit rund 429 Watt.

Zurück zur Aufgabe

- Die Leistung des Motors kann berechnet werden, indem man die bekannten Größen ($m_{\text{Last}} = 200 \text{ kg}$, $h = 4 \text{ m}$, $t = 6 \text{ s}$) in die Definition der Leistung einsetzt:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{200 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 4 \text{ m}}{6 \text{ s}} = 1308 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 1308 \text{ W}$$

Die Leistung des Motors beträgt somit rund 1,3 kW.

Zurück zur Aufgabe

⁵ Bei der Bestimmung der Einheit wurde einerseits berücksichtigt, dass $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gilt (dies folgt aus dem Newtonschen *Kraftgesetz*); andererseits gilt nach der Definition der Energie-Einheit $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

-
- Um die Masse m zu bestimmen, die durch die Leistung $P = 1 \text{ PS} = 735 \text{ W}$ in $t = 1 \text{ s}$ um $h = 1 \text{ m}$ angehoben werden kann, setzt man die Hubarbeit $W_H = m \cdot g \cdot h$ in die Definition der Leistung ein und löst die Gleichung nach m auf:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \iff m = \frac{P \cdot t}{g \cdot h}$$

Mit $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ gilt:

$$m = \frac{P \cdot t}{g \cdot h} = \frac{735 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s}}{9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 1 \text{ m}} \approx 74,9 \text{ kg}$$

Mit einer Leistung von $1 \text{ PS} = 735$ kann somit eine Masse von knapp 75 kg in einer Sekunde um einen Meter angehoben werden.

Zurück zur Aufgabe

- Ein Liter Wasser hat eine Masse von einem Kilogramm. Somit kann man die Wassermenge – wie bei der vorherigen Aufgabe – bestimmen, indem man die Hubarbeit $W_H = m \cdot g \cdot h$ in die Definition der Leistung einsetzt und die Gleichung nach m auflöst:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \iff m = \frac{P \cdot t}{g \cdot h}$$

Mit $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ gilt mit $P = 5 \text{ kW} = 5000 \text{ W}$, $h = 15 \text{ m}$ und $t = 1 \text{ s}$:

$$m = \frac{P \cdot t}{g \cdot h} = \frac{5000 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s}}{9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 15 \text{ m}} \approx 34,0 \text{ kg}$$

In einer Sekunde werden somit rund $34 \text{ kg} \equiv 34 \text{ l}$ Wasser nach oben gepumpt; bei gleicher Leistung beträgt die nach oben gepumpte Wassermenge entsprechend $60 \cdot 34 \text{ l} \approx 2039 \text{ l}$.

Zurück zur Aufgabe

- Für die mechanische Leistung P gilt allgemein:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \frac{s}{t}$$

Mit $v = \frac{s}{t} = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $F = 300 \text{ N}$ folgt somit für die mechanische Leistung beim Ziehen des Schlittens:

$$P = F \cdot \frac{s}{t} = 300 \text{ N} \cdot 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 225 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 225 \text{ W}$$

Die mechanische Leistung beträgt somit 225 W .

Zurück zur Aufgabe

-
- Die verrichtete Beschleunigungsarbeit beträgt mit $m = 1200 \text{ kg}$ und $v_2 = 25 \text{ m/s}$ und $v_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 1200 \text{ kg} \cdot \left(\left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1200 \text{ kg} \cdot \left(625 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 225 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) = 240\,000 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 240\,000 \text{ J}\end{aligned}$$

Diese Arbeit wird in $\Delta t = 8 \text{ s}$ verrichtet. Damit lässt sich auch die Beschleunigungsleistung P berechnen:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{240\,000 \text{ J}}{8 \text{ s}} \approx 30\,000 \text{ W}$$

Der Motor muss somit (abgesehen vom Luftwiderstand und von Reibungsverlusten im Getriebe) zur Beschleunigung mindestens $30\,000 \text{ W} = 30 \text{ kW}$ aufbringen.

Zurück zur Aufgabe

Mechanische Energie

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Mechanische Energie*.

- Kann die Reibung vernachlässigt werden, so wird beim Herabfließen des Wassers dessen gesamte Höhenenergie ($E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$) wieder abgegeben. Bezogen auf $1 \text{ m}^3 \equiv 1000 \text{ kg}$ Wasser und eine Fallhöhe von $h = 110 \text{ m}$ ergibt sich:

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h = 1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 110 \text{ m} = 1\,079\,100 \text{ N} \cdot \text{m} = 1\,079\,100 \text{ J} = 1\,079,1 \text{ kJ}$$

Diese Energiemenge entspricht übrigens dem Energiegehalt von etwa 100 g Brot (1 kg Brot enthält rund 10 500 kJ an chemischer Energie).

Zurück zur Aufgabe

- Die Formel für die Bewegungsenergie lautet $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. Setzt man in diese Gleichung die Massen $m_{\text{PKW}} = 1\,000 \text{ kg}$ und $m_{\text{LKW}} = 8\,000 \text{ kg}$ der beiden Fahrzeuge sowie ihre Geschwindigkeit $v_1 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 13,89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}E_{\text{kin,PKW},1} &= \frac{1}{2} \cdot m_{\text{PKW}} \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,000 \text{ kg} \cdot \left(13,89 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \\ &= 96\,466 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 96\,466 \text{ J} \approx 96,5 \text{ kJ} \\ E_{\text{kin,LKW}} &= \frac{1}{2} \cdot m_{\text{LKW}} \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 8\,000 \text{ kg} \cdot \left(13,89 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \\ &= 771\,728,4 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 771\,728,4 \text{ J} \approx 771,7 \text{ kJ}\end{aligned}$$

Durch seine achtfache Masse besitzt der LKW bei gleicher Geschwindigkeit gegenüber dem PKW auch eine achtfache Energie. Wird der PKW auf $v_2 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beschleunigt, so beträgt seine Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,PKW},2} &= \frac{1}{2} \cdot m_{\text{PKW}} \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,000 \text{ kg} \cdot \left(27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= 385\,864,2 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 385\,864,2 \text{ J} \approx 385,9 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Durch den quadratischen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bewegungsenergie hat der PKW bei einer doppelten Geschwindigkeit eine vierfache Bewegungsenergie. Bei einer dreifachen Geschwindigkeit $v = 150 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 41,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nimmt die Bewegungsenergie des PKWs entsprechend auf das neun-fache zu:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,PKW},3} &= \frac{1}{2} \cdot m_{\text{PKW}} \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,000 \text{ kg} \cdot \left(41,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= 868\,194,5 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 868\,194,5 \text{ J} \approx 868,2 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Somit besitzt der PKW bei einer dreifachen Geschwindigkeit eine höhere Bewegungsenergie als der achtmal schwerere LKW.

Zurück zur Aufgabe

- Um die Höhe zu bestimmen, deren Energie einer Bewegung mit $72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ entspricht, setzt man die Formeln für die Höhenenergie E_{pot} und die Bewegungsenergie E_{kin} gleich:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= E_{\text{kin}} \\ m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{aligned}$$

Beide Größen sind direkt proportional zur Geschwindigkeit. In der obigen Gleichung kann die Masse m somit auf beiden Seiten „gekürzt“ werden. Anschließend kann die Gleichung nach der gesuchten Höhe h aufgelöst und der Wert $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für die Geschwindigkeit eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\frac{1}{2} \cdot v^2}{g} = \frac{v^2}{2 \cdot g} \\ &= \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 20,39 \text{ m} \end{aligned}$$

Ein Aufprall eines Fahrzeugs mit $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ entspricht somit einem ungebremsten Sturz aus etwa 20 m Höhe.

Zurück zur Aufgabe

- Um die Geschwindigkeit des Badegasts beim Eintauchen zu ermitteln, kann die Höhenenergie $E_H = m \cdot g \cdot h$ auf dem Sprungbrett ($h = 5 \text{ m}$) mit der kinetischen Energie $E_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ unmittelbar vor dem Eintauchen gleichgesetzt werden:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Auf beiden Seiten der Gleichung kann die Masse m gekuerzt werden. Nach dem Auflösen der Gleichung ergibt sich fuer die Geschwindigkeit v :

$$\begin{aligned} g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot v^2 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \\ &= \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m}} = \sqrt{98,1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Badegasts beim Eintauchen betraegt somit rund $9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, also etwa $35,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

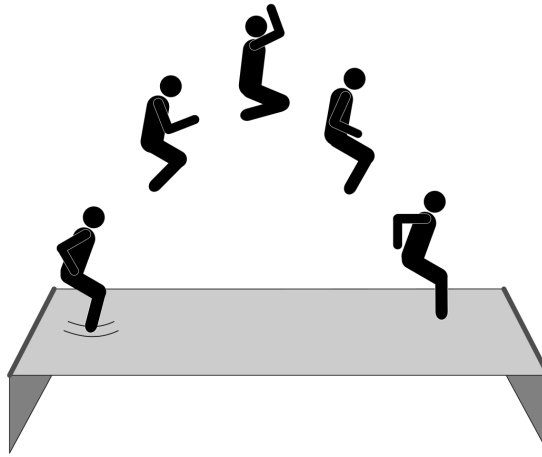
Zurück zur Aufgabe

- Ja, alle Nahrungsmittel enthalten indirekt Sonnenlicht. Pflanzen wandeln diese mittels der Photosynthese zunächst in Zucker, anschließend (auch) in längerket-tige Kohlenhydrate (Stärke, Zellulose) um. Über ein ganzes Jahr gesehen, haben Nahrungsmittel-Pflanzen dabei einen Wirkungsgrad von etwa 1% bis 4%. Gründe hierfür sind Nacht-Zeiten, in denen der Stoffwechsel der Pflanzen umgekehrt abläuft, wechselnde Beleuchtung, Abschattungsverluste durch Überlagerung von Blättern, keine maximale Kohlenstoffdioxid-Konzentration usw.

Tiere leben ihrerseits – direkt oder indirekt – von Pflanzen. Da der „Wirkungs-grad“ der Nahrungsaufnahme stets kleiner als Eins ist und die Tiere selbst Energie zum Aufrechterhalten der Körpertemperatur sowie für Bewegung, Stoffwechsel usw. brauchen, ist es nicht verwunderlich, dass bei Verwendung tierischer Produkte stets die rund 10-fache Menge an pflanzlichen Futtermitteln benötigt wird. Entsprechend geringer ist der „Wirkungsgrad“ tierischer Produkte, er liegt stets in der Größenord-nung von nur 0,1%.

Zurück zur Aufgabe

- In der Ausgangsposition besitzt der Körper des Trampolinspringers weder Bewe-gungsenergie ($E_{\text{kin}} = 0$) noch Höhenenergie ($E_{\text{pot}} = 0$); dafür ist das elastische Trampolintuch maximal gespannt. Diese Spannenergie E_{spann} bewirkt dann eine Beschleunigung bzw. ein Anheben des Körpers.



$E_{\text{pot}} = 0$	$E_{\text{pot}} = \text{max.}$	$E_{\text{pot}} = 0$
$E_{\text{kin}} = 0$	$E_{\text{kin}} = 0$	$E_{\text{kin}} = \text{max.}$
$E_{\text{spann}} = \text{max.}$	$E_{\text{spann}} = 0$	$E_{\text{spann}} = 0$

Am höchsten Punkt wurde die gesamte Bewegungsenergie in Höhenenergie umgewandelt. Anschließend findet in umgekehrter Weise eine Umwandlung von Höhenenergie in Bewegungsenergie statt; unmittelbar vor dem erneuten Kontakt mit dem Trampolintuch ist die Geschwindigkeit des Springers und damit seine kinetische Energie maximal.

Zurück zur Aufgabe

Impuls und Drehimpuls

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Impuls und Drehimpuls*.

- Der Impuls \vec{p} eines Körpers ist definiert als Produkt aus seiner Masse m und seiner Geschwindigkeit \vec{v} . Eine Taube mit einer Masse von $m = 20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$ und einer Geschwindigkeit von $v = 75 \text{ km/h} \approx 20,8 \text{ m/s}$ hat somit folgenden Impuls:

$$p = m \cdot v = 0,02 \text{ kg} \cdot 20,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,42 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Der Impuls der Taube beträgt also rund $0,42 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Zurück zur Aufgabe

- Wenn der Eisenbahnwagen an die stehenden Wagen ankoppelt, bewegen sie sich, – wie bei jedem unelastischen Stoß – anschließend mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit u weiter. Diese kann mit Hilfe des Impulserhaltungs-Satzes bestimmt werden.

Vor dem Stoß bewegt sich nur einer der Wagen mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 3 \text{ m/s}$ und einer Masse m_1 . Nach dem Stoß bewegen sich alle vier Wagen der Geschwindigkeit u , ihre Masse ist dabei $m = 4 \cdot m_1$. Da der Gesamt-Impuls vor und nach dem Stoß identisch ist, muss somit gelten:

$$m_1 \cdot v_1 = 4 \cdot m_1 \cdot u \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{4} \cdot v_1$$

Die Wagen bewegen sich nach dem Ankoppeln also gemeinsam mit $u = 0,75 \text{ m/s}$ weiter.

Zurück zur Aufgabe

- Vor dem (unelastischen) Zusammenprall haben die beiden Fahrzeuge mit den Massen $m_1 = 1000 \text{ kg}$ und $m_2 = 2000 \text{ kg}$ und den Geschwindigkeiten $v_1 = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$ und $v_2 = -50 \text{ km/h} = -13,9 \text{ m/s}$ folgenden Gesamtimpuls:

$$p = (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2) = 1000 \text{ kg} \cdot 13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2000 \text{ kg} \cdot (-13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = -13\,900 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Dieser Impuls bleibt nach dem Zusammenprall erhalten. Die Geschwindigkeit u , mit der sich beide Fahrzeuge nach dem Stoß gemeinsam weiterbewegen, kann berechnet werden, wenn man den Gesamtimpuls durch die Gesamtmasse beider Fahrzeuge teilt:

$$p = (m_1 + m_2) \cdot u \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{p}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{-13\,900 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{1000 \text{ kg} + 2000 \text{ kg}} \approx -4,63 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die beiden Fahrzeuge bewegen sich unmittelbar nach dem Stoß also gemeinsam mit rund $-4,63 \text{ m/s} \approx 16,7 \text{ km/h}$ in Richtung des ersten (leichteren) Fahrzeugs.

Der Fahrer des zweiten (schwereren) Fahrzeugs erfährt innerhalb des „Bremswegs“ $\Delta s = 0,5 \text{ m}$ (der Knautschzone) eine Geschwindigkeitsänderung von $|v_1| = 13,9 \text{ m/s}$ auf $|v| = 4,93 \text{ m/s}$. Damit kann man mittels der *Bremsformel* die wirkende Beschleunigung folgendermaßen berechnen:

$$v^2 - v_1^2 = 2 \cdot a_2 \cdot \Delta s \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = \frac{v^2 - v_1^2}{2 \cdot \Delta s}$$

$$a_2 = \frac{4,63^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 13,9^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 0,5 \text{ m}} \approx -171,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Der Fahrer des ersten (leichteren) Fahrzeugs wird innerhalb des gleichen Bremswegs $\Delta s = 0,5 \text{ m}$ (der Knautschzone des zweiten Fahrzeugs) nicht nur von der Geschwindigkeit $v_1 = +13,9 \text{ m/s}$ bis zum Stillstand abgebremst, sondern zusätzlich auf $-4,63 \text{ m/s}$ beschleunigt. In der Bremsformel kann dies explizit berücksichtigt werden, indem vor die Endgeschwindigkeit v ein Minus-Zeichen gesetzt wird:

$$a_1 = \frac{-4,63^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 13,9^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 0,5 \text{ m}} \approx -214,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Bremsformel berücksichtigt aufgrund der Quadrierung der Geschwindigkeitswerte nicht die ursprüngliche Richtung der Geschwindigkeiten, sondern vergleicht lediglich die Beträge der Start- und Endgeschwindigkeit: Ist die Endgeschwindigkeit geringer als die Startgeschwindigkeit, so ergibt sich ein negatives Vorzeichen. Dies bedeutet hierbei nur, dass die Beschleunigung entgegen der bisherigen Bewegungsrichtung verläuft; die physikalische Interpretation, ob die Beschleunigung „nach links“ oder „nach rechts“ gerichtet ist, muss man hingegen selbst treffen.

An den Beträgen der Beschleunigungen kann man erkennen, dass der Fahrer des schwereren Fahrzeugs beim Zusammenstoß eine geringere Bremsbeschleunigung erfährt der Fahrer des leichten Fahrzeugs; er hat also eine höhere Überlebenschance.

Leichte Fahrzeuge gefährden zwar andere Verkehrsteilnehmer nur in geringerem Maße, sind aber bei Verkehrsunfällen gegenüber schweren Fahrzeugen benachteiligt. „Fair-Play“-Regelungen, wonach beispielsweise für schwere Fahrzeuge entsprechend striktere Regeln bezüglich Knautschzonen gelten müssten, konnten sich politisch bislang leider nicht durchsetzen.

Mechanik der Festkörper, Flüssigkeiten und Gase

Mechanik der Festkörper

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Mechanik der Festkörper*.

- Beton hat eine hohe Druckfestigkeit, Stahl eine hohe Zugfestigkeit. Der Stahl muss folglich in die Unterseite des Betons eingebracht werden, weil dort Zugspannungen auftreten; ohne Stahl könnte der Beton auf der Unterseite auseinander brechen.

Zurück zur Aufgabe

Mechanik der Flüssigkeiten

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Mechanik der Flüssigkeiten*.

Statischer Druck

- Der auf den Kolben ausgeübte Druck p ist gleich dem Quotienten aus der einwirkenden Kraft F und der Querschnittsfläche A des Kolbens:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{350 \text{ N}}{0,01 \text{ m}^2} = 35 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 0,35 \text{ bar}$$

Im Gleichgewichtsfall, also bei einem sich nicht bewegenden Kolben, herrscht im Fluid innerhalb des Zylinders ein ebenso hoher Druck.

Zurück zur Aufgabe

- Der Schweredruck lässt sich mittels folgender Formel berechnen:

$$p_{\text{schwere}} = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot h = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 10 \text{ m} \approx 98,1 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Zur Umrechnung der angegebenen Dichte wurde die Einheits-Beziehung $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ verwendet und $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$ gesetzt.

Die Einheit des Ergebnisses in der obigen Gleichung folgt aus der Beziehung $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Da $1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}$ ist, kann man sagen, dass der Schweredruck im Wasser je 10 m Eintauchtiefe um rund 1 bar zunimmt.

Zurück zur Aufgabe

- Wasser hat eine Dichte von $\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. In einer Leitung kann es so weit steigen, bis der sich ergebende Schweredruck $p_{\text{st}} = \rho \cdot g \cdot h$ mit h als Steighöhe ebenso groß ist wie in der Leitung herrschende Wasserdruck $p = 6 \text{ bar} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ in Bodenhöhe:

$$p = \rho \cdot g \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{p}{\rho \cdot g}$$

$$h = \frac{6 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} \approx 61,2 \text{ m}$$

Das Wasser kann somit rund 61 m hoch steigen.

Zurück zur Aufgabe

Statischer Auftrieb

- Bei einem Volumen von $V = 80 \text{ l}$ und einer durchschnittlichen Dichte von $\rho_K = 1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1,05 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ hat der badende Mensch eine Masse von $m = \rho \cdot V = 1,05 \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 80 \text{ l} = 84 \text{ kg}$ und damit eine Gewichtskraft von $m \cdot g = 80 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \approx 824 \text{ N}$.

Die Auftriebskraft $F_A = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V_K$ ist abhängig vom Volumen des eintauchenden Körpers, jedoch nicht von dessen Dichte. Für reines Wasser ist $\rho_{\text{Fl}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1,00 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, die Auftriebskraft beträgt somit:

$$F_{A,W} = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V_K = 1,00 \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 80 \text{ l} \approx 785 \text{ N}$$

In normalem Wasser hat der badende Mensch somit ein scheinbares Gewicht von $F_G - F_A \approx 39 \text{ N}$; ohne Schwimmbewegungen würde der Körper also sinken.

In gesättigtem Salzwasser gilt mit $\rho_{\text{Fl}} = \rho_{\text{SW}} = 1120 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1,12 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$:

$$F_{A,\text{SW}} = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V_K = 1,12 \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 80 \text{ l} \approx 879 \text{ N}.$$

Im Salzwasser ist die Auftriebskraft des badenden Menschen um 55 N größer als seine Gewichtskraft; der Körper schwimmt also auch ohne Schwimmbewegungen.

Zurück zur Aufgabe

- Um unterzutauchen, muss der Dichtewert eines Körpers größer sein als die Dichte der Flüssigkeit. Um abzutauchen, muss ein Fisch somit seinen Dichtewert erhöhen. Fische besitzen dazu eine Schwimmblase, die mit dem Kiemensystem verbunden ist. Um abzutauchen, entleeren sie diese Schwimmblase, um aufzutauchen, wird sie mit Gas aufgefüllt. Auf diese Weise können Fische ihr Volumen und somit ihre Dichte aktiv beeinflussen.

Unterseeboote haben nach dem gleichen Prinzip Wassertanks, die zum Absinken geflutet und zum Auftauchen mittels Pressluft entleert werden. Auf diese Weise kann ebenfalls die durchschnittliche Dichte des Bootes gesteuert werden.

Zurück zur Aufgabe

Bernoulli-Gleichung

- Mit der ersten Röhre wird nur der statische Druck, mit der hinteren der Gesamtdruck gemessen. Der in der hinteren Röhre zusätzlich auftretende dynamische Druck bewirkt einen stärkeren Anstieg der Flüssigkeitssäule. Im Gleichgewichtsfall entspricht der dynamische Druck p_{dyn} der strömenden Flüssigkeit dem zusätzlichen statischen Druck Δp_{stat} in der hinteren Flüssigkeitssäule:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

Die Dichte ρ kürzt sich heraus, die Gleichung kann dann nach v aufgelöst werden:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1 \text{ m}} \approx 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zurück zur Aufgabe

- Im Extremfall wird der gesamte in der Wasserleitung herrschende statische Druck in den dynamischen Druck des ausströmenden Wassers umgewandelt. Man erhält damit als Gleichung:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \rho_{\text{F1}} \cdot v^2 \quad \Longleftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot p}{\rho_{\text{F1}}}} \approx 14,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Diese Geschwindigkeit entspricht rund $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Zurück zur Aufgabe

Mechanik der Gase

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Mechanik der Gase*.

- Sowohl bei Flüssigkeiten als auch bei Gasen gilt für den dynamischen Druck p_{dyn} :

$$p_{\text{dyn}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

Setzt man hier $p_{\text{dyn}} = 10 \text{ kPa} = 10 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ und für die Dichte ρ des Fluids $\rho_{\text{Wasser}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ beziehungsweise $\rho_{\text{Luft}} = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ein, so folgt:

$$v_{\text{Wasser}} = \sqrt{\frac{2 \cdot p_{\text{dyn}}}{\rho_{\text{Wasser}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ Pa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 4,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Einheit ergibt sich, da $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ und $\text{N} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gilt; somit folgt:

$$\sqrt{\frac{\text{Pa}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = \sqrt{\frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^3}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{(\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot \text{m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

Für die nötige Strömungsgeschwindigkeit von Luft gilt entsprechend:

$$v_{\text{Luft}} = \sqrt{\frac{2 \cdot p_{\text{dyn}}}{\rho_{\text{Luft}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ Pa}}{1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 4,47 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 124,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die zur Erzeugung des gleichen dynamischen Drucks nötige Strömungsgeschwindigkeit ist bei Luft somit wesentlich höher als bei Wasser.

Zurück zur Aufgabe

- Da aufgrund der Kontinuitätsbedingung der Volumenstrom an allen Stellen gleich ist, gilt für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 im weiten und im engen Rohrstück:

$$\dot{V} = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

Setzt man für den Volumenstrom $\dot{V} = 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{min}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ein, so folgt mit $A_1 = 2 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ und $A_2 = 0,5 \text{ cm}^2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$:

$$v_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{2,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = \frac{\dot{V}}{A_2} = \frac{2,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{0,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nachdem die Strömungsgeschwindigkeiten bekannt sind, können nun die zugehörigen dynamischen Drücke $p_{\text{dyn},1}$ und $p_{\text{dyn},2}$ im weiten und engen Rohrstück berechnet werden:

$$p_{\text{dyn},1} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,32 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 1,03 \text{ Pa}$$

$$p_{\text{dyn},2} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,32 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 16,5 \text{ Pa}$$

Da nach der Bernoulli-Gleichung der Gesamtdruck in beiden Rohrteilen gleich ist, muss im ersten, weiteren Rohrteil der statische Druck um $\Delta p = p_{\text{dyn},2} - p_{\text{dyn},1}$ höher sein als im zweiten. Der statische „Überdruck“, der am linken Ende des U-Rohrs anliegt, wird im Gleichgewichtsfall durch zusätzlichen statischen Druck ausgeglichen, der sich durch die zusätzliche Füllhöhe im rechten Teil des U-Rohrs ergibt. Es gilt also:

$$\Delta p = p_{\text{dyn},2} - p_{\text{dyn},1} = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot \Delta h$$

Diese Gleichung kann nach der gesuchten Größe Δh aufgelöst werden:

$$\Delta h = \frac{p_{\text{dyn},2} - p_{\text{dyn},1}}{\rho_{\text{Fl}} \cdot g} = \frac{16,5 \text{ Pa} - 1,03 \text{ Pa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Der Höhenunterschied der Wasserstände im U-Rohr beträgt somit rund 1,6 mm.

Zurück zur Aufgabe

- Bei einer konstanten Sinkgeschwindigkeit müssen sich die wirkenden Kräfte – die nach unten gerichtete Gewichtskraft und die entgegengesetzt wirkende Luftwiderstands-Kraft – gegenseitig aufheben. Es muss also gelten:

$$m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \rho_{\text{L}} \cdot c_{\text{w}} \cdot v^2 \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho_{\text{L}} \cdot c_{\text{w}} \cdot v^2}$$

Für die (runde) Fallschirm-Fläche gilt $A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$; für den Radius d des Fallschirms ergibt sich somit:

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot 4}{c_{\text{w}} \cdot \rho_{\text{L}} \cdot \pi \cdot v^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{1,3 \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot \left(8,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}} \approx 5,0 \text{ m}$$

Die Einheit ergibt sich, wenn man $N = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ setzt:

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}} = \sqrt{\text{m}^2} = \text{m}$$

Der Fallschirm muss somit einen Durchmesser von rund 5 m aufweisen.

Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur Optik

Ausbreitung des Lichts

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Ausbreitung des Lichts*.

- Licht breitet sich von der Sonne geradlinig in alle Richtungen unseres Sonnensystems aus. Nur der schmale Lichtkegel, der dabei auf die Erde trifft, wird von uns direkt wahrgenommen. Zusätzlich können wir das Sonnenlicht wahrnehmen, wenn es auf andere Himmelskörper (vor allem Planeten und Kometen) trifft.

Da das übrige Sonnenlicht unser Auge nicht erreicht, erscheint uns das restliche Weltall als dunkel.

Zurück zur Aufgabe

- Die Zeit, die Licht zum Durchqueren eines Zimmers benötigt, beträgt weniger als $\frac{1}{10\,000\,000}$ s. Zwar wird Licht beim Durchqueren von verschiedenen „optisch dichten“ Stoffen (beispielsweise Wasser) etwas abgebremst, doch ist es stets so schnell, dass es für eine konstante Beleuchtung ständig von einer Lichtquelle neu erzeugt werden muss.

Das „Einfangen“ von winzigen Lichtmengen in einem lichtundurchlässigen Behältnis ist zwar möglich, doch können wir es dann nicht sehen – dafür müsste das Licht ja aus dem Behältnis entweichen und in unsere Augen gelangen..

Zurück zur Aufgabe

Reflexion von Licht

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Reflexion von Licht*.

- Nur diejenigen Stoffe, die eine *glatte* Oberfläche besitzen, können Licht direkt reflektieren – beispielsweise Diamant, Fensterglas, Flüssigkeiten, Metalle und Kunststoffe (geschliffen und poliert), Salz, Zucker, Wasser, Schnee und Eis, Hochglanzpapier, etc.

Stoffe mit *rauen* Oberflächen können Licht diffus, d.h. in alle Richtungen streuend, reflektieren. Das reflektierte Licht erscheint dann als „matt“, d.h. es treten keine Glanzstellen auf.

Zurück zur Aufgabe

- Das Licht, das von Sternen zur Erde gelangt, trifft auf seinem Weg durch das Weltall auf kein Hindernis; es breitet sich daher geradlinig und „verlustfrei“ über beliebig lange Strecken aus. Nachts können wir, wenn der Himmel nicht zu bewölkt oder neblig ist, dieses Licht daher auch auf der Erde beobachten. Die besten Beobachtungen können allerdings von Satelliten aus gemacht werden, denn entlang des Weges durch die Atmosphäre trifft einfallende Licht auf kleine Wasser-Tröpfchen und wird von diesen aus gleichmäßig in alle Richtungen reflektiert („gestreut“). Diese Streuung findet vor allem in den erdnahen Atmosphären-Schichten statt, da dort eine höhere Gas- und Feuchtigkeitsdichte vorherrscht.

Aus dem gleichen Grund können wir auch Lichtquellen auf der Erde nur bedingt weit sehen; bei nebligem Wetter wird die Sichtweite nochmals erheblich verkürzt.

Zurück zur Aufgabe

Lichtbrechung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Lichtbrechung*.

- Die Lichtgeschwindigkeit c in dem optischen Medium lässt sich berechnen, indem man die Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 3,0 \cdot 10^8$ m/s im Vakuum durch die Brechzahl $n = 1,48$ des optischen Mediums teilt:

$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,48} \approx 2,03 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Die Lichtgeschwindigkeit in dem optischen Medium beträgt somit rund $2,03 \cdot 10^8$ m/s.

Zurück zur Aufgabe

- Die (absolute) Brechzahl n des optischen Mediums lässt sich mittels der angegebenen Lichtgeschwindigkeit $c = 2,29 \cdot 10^8$ m/s berechnen, indem das Verhältnis aus der
-

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und der Lichtgeschwindigkeit im Medium gebildet wird:

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,29 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,31$$

Die Brechzahl des optischen Mediums beträgt somit $n = 1,31$. (Ein Vergleich mit tabellarischen Werten lässt vermuten, dass es sich bei dem Medium um Eis handelt.)

Zurück zur Aufgabe

- Trifft ein Lichtstrahl von einem optisch dünnen Medium (Luft, $n_1 = 1$) auf ein optisch dichteres Medium (beispielsweise Glycerin, $n_2 = 1,45$), so wird er zur Senkrechten hin gebrochen. Als Zusammenhang zwischen den Winkeln des einfallenden und gebrochenen Strahls gilt folgende Formel:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Im gegebenen Fall ist $\alpha = 30^\circ$ und $n_1 = 1$, gesucht ist der Winkel β . Löst man die Formel nach der gesuchten Größe auf, so folgt:

$$\beta = \text{asin} \left(\frac{\sin \alpha}{n_2} \right) = \text{asin} \left(\frac{\sin(30^\circ)}{1,45} \right) \approx 20,2^\circ$$

Der Winkel des gebrochenen Strahls beträgt etwa $20,2^\circ$.

Zurück zur Aufgabe

- Die relative Brechzahl $\frac{n_2}{n_1}$ für den Übergang eines Lichtstrahls von Medium 1 (Quarzglas, $n_1 = 1,46$) in Medium 2 (Flintglas, $n_2 = 1,70$) lässt sich als Quotient der Brechzahlen beider Medien berechnen:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1,70}{1,46} \approx 1,16$$

Die Lichtbrechung erfolgt so, als würde ein sich zunächst in Luft ausbreitender Lichtstrahl auf ein optisches Medium mit einer Brechzahl von 1,16 treffen: Der Lichtstrahl wird zur Senkrechten hin gebrochen, der Sinus des Brechungswinkels β ist um das 1,16-fache kleiner als der Sinus des Einfallswinkels α .

Ist der Einfallswinkel $\alpha = 20^\circ$, so beträgt der Brechungswinkel β folglich:

$$\sin \beta = \frac{\sin(\alpha) \cdot n_1}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \text{asin} \left(\frac{\sin(\alpha) \cdot n_1}{n_2} \right)$$
$$\beta = \text{asin} \left(\frac{\sin(20^\circ)}{1,16} \right) \approx 17^\circ$$

Der Winkel β des gebrochenen Lichtstrahls beträgt somit rund 17° .

Zurück zur Aufgabe

-
- Da der im Winkel $\alpha_1 = 50,0^\circ$ einfallende Lichtstrahl an der Grenzfläche zur Senkrechten hin gebrochen wird ($\beta = 30,9^\circ$), muss für die Brechzahlen beider Medien $n_2 > n_1$ gelten. Mit $n_1 = 1$ folgt aus dem Brechungsgesetz:

$$n_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot n_1 = \frac{\sin 50,0}{\sin 30,9^\circ} \cdot 1 \approx 1,49$$

Beim zweiten Übergang ($\alpha_2 = 30,9^\circ$, $\beta_2 = 33,6^\circ$) wird der Lichtstrahl von der Senkrechten weg gebrochen, folglich muss $n_3 < n_2$ gelten. Mit $n_2 \approx 1,49$ folgt:

$$n_3 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot n_2 = \frac{\sin 30,9}{\sin 33,6^\circ} \cdot 1,49 \approx 1,38$$

Die Brechzahlen betragen somit näherungsweise $n_1 = 1$ (Luft), $n_2 = 1,49$ (beispielsweise Plexiglas oder Leinöl) und $n_3 = 1,38$ (beispielsweise Wasser mit 1 mol/l Saccharose).

Zurück zur Aufgabe

- Geht ein Lichtstrahl von Diamant ($n_1 = 2,4$) in Luft ($n_2 = 1$) über, so gilt für den Grenzwinkel α_{\max} :

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \alpha_{\max} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

$$\alpha_{\max} = \arcsin \left(\frac{1}{2,4} \right) \approx 24,6^\circ$$

Der Grenzwinkel α_{\max} beim Übergang eines Lichtstrahls von Diamant in Luft beträgt somit rund $24,6^\circ$. Trifft ein Lichtstrahl mit einem größeren Winkel auf die Grenzfläche, so tritt Totalreflexion ein. Der Lichtstrahl kann den Diamanten (an dieser Stelle) also nicht mehr verlassen, sondern wird anstelle dessen gemäß des Reflexionsgesetzes in den Diamanten zurück reflektiert.

Zurück zur Aufgabe

- Die zwei möglichen Fälle, in denen Licht beim Übergang von einem transparenten Medium in ein anderes nicht gebrochen wird, lassen sich gut erkennen, indem man die Gleichung für das Brechungsgesetz folgendermaßen umstellt:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Leftrightarrow n_2 \cdot \sin \alpha = n_1 \cdot \sin \beta$$

Soll keine Lichtbrechung stattfinden, so muss $\alpha = \beta$ gelten. Dies ist einerseits der Fall, wenn $n_1 = n_2$ gilt, also die Brechungsindizes der beiden Medien gleich sind. Andererseits gilt auch $\alpha = 0^\circ \rightarrow \beta = 0^\circ$ und damit $\alpha = \beta$, wenn der eintretende Lichtstrahl senkrecht zur Oberfläche der Grenzschicht verläuft. In allen anderen Fällen tritt Lichtbrechung auf.

Zurück zur Aufgabe

Linsensysteme

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Linsensysteme*.

- Die Brechkraft D einer Sammellinse mit einer Brennweite von $f = 150 \text{ mm} = 0,150 \text{ m}$ beträgt:

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,150 \text{ m}} = 6,67 \text{ dpt}$$

Die Linse hat also eine Brechkraft von rund 6,67 dpt.

Zurück zur Aufgabe

- Die Brennweite f einer Zerstreuungslinse mit einer Brechkraft von $D = -4,0 \text{ dpt}$ lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$D = \frac{1}{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{1}{D}$$
$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{-4 \text{ dpt}} = \frac{1}{-4 \frac{1}{\text{m}}} = -0,25 \text{ m}$$

Die Brennweite der Zerstreuungslinse beträgt also rund -25 cm .

Zurück zur Aufgabe

- Die Brennweite f_{ges} des Linsensystems erhält man, indem man die Kehrwerte der Brennweiten beider Linsen addiert und anschließend den Kehrwert von diesem Ergebnis bildet. Mit $f_1 = 50 \text{ mm} = 0,050 \text{ m}$ und $f_2 = 75 \text{ mm} = 0,075 \text{ m}$ folgt:

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad \Leftrightarrow \quad f_{\text{ges}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)}$$
$$f_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{0,050 \text{ m}} + \frac{1}{0,075 \text{ m}}} = 0,03 \text{ m}$$

Die Brennweite des Linsensystems beträgt somit insgesamt 30 mm. Das gleiche Ergebnis kann man erhalten, indem man zunächst beide Brennweiten mittels der Formel $D = \frac{1}{f}$ in Dioptrien umrechnet, die Dioptrienzahlen addiert, und von der Gesamt-Dioptrienzahl wiederum auf die zugehörige Brennweite umrechnet:

$$D_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{0,050 \text{ m}} = 20,0 \text{ dpt}$$
$$D_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{0,075 \text{ m}} = 13,3 \text{ dpt}$$
$$D_{\text{ges}} = D_1 + D_2 = 20,0 \text{ dpt} + 13,3 \text{ dpt} = 33,3 \text{ dpt}$$
$$f_{\text{ges}} = \frac{1}{D_{\text{ges}}} = \frac{1}{33,3 \text{ dpt}} = \frac{1}{33,3 \frac{1}{\text{m}}} = 0,03 \text{ m}$$

Auch mit diesem Rechenweg erhält man eine Gesamt-Brennweite von 30 mm.

Zurück zur Aufgabe

-
- Um die Entfernung b des Bildes von der Linse zu berechnen, muss man die gegebenen Größen $D = \frac{1}{f} = 5,0 \text{ dpt} = \frac{5,0}{\text{m}}$ und $g = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$ in die Linsengleichung einsetzen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = D - \frac{1}{g}$$

$$b = \frac{1}{D - \frac{1}{g}} = \frac{1}{5 \frac{1}{\text{m}} - \frac{1}{0,6 \text{ m}}} = \frac{1}{3,33 \frac{1}{\text{m}}} = 0,3 \text{ m}$$

Das Bild befindet sich also im Abstand von 30 cm hinter der Linse. Für den Abbildungsmaßstab $\tilde{\beta}$ folgt somit:

$$\tilde{\beta} = \frac{b}{g} = \frac{0,3 \text{ m}}{0,6 \text{ m}} = \frac{1}{2}$$

Der Gegenstand wird durch die Linse somit um die Hälfte verkleinert abgebildet.

Zurück zur Aufgabe

- Wenn die Brechkraft einer Zerstreuungslinse $D = -8,0 \text{ dpt}$ beträgt, so entspricht dies einer Brennweite von $f = \frac{1}{D} = \frac{1}{-8 \text{ dpt}} = 0,125 \text{ m}$. Setzt man diese Größe sowie die Entfernung $g = 9,0 \text{ cm} = 0,090 \text{ m}$ des Gegenstands von der Linse in die Linsengleichung ein, so erhält man:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$$

$$b = \frac{1}{\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{-0,125 \text{ m}} - \frac{1}{0,090 \text{ m}}\right)} = -0,052 \text{ m}$$

Das Bild des Gegenstands befindet sich somit in einem Abstand von 5,2 cm vor (!) der Zerstreuungslinse.

Zurück zur Aufgabe

Optische Geräte

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Optische Geräte*.

- Die Vergrößerung V des Kepler-Fernrohrs entspricht dem Verhältnis der Brennweiten $f_{\text{Obj}} = 0,32 \text{ m}$ des Objektivs und $f_{\text{Ok}} = 0,04 \text{ m}$ des Okulars:

$$V = \frac{f_{\text{Obj}}}{f_{\text{Ok}}} = \frac{0,32 \text{ m}}{0,04 \text{ m}} = 8$$

Das Kepler-Fernrohr hat somit eine 8-fache Vergrößerung.

Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur Wärmelehre

Temperatur und Wärme

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Temperatur und Wärme*.

- Um eine Temperatur von Grad Celsius in Grad Fahrenheit umzurechnen, muss man den Temperaturwert in die entsprechende Umrechnungsgleichung einsetzen:

$$\text{Temperatur in } ^\circ\text{F} = (\text{Temperatur in } ^\circ\text{C} \cdot 1,8) + 32$$

Mit $T_C = 20\text{ }^\circ\text{C}$ gilt somit:

$$T_F = (T_C \cdot 1,8) + 32 = ((20 \cdot 1,8) + 32)\text{ }^\circ\text{F} = 68\text{ }^\circ\text{F}$$

Eine Temperatur von $20\text{ }^\circ\text{C}$ entspricht somit einer Temperatur von $68\text{ }^\circ\text{F}$.

Zurück zur Aufgabe

- Um eine in Grad Celsius angegebene Temperatur in Kelvin umzurechnen, muss lediglich 273 zum Temperaturwert hinzu addiert werden:

$$\text{Temperatur in K} = \text{Temperatur in } ^\circ\text{C} + 273$$

Mit $T_C = 40\text{ }^\circ\text{C}$ folgt somit:

$$T = T_C + 273 = 40 + 273\text{ K} = 313\text{ K}$$

Zur Umrechnung von Grad Celsius in Grad Fahrenheit muss der gegebene Temperaturwert in die passende Umrechnungs-Gleichung eingesetzt werden:

$$\text{Temperatur in } ^\circ\text{F} = (\text{Temperatur in } ^\circ\text{C} \cdot 1,8) + 32$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$T_F = (T_C \cdot 1,8) + 32 = ((40 \cdot 1,8) + 32)\text{ }^\circ\text{F} = 104\text{ }^\circ\text{F}$$

Eine Temperatur von $40\text{ }^\circ\text{C}$ entspricht somit einer Temperatur von 313 K bzw. von $104\text{ }^\circ\text{F}$.

Zurück zur Aufgabe

Wärmekapazität und Phasenübergänge

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Wärmekapazität und Phasenübergänge*.

- Um $m = 5 \text{ kg}$ Eis mit einer Schmelzwärme von $q_s = 334 \text{ kJ/kg}$ und einer Temperatur von $T = 0^\circ\text{C}$ zu schmelzen, muss eine Wärmemenge ΔQ zugeführt werden, die der Schmelzwärme dieser Eismenge entspricht:

$$Q = m \cdot q_s = 5 \text{ kg} \cdot 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 1670 \text{ kJ}$$

Mit dieser Wärmemenge würden sich $m = 5 \text{ kg}$ Wasser mit einer spezifischen Wärmemenge von $c = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ und einer Temperatur von $T_1 = 0^\circ\text{C}$ um folgende Temperaturdifferenz ΔT erwärmen:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{1670 \text{ kJ}}{5 \text{ kg} \cdot 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}} \approx 79,5^\circ\text{C}$$

Mit der zum Schmelzen von Eis nötigen Wärmemenge könnte die gleiche Masse an Wasser somit auf knapp 80°C erhitzt werden.

Zurück zur Aufgabe

- Für die zum Erwärmen nötige Energiemenge für $m = \rho \cdot V = 1,0 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 3,0 \text{ dm}^3 = 3,0 \text{ kg}$ Wasser gilt:

$$\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T = 3,0 \text{ kg} \cdot 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 80 \text{ K} \approx 1008 \text{ kJ}$$

Beträgt die Heizleistung $P = 2,0 \cdot 10^3 \text{ W}$, so ist folgende Zeit für das Erwärmen nötig:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{1008 \cdot 10^3 \text{ J}}{2,0 \cdot 10^3 \text{ W}} \approx 504 \text{ s} \approx 8,4 \text{ min}$$

Zur Erwärmung sind somit (von Wärmeverlusten abgesehen) rund $8,4 \text{ min}$ nötig.

Zurück zur Aufgabe

Ausbreitung von Wärme

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Ausbreitung von Wärme*.

- Der Wärmestrom I_Q durch das einfach verglaste Fenster kann direkt mit Hilfe der Wärmeleitungs-Formel berechnet werden. Mit $A = 2 \text{ m}^2$, $\lambda = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$, $l = 4 \text{ mm}$ und $\Delta T = 20 \text{ }^\circ\text{C} - 5 \text{ }^\circ\text{C} = 15 \text{ K}$ folgt:

$$\begin{aligned} I_Q &= j_Q \cdot A = \frac{\lambda \cdot A}{l} \cdot \Delta T \\ &= \frac{1 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \cdot 1,0 \text{ m}^2}{0,004 \text{ m}} \cdot 15 \text{ K} = 3750 \text{ W} \end{aligned}$$

Der Wärmestrom ist mit 3750 Watt sehr hoch. Man würde eine ebenso hohe Heizleistung benötigen, um den Wärmeverlust zu kompensieren, andernfalls würde die Temperatur im Zimmer absinken.

Zurück zur Aufgabe

- Bei einem Wärmestrom durch ein doppelt verglastes Fenster sind die einzelnen Wärmewiderstände in Reihe geschaltet; es addieren sich somit die einzelnen Wärmewiderstände. Alle Widerstände haben die gleiche Querschnittsfläche $A_1 = A_2 = A_3 = 2 \text{ m}^2$, zudem sind die Schichtdicken $l_1 = l_3 = 4 \text{ mm}$ sowie die Wärmeleitfähigkeiten $\lambda_1 = \lambda_3 = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$ der beiden Glasscheiben identisch. Mit der Schichtdicke $l_2 = 1 \text{ cm}$ des Luftspalts und dessen Wärmeleitfähigkeit $\lambda_2 = 0,025 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$ folgt für den Gesamtwiderstand:

$$\begin{aligned} R_{\text{ges}} &= R_1 + R_2 + R_3 = 2 \cdot R_1 + R_2 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{l_1}{\lambda_1 \cdot A_1} \right) + \frac{l_2}{\lambda_2 \cdot A_2} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{0,004 \text{ m}}{1 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \cdot 2 \text{ m}^2} \right) + \frac{0,01 \text{ m}}{0,025 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \cdot 2 \text{ m}^2} = 0,204 \frac{\text{K}}{\text{W}} \end{aligned}$$

Für den Wärmestrom gilt damit:

$$I_{Q,RS} = \frac{\Delta T}{R_{\text{ges}}} = \frac{15 \text{ K}}{0,204 \frac{\text{K}}{\text{W}}} \approx 73,5 \text{ W}$$

Obwohl das Fenster eine doppelt so große Fläche A hat wie das einfach verglaste Fenster im letzten Beispiel, ist der Wärmestrom in diesem Fall erheblich geringer. Aus diesem Grund werden inzwischen fast nur noch doppelt (oder sogar dreifach) verglaste Fenster in Häuser eingebaut.

Zurück zur Aufgabe

- Bei einer Verdopplung der Temperatur ergibt sich folgendes Verhältnis der Strahlungsleistungen:

$$\frac{I_{Q,2}}{I_{Q,1}} = \frac{\sigma \cdot A \cdot T_2^4}{\sigma \cdot A \cdot T_1^4} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \frac{(2 \cdot T_1)^4}{T_1^4} = 2^4 = 16$$

Bei einer Verdopplung der Temperatur steigt die Strahlungsleistung somit um das 16-fache an.

Erhöht man die Temperatur eines Wärmestrahlers von $T_1 = 10^\circ\text{C}$ auf $T_2 = 40^\circ\text{C}$, so folgt für das Verhältnis der Strahlungsleistungen:

$$\frac{I_{Q,2}}{I_{Q,1}} = \frac{\sigma \cdot A \cdot T_2^4}{\sigma \cdot A \cdot T_1^4} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \frac{((273 + 40) \text{ K})^4}{((273 + 10) \text{ K})^4} \approx 1,5$$

Bei einer Erhöhung von 10°C auf 40° steigt die Strahlungsleistung auf das 1,5-fache, also um 50% an. Entscheidend ist hierbei, dass mit absoluten Temperaturwerten gerechnet wird und eine vierfache Celsius-Temperatur somit nicht einer vierfachen Kelvin-Temperatur entspricht.

Zurück zur Aufgabe

Ausdehnung bei Erwärmung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Ausdehnung bei Erwärmung*.

- Durch die Erwärmung dehnt sich das Metall-Lineal und damit auch seine Mess-Skala leicht aus. Mit dem erhitzten Lineal gemessene Werte sind somit aufgrund der gestreckten Skala geringfügig zu klein.

Beispiel:

Angenommen, das Lineal bestünde aus Eisen; damit würde es sich um $\alpha_{\text{Fe}} = 0,0121 \text{ mm je Meter Ausgangslänge und je Kelvin Temperaturerhöhung}$ ausdehnen. Ist das Lineal beispielsweise $l = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$ lang und heizt sich um $\Delta T = 50 \text{ K}$ auf, so dehnt es sich um folgende Länge aus:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T = 0,0121 \frac{\text{mm}}{\text{m} \cdot \text{K}} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 50 \text{ K} = 0,30 \text{ mm}$$

Das Lineal dehnt sich in diesem Beispiel somit trotz heftiger Erwärmung um nur $0,3 \text{ mm}$ weit aus. Da Messwerte niemals 100%-ig korrekt abgelesen werden können, ist die Ausdehnung durch Erwärmung in diesem Fall nicht von Bedeutung. Auch das erhitzte Lineal kann somit weiter zur Längenmessung verwendet werden.

Zurück zur Aufgabe

- Aluminium hat den größeren Längen-Ausdehnungskoeffizient als Stahl ($0,024 \frac{\text{mm}}{\text{m} \cdot \text{K}} > 0,010 \frac{\text{mm}}{\text{m} \cdot \text{K}}$); es dehnt sich somit bei Erwärmung stärker aus als Stahl. Soll sich der Bimetall-Streifen nach oben verbiegen, muss somit sich das Aluminium unten beziehungsweise der Chrom-Stahl oben befinden.

Zurück zur Aufgabe

- Der Längen-Ausdehnungskoeffizient von Kupfer beträgt ($\alpha_{\text{Cu}} = 0,0168 \frac{\text{mm}}{\text{m} \cdot \text{K}}$). Durch die Erwärmung um $\Delta T = 50 \text{ K}$ dehnt sich der 120 m lange Draht somit um folgenden Betrag aus:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t = 0,0168 \frac{\text{mm}}{\text{m} \cdot \text{K}} \cdot 120 \text{ m} \cdot 50 \text{ K} = 100,8 \text{ mm} = 10,08 \text{ cm}$$

Der Kupfer-Draht dehnt sich somit um rund 10 cm aus. Seine neue Länge beträgt damit $l + \Delta l \approx 120,1 \text{ m}$.

Zurück zur Aufgabe

- Die Längenschwankung Brücke kann anhand der Temperaturunterschiede ($T_2 - T_1 = (-15 - 15) \text{ K} = -30 \text{ K}$ im Winter beziehungsweise ($T_3 - T_1 = (+40 - 15) \text{ K} = +25 \text{ K}$ im Sommer berechnet werden:

$$l_2 = l_1 \cdot (1 + \alpha \cdot (T_2 - T_1)) = 300 \text{ m} \cdot (1 + 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}} \cdot (-30) \text{ K}) \approx 299,892 \text{ m}$$

$$l_3 = l_1 \cdot (1 + \alpha \cdot (T_3 - T_1)) = 300 \text{ m} \cdot (1 + 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}} \cdot (+25) \text{ K}) \approx 300,09 \text{ m}$$

Die Längenschwankung der Brücke zwischen sommerlichen und winterlichen Temperaturen beträgt somit $l_3 - l_2 \approx 19,8 \text{ cm}$

Zurück zur Aufgabe

- Für den Stahltank als Festkörper gilt $\gamma \approx 3 \cdot \alpha = 35,4 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$. Damit dehnt sich der Tank bei der Temperaturerhöhung um $\Delta T = 35 \text{ K}$ auf folgendes Volumen aus:

$$V_{\text{neu}} = V_0 \cdot (1 + \gamma_{\text{Stahl}} \cdot \Delta T) = 501 \cdot (1 + 35,4 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}} \cdot 35 \text{ K}) \approx 50,061$$

Ein ebenso großes Ausgangsvolumen an Benzin dehnt sich hingegen bei gleicher Temperaturdifferenz auf folgendes Volumen aus:

$$V_{\text{neu}} = V_0 \cdot (1 + \gamma_{\text{Benzin}} \cdot \Delta T) = 501 \cdot (1 + 1,06 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}} \cdot 35 \text{ K}) \approx 51,861$$

Das Benzin dehnt sich folglich wesentlich stärker aus als der Tank. Bei einem randvoll gefüllten Tank besteht somit die Gefahr, dass er sich bei Erwärmung verformt oder reißt; Tankbehälter sollten somit nie komplett gefüllt werden, oder ersatzweise (beispielsweise bei Heizungsanlagen) mit einem Überlauf-Gefäß ausgestattet sein.

Zurück zur Aufgabe

- Eine Besonderheit („Anomalie“) des Wassers liegt darin, dass es sich beim Erwärmen von 0°C bis zu einer Temperatur von 4°C zunächst zusammenzieht; erst ab einer höheren Temperatur $T > 4^\circ \text{C}$ dehnt es sich wieder aus. Wasser hat somit bei 4°C seine höchste Dichte.

Eine zweite Besonderheit des Wassers liegt darin, dass es sich beim Erstarren nicht zusammenzieht, sondern etwa um 9% seines Volumens ausdehnt. Eis hat somit eine geringere Dichte als Wasser und kann daher auf Wasser schwimmen.

Zurück zur Aufgabe

-
- Jedes Gas füllt stets den ganzen Raum aus, der ihm zur Verfügung gestellt wird. Möchte man ein Gasvolumen komprimieren, so muss gegen das Gas Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit wird im Gas in Form von innerer Energie gespeichert: Es erhöht sich damit (theoretisch) der Druck oder die Temperatur des Gases oder (in der Praxis) beide Größen zusammen.

Beim Zusammendrücken einer Luftpumpe erwärmt sich diese zum einen aufgrund der Reibung des Kolbens am Gehäuse der Luftpumpe, zum anderen wird stets ein Teil der zugeführten Kompressionsarbeit in Wärme-Energie umgewandelt.¹

Zurück zur Aufgabe

- Nach dem Modell eines idealen Gases kann das Eigenvolumen der Gasteilchen gegenüber dem Volumen, das diese anhand ihrer Bewegung einnehmen, völlig vernachlässigt werden (die Teilchen selbst haben quasi kein Eigenvolumen).

Wird ein (ideales) Gas abgekühlt, so nimmt die Geschwindigkeit der Gasteilchen ab. Da sie damit weniger Platz beanspruchen, sinkt dementsprechend auch der Gasdruck (bei gleich bleibendem Volumen) bzw. das Volumen (bei gleich bleibendem Druck).² Bei einer Abkühlung hin zum absoluten Temperatur-Nullpunkt (-273 K bzw. 0 K) würde die Eigenbewegung der Gasteilchen zum Stillstand kommen und sich somit auch das Volumen des idealen Gases auf null reduzieren.

Die Teilchen realer Gase haben ein endliches Eigenvolumen, zudem wirken (sehr schwache) Kräfte zwischen den einzelnen Gasteilchen. Reale Gase kondensieren deshalb, bevor sie den absoluten Temperatur-Nullpunkt erreichen.³

Zurück zur Aufgabe

- Nach der Zustandsgleichung eines idealen Gases ist der Quotient $\frac{p \cdot V}{T}$ eines bestimmten Gasvolumens stets konstant. Das gesuchte Volumen V_2 nach der angegebenen Zustandsänderung kann durch Auflösung der Zustandsgleichung aus den übrigen fünf Größen berechnet werden:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \iff V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2}$$

Setzt man die gegebenen Werte ein ($p_1 = 1\text{ bar}$, $T_1 = 300\text{ K}$, $V_1 = 30\text{ cm}^3$, $p_2 = 4\text{ bar}$, $T_2 = 500\text{ K}$), so erhält man:

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2} = \frac{1\text{ bar} \cdot 30\text{ cm}^3 \cdot 500\text{ K}}{300\text{ K} \cdot 4\text{ bar}} = 12,5\text{ cm}^3$$

¹ Beim Aufpumpen eines Balles oder eines Fahrrad-Schlauches ist sich dieser Effekt gut spürbar, da in diesem Fall das Ventil erst öffnet, wenn der Luftdruck in der Pumpe höher ist als in der Umgebung (innerhalb des Balles bzw. des Schlauches). Eine ähnliche Wirkung lässt sich beobachten, wenn die Luftpumpe während des Pumpens mit einem Finger zgedrückt wird.

² Beispielsweise zieht sich ein bei Zimmertemperatur aufgeblasener Luftballon zusammen, wenn man ihn in Eiswasser taucht.

³ Viele Gase – insbesondere Edelgase – lassen sich durch das Modell des idealen Gases allerdings bis zu sehr tiefen Temperaturen sehr gut beschreiben (unter Normaldruck siedet Sauerstoff beispielsweise bei -183 °C , Helium erst bei -269 °C).

Das neue Volumen beträgt somit $12,5 \text{ cm}^3$.

Zurück zur Aufgabe

- Bleibt der Druck p während der Zustandsänderung eines Gases konstant, vereinfacht sich die Zustandsgleichung für ideale Gase folgendermaßen:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Somit kann durch Einsetzen der gegebenen Größen ($V_1 = 20 \text{ m}^2 \times 2,5 \text{ m} = 50 \text{ m}^3$, $T_1 = 12^\circ\text{C} = 285 \text{ K}$, $T_2 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$) das Volumen der erwärmten Luft V_2 berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} &\iff V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} \\ V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} &= \frac{50 \text{ m}^3 \cdot 293 \text{ K}}{285 \text{ K}} \approx 51,4 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Bei gleichem Druck würde sich die Luft somit auf ein Volumen von $51,4 \text{ m}^3$ ausdehnen. Da das Volumen des Raums jedoch nur 50 m^3 beträgt, müssen bei der höheren Temperatur $\Delta V = V_2 - V_1 = 1,4 \text{ m}^3$ Luft aus dem Raum entweichen.

Zurück zur Aufgabe

- Der Behälter enthält $V_1 = 5001$ Luft bei einem Überdruck von $3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, der absolute Luftdruck im Behälter beträgt somit $4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Als Ergebnis sollen $V_2 = 5001$ bei einem Überdruck von $8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, also einem absoluten Druck von $p_2 = 9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ vorliegen. Dafür müsste bei dem anfänglichen Druck p_1 folgendes Volumen V_1 vorliegen:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 &\iff V_1 = \frac{p_2}{p_1} \cdot V_2 \\ V_1 &= \frac{9 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{4 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \cdot 5001 = 11251 \end{aligned}$$

Tatsächlich sind allerdings nur 5001 bei diesem Druck im Behälter enthalten. Es müssen also $V_1^* = 6251$ zusätzlich bei einem Druck von p_1 im Behälter enthalten sein. Dazu ist folgende Luftmenge bei Normaldruck p_0 nötig:

$$\begin{aligned} p_0 \cdot V_0 = p_1 \cdot V_1^* &\iff V_0 = \frac{p_1}{p_0} \cdot V_1^* \\ V_0 &= \frac{4 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \cdot 6251 = 25001 \end{aligned}$$

Es ist somit eine zusätzliche Luftmenge von 25001 bei Normaldruck nötig.

Zurück zur Aufgabe

Allgemeine Gasgleichung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Allgemeine Gasgleichung*.

- Nach der allgemeinen Gasgleichung gilt:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Unter Normalbedingungen gilt für den Druck $p = 1,0 \cdot 10^5$ Pa und für die Temperatur $T = 0^\circ\text{C} = 273,15$ K. Somit ergibt sich für die im Volumen $V = 1,01$ enthaltene Luft folgende Stoffmenge n :

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 273,15 \text{ K}} \approx 0,044 \text{ mol}$$

Die Einheit ergibt sich, wenn man $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ und $\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$ setzt:

$$\frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^3}{\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot \text{K}} = \text{mol}$$

Für die Anzahl N an Teilchen ergibt sich aufgrund der Beziehung $N = n \cdot N_A$:

$$N = n \cdot N_A = 0,044 \text{ mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \approx 2,7 \cdot 10^{22}$$

In einem Liter Luft sind somit rund $2,7 \cdot 10^{22}$ Teilchen enthalten.

Zurück zur Aufgabe

- Nach der allgemeinen Gasgleichung gilt:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = \frac{m}{m_M} \cdot R \cdot T$$

Diese Gleichung kann nach $\rho = \frac{m}{V}$ aufgelöst werden:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot m_M}{R \cdot T}$$

Die molare Masse für Luft beträgt $m_M \approx 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Mit $T = (273 + 20)$ K und $p = 1 \cdot 10^{-10}$ Pa folgt:

$$\rho = \frac{1 \cdot 10^{-10} \text{ Pa} \cdot 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot (273 + 20) \text{ K}} \approx 1,19 \cdot 10^{-12} \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$$

Die Einheit ergibt sich, wenn man $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ und $\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$ setzt. Die resultierende Dichte der Luft im Laborvakuum ist also, verglichen mit der normalen Luftdichte von rund $1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, äußerst gering.

In einem Kubikzentimeter dieses Restgases befindet sich bei gleicher Dichte nur ein Millionstel dieser Masse, also $1,19 \cdot 10^{-18}$ g. Anhand der molaren Masse $m_M = 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ von Luft folgt damit für die enthaltene Stoffmenge:

$$n = \frac{m}{m_M} = \frac{1,19 \cdot 10^{-18} \text{ g}}{29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \approx 4,11 \cdot 10^{-20} \text{ mol}$$

In einem Mol sind $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen enthalten. Somit gilt für die Anzahl N der je Kubikzentimeter im Gefäß verbleibenden Teilchen:

$$N = n \cdot N_A = 4,11 \cdot 10^{-20} \text{ mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \approx 24,7 \cdot 10^3$$

In diesem „Laborvakuum“ sind also immer noch rund 25 000 Luftteilchen je Kubikzentimeter enthalten.

Zurück zur Aufgabe

Lösungen zu Elektrizität und Magnetismus

Elektrische Ladung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Elektrische Ladung*.

- Ladungen können nicht erzeugt oder vernichtet, sondern nur voneinander getrennt werden. Wenn zwei Körper aus unterschiedlichem Material aneinander gerieben werden, gibt der eine Körper negative Ladung (Elektronen) an den anderen ab.

Zurück zur Aufgabe

Stromstärke, Spannung und Widerstand

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Stromstärke, Spannung und Widerstand*.

Ohmsches Gesetz

- Die Stromquelle stellt eine Spannung von $U = 5$ V bereit, die resultierende Stromstärke $I = 0,2$ A. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich für den Widerstand R des Stromkreises:

$$U = R \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{5 \text{ V}}{0,2 \text{ A}} = 25 \Omega$$

Der Widerstand des Stromkreises beträgt somit $R = 25 \Omega$.

Zurück zur Aufgabe

- Die Stromquelle stellt eine Spannung von $U = 12 \text{ V}$ bereit, der Widerstand des Stromkreises $R = 800 \Omega$. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich für die Stromstärke I im Stromkreis:

$$U = R \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{12 \text{ V}}{800 \Omega} = 0,015 \text{ A} = 15 \text{ mA}$$

Die Stromstärke im Stromkreis beträgt somit $I = 15 \text{ mA}$.

Zurück zur Aufgabe

- Die Stromquelle stellt eine Spannung von $U = 230 \text{ V}$ bereit, der Widerstand des Stromkreises $R = 75 \Omega$. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich für die Stromstärke I im Stromkreis:

$$U = R \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{230 \text{ V}}{75 \Omega} \approx 3,1 \text{ A}$$

Die Stromstärke im Stromkreis beträgt somit rund $3,1 \text{ A}$.

Zurück zur Aufgabe

- Der Widerstand im Stromkreis beträgt $R = 50 \Omega$, die fließende Stromstärke $I = 0,3 \text{ A}$. Mit dem Ohmschen Gesetz ergibt sich für die Spannung U der Stromquelle:

$$U = R \cdot I = 50 \Omega \cdot 0,3 \text{ A} = 15 \text{ V}$$

Die von der der Stromquelle bereitgestellte Spannung beträgt somit $U = 15 \text{ V}$.

Zurück zur Aufgabe

- Die Stromquelle stellt eine Spannung von $U = 5 \text{ V}$ bereit, die resultierende Stromstärke $I = 0,2 \text{ A}$. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich für den Widerstand R des Stromkreises:

$$U = R \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{5 \text{ V}}{0,2 \text{ A}} = 25 \Omega$$

Der Widerstand des Stromkreises beträgt somit $R = 25 \Omega$.

Zurück zur Aufgabe

Spezifischer Widerstand

- Der elektrische Widerstand R des Kupferdrahtes lässt sich anhand der Formel $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ berechnen, indem man als Werte für die Länge $l = 10 \text{ m}$, für den Querschnitt $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (2 \text{ mm})^2 \approx 12,6 \text{ mm}^2$ und $\rho_{\text{Cu}} = 0,0156 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ einsetzt:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0,0156 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{10 \text{ m}}{12,56 \text{ mm}^2} \approx 0,012 \Omega$$

Der Draht hat einen elektrischen Widerstand von rund $0,012 \Omega$.

Zurück zur Aufgabe

- Der elektrische Widerstand R des Kupferdrahtes lässt sich mit Hilfe der Formel $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ berechnen, indem man als Werte für die Länge $l = 11,4 \text{ km} = 11400 \text{ m}$, für den Querschnitt $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (8,0 \text{ mm})^2 \approx 201 \text{ mm}^2$ und $\rho_{\text{Cu}} = 0,0156 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ einsetzt:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0,0156 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{11400 \text{ m}}{201 \text{ mm}^2} \approx 0,89 \Omega$$

Für einen Draht aus Aluminium folgt in gleicher Weise:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0,0265 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{11400 \text{ m}}{201 \text{ mm}^2} \approx 1,50 \Omega$$

Für einen Draht aus Edelstahl ergibt sich:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0,720 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{11400 \text{ m}}{201 \text{ mm}^2} \approx 40,8 \Omega$$

Der Kupferdraht hat einen elektrischen Widerstand von rund $0,89 \Omega$. Baugleiche Drähte aus Aluminium bzw. Eisen hätten elektrische Widerstände von $1,50 \Omega$ bzw. $40,8 \Omega$.

Zurück zur Aufgabe

- Den nötigen Radius des Eisendrahts erhält man, indem man die Formel $R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \rho \cdot \frac{l}{\pi \cdot r^2}$ nach r auflöst:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{\pi \cdot r^2} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\rho \cdot \frac{l}{\pi \cdot R}}$$

Setzt man hierbei den spezifischen Widerstand von Eisen $\rho_{\text{Fe}} = 0,125 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$, für die Länge $l = 50 \text{ m}$ und für den maximalen Widerstand $R = 1 \Omega$ ein, so erhält man:

$$r = \sqrt{\rho \cdot \frac{l}{\pi \cdot R}} = \sqrt{0,125 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{50 \text{ m}}{\pi \cdot 1 \Omega}} \approx 1,41 \text{ mm}$$

Der Draht muss somit einen Durchmesser von mindestens $2 \cdot r \approx 2,82 \text{ mm}$ haben.

Zurück zur Aufgabe

Elektrische Felder

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Elektrische Felder*.

- Für die im Kondensator gespeicherte Energie gilt:

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 220 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot (6,0 \text{ V})^2 = 0,00396 \text{ J}$$

Die Einheit ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$\text{F} \cdot \text{V}^2 = \frac{\text{C}}{\text{V}} \cdot \text{V}^2 = \text{C} \cdot \text{V} = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V} = \text{W} \cdot \text{s} = \text{J}$$

Die beim Entladen des Kondensators freigesetzte Energie beträgt somit knapp 4 mJ. Die Energiemenge ist zwar nicht groß, sie wird allerdings in einer sehr kurzen Zeit umgesetzt. Nimmt man $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ an, so erhält man für die beim Blitzvorgang zur Verfügung gestellte Leistung etwa $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \approx 39,6 \text{ W}$.

Zurück zur Aufgabe

- Für den Zusammenhang zwischen der Kapazität C , der Ladung Q und der Spannung U gilt für einen Plattenkondensator:

$$Q = C \cdot U \quad \Longleftrightarrow \quad U = \frac{Q}{C}$$

Setzt man zudem $Q = I \cdot t$ ein, so erhält man bei einer konstanten Stromstärke I für $t = 1 \text{ s}, 2 \text{ s}, \dots$:

$$U(1 \text{ s}) = \frac{0,003 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}}{470 \cdot 10^{-6} \text{ F}} \approx 6,38 \text{ V}$$

$$U(2 \text{ s}) = \frac{0,003 \text{ A} \cdot 2 \text{ s}}{470 \cdot 10^{-6} \text{ F}} \approx 12,76 \text{ V}$$

$$U(3 \text{ s}) = \frac{0,003 \text{ A} \cdot 3 \text{ s}}{470 \cdot 10^{-6} \text{ F}} \approx 19,15 \text{ V}$$

$$U(4 \text{ s}) = \frac{0,003 \text{ A} \cdot 4 \text{ s}}{470 \cdot 10^{-6} \text{ F}} \approx 25,53 \text{ V}$$

$$U(5 \text{ s}) = \frac{0,003 \text{ A} \cdot 5 \text{ s}}{470 \cdot 10^{-6} \text{ F}} \approx 31,91 \text{ V}$$

Die Einheit ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{F}} = \frac{\text{Q}}{\frac{\text{Q}}{\text{V}}} = \text{V}$$

Die gespeicherten Energiemengen können mittels dieser Ergebnisse anhand der Formel $E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$ berechnet werden:

$$E(1 \text{ s}) = \frac{1}{2} \cdot 470 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot (6,38 \text{ V})^2 \approx 0,0096 \text{ J}$$

$$E(2 \text{ s}) = \frac{1}{2} \cdot 470 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot (12,76 \text{ V})^2 \approx 0,0383 \text{ J}$$

$$E(3 \text{ s}) = \frac{1}{2} \cdot 470 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot (19,15 \text{ V})^2 \approx 0,0862 \text{ J}$$

$$E(4 \text{ s}) = \frac{1}{2} \cdot 470 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot (25,53 \text{ V})^2 \approx 0,1532 \text{ J}$$

$$E(5 \text{ s}) = \frac{1}{2} \cdot 470 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot (31,91 \text{ V})^2 \approx 0,2394 \text{ J}$$

Die Einheit ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$\text{F} \cdot \text{V}^2 = \frac{\text{C}}{\text{V}} \cdot \text{V}^2 = \text{C} \cdot \text{V} = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V} = \text{W} \cdot \text{s} = \text{J}$$

Üblicherweise ist jedoch – anders als bei dieser Aufgabe – die Stromstärke beim Laden eines Kondensators nicht konstant (siehe [Ladekurve eines Kondensators](#)).

Zurück zur Aufgabe

Lösungen zu Magnetismus

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Magnetismus*.

- Wenn der Nordpol der Magnetnadel – geographisch gesehen – nach Norden zeigt, so muss sich dort der magnetische Südpol der Erde befinden; der magnetische Nordpol der Erde befindet sich entsprechend (näherungsweise) am geographischen Südpol.

Zurück zur Aufgabe

Elektrische Arbeit, Energie und Leistung

Die folgenden Lösungen beziehen sich auf die *Übungsaufgaben* zum Abschnitt *Elektrische Arbeit, Energie und Leistung*.

- Mit Hilfe der Definition der elektrischen Leistung P kann die fließende Stromstärke I folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$P = U \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{P}{U}$$

Durch Einsetzen der Werte erhält man für eine $P = 40 \text{ W}$ -Glühbirne, die mit $U = 230 \text{ V}$ betrieben wird:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{40 \text{ W}}{230 \text{ V}} \approx 0,17 \text{ A}$$

Die Stromstärke in der Glühbirne beträgt somit rund $0,17 \text{ A}$. Wird die Glühbirne $t = 6 \text{ h}$ lang betrieben, so wird folgende Menge an elektrischer Energie in Licht und Wärme umgewandelt:

$$E = P \cdot t = 40 \text{ W} \cdot 6 \text{ h} = 240 \text{ W} \cdot \text{h} = 0,24 \text{ kWh}$$

Es werden somit $0,24 \text{ kWh}$ an elektrischer Energie benötigt.

Die Ladungsmenge Q , die innerhalb der angegebenen Zeit durch die Glühbirne fließt, kann folgendermaßen berechnet werden:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \iff \Delta Q = I \cdot \Delta t = 0,17 \text{ A} \cdot 6 \cdot 3600 \text{ s} = 3672 \text{ C}$$

Es fließen somit innerhalb von sechs Stunden knapp $3,7 \cdot 10^3 \text{ C}$ an elektrischer Ladung durch die Glühbirne.

Zurück zur Aufgabe

- Aus der angegebenen Leistung P und der Spannung U kann man zunächst die Stromstärke I berechnen:

$$P = U \cdot I \iff I = \frac{P}{U} = \frac{2,5 \text{ W}}{6,0 \text{ V}} \approx 0,417 \text{ A}$$

Für die Stromstärke gilt zudem die Beziehung $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$; für die Ladungsmenge ΔQ , die in der Zeitspanne Δt durch die Glühbirne fließt, gilt somit:

$$\Delta Q = I \cdot \Delta t = 0,417 \text{ A} \cdot (5 \cdot 60) \text{ s} = 125 \text{ C}$$

Diese Ladungsmenge entspricht folgender Anzahl N an Elektronen:

$$Q = N \cdot e \iff N = \frac{Q}{e} = \frac{125 \text{ C}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 7,8 \cdot 10^{20}$$

Es fließen in den fünf Minuten somit rund $7,8 \cdot 10^{20}$ Elektronen durch die Glühbirne.

Zurück zur Aufgabe

- Mit Hilfe der Definition der elektrischen Leistung P lässt sich die fließende Stromstärke I folgendermaßen ausdrücken:

$$P = U \cdot I \iff I = \frac{P}{U}$$

Durch Einsetzen der Werte erhält man für einen $P = 1800 \text{ W}$ -Wasserkocher, der mit $U = 230 \text{ V}$ betrieben wird:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{1800 \text{ W}}{230 \text{ V}} \approx 7,83 \text{ A}$$

Die Stromstärke im Wasserkocher beträgt somit rund $7,83 \text{ A}$.

Zurück zur Aufgabe

-
- Für die elektrische Leistung gilt $P_{\text{el}} = U \cdot I$. Für die Stromstärke I kann wiederum aufgrund des Ohmschen Gesetzes $U = R \cdot I$ auch $I = \frac{U}{R}$ geschrieben werden. Damit ergibt sich:

$$P_{\text{el}} = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$$

Ist $U_{\text{neu}} = 1,25 \cdot U$, so folgt für das Verhältnis aus $P_{\text{el,neu}}$ zu P_{el} :

$$\frac{P_{\text{el,neu}}}{P_{\text{el}}} = \frac{\frac{U_{\text{neu}}^2}{R}}{\frac{U^2}{R}} = \frac{U_{\text{neu}}^2}{U^2} = \frac{(1,25 \cdot U)^2}{U^2} \approx 1,56$$

Die elektrische Leistung nimmt somit um rund 56% zu.

Zurück zur Aufgabe

Lösungen zur Atom- und Kernphysik

Tabellen

Lateinische und griechische Wortherkünfte

Tab. 28: Griechisches Alphabet

Buchstabe	Aussprache	Buchstabe	Aussprache	Buchstabe	Aussprache	
A	α	Alpha	I	ι	Jota	
B	β	Beta	K	κ	Kappa	
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	
Δ	δ	Delta	M	μ	My	
E	ε	Epsilon	N	ν	Ny	
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	
H	η	Eta	O	o	Omikron	
Θ	ϑ	Theta	Π	π	Pi	
				P	ρ	Rho
				Σ	σ	Sigma
				T	τ	Tau
				Υ	υ	Ypsilon
				Φ	φ	Phi
				X	χ	Chi
				Ψ	ψ	Psi
				Ω	ω	Omega

Tab. 29: Fachbegriffe lateinischer Herkunft

Lateinisch	Deutsch	Fachbegriff(e)
absorbere	verschlucken	<i>Absorption</i> von Licht
adhaerere	aneinander haften	<i>Adhäsionskraft</i>
aggregare	sich ansammeln	<i>Aggregatzustand</i>
area	Fläche	Areal; area = Fläche (en.)
calor	warm	<i>Kalorimeter</i> , Kalorien
capacitas	Fassungsvermögen	<i>Kapazität</i> , <i>Wärmekapazität</i>
capillus	Haar	<i>Kapillare</i>
centrum	Mittelpunkt	konzentrisch
cohaerere	zusammenhängen	<i>Kohäsionskraft</i>
colligere	(ein-)sammeln	Kollektor (Transistor)
commutare	umwechseln	Kommutator
componere	zusammensetzen	Komponente (eines Vektors)
concavus	hohl	<i>Konkavspiegel</i>
condensare	verdichten	Kondensator, <i>Kondensor</i> , <i>kondensieren</i>
constans	unveränderlich	<i>Konstante</i>
convergere	zueinander neigen	Konvergenz, <i>konvergierende Lichtstrahlen</i>

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tab. 29 – Fortsetzung der vorherigen Seite

declinare	abweichen	Deklination
divergere	auseinanderlaufen	Divergenz, <i>divergierende Lichtstrahlen</i>
ducere	führen	<i>Induktion</i>
efficere	bewirken	<i>Effektive Stromstärke, Effizienz</i>
emittere	aussenden	Emitter (Transistor)
ex	außerhalb	extrahieren
fixus	fest	<i>Fixpunkt</i>
fugare	fliehen	<i>Zentrifugalkraft</i>
focus	Brennpunkt	<i>Fokus</i>
frequens	häufig	<i>Frequenz</i>
generare	erzeugen	<i>Generator</i>
gravis	schwer	<i>Gravitation</i>
inertia	Trägheit	<i>Inertialsystem</i>
impellere	anstoßen	<i>Impuls</i>
labilis	unsicher	<i>labiles Gleichgewicht</i>
minimum	das Kleinste	Minimum
molecula	kleine Masse	Molekül
oculus	Auge	<i>Okular</i>
orbitum	(Bahn-)Gleis	<i>Orbital</i>
petere	zu erreichen suchen	<i>Zentripetalkraft</i>
potentia	Fähigkeit	<i>Potentielle Energie, Potential</i>
pressum	Druck	Presskraft; pressure = <i>Druck</i> (en.)
quantum	wieviel	Quant
re	zurück	<i>Reflexion</i>
reflectere	abwenden	Reflex, <i>Reflexion</i>
sonare	schallen, tönen	<i>Resonanz</i>
spectrum	Bild	<i>Spektrum</i>
stare	stehen	<i>Stabiles Gleichgewicht</i> , Statik, Stativ
transformare	umwandeln	Transformator
vacuus	leer	<i>Vakuum</i>

Tab. 30: Fachbegriffe griechischer Herkunft

Griechisch	Deutsch	Fachbegriff(e)
akuein	hören	<i>Akustik</i>
ana	auf	Anode
anomal	unregelmäßig	<i>Anomalie</i> (des Wassers)
atmos	Dunst	Atmosphäre
atomos	unteilbar	<i>Atom</i>
baros	schwer	Barometer, isobar
chimeia	[Kunst der] Gießerei	Chemie
choros	Raum	isochor
di	zwei	<i>Dipol</i>

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tab. 30 – Fortsetzung der vorherigen Seite

dia	hindurch	Diaprojektor, diagonal
dynamis	Kraft	<i>Dynamik</i>
elektron	Bernstein	<i>Elektron</i> , <i>Elektrizität</i>
energeia	Wirksamkeit	<i>Energie</i>
gramma	Schrift	Grammophon, Grammatik
graphein	schreiben	Graph , Phonograph, Graphit, Graphen
hodos	Weg	Anode, Kathode , Elektrode
homogen	gleichartig	Homogenität
hydragyrum	Flüssigsilber	Quecksilber (<i>Hg</i>)
hygros	feucht	<i>Hygrometer</i>
ion	wandernd	<i>Ion</i> , <i>Ionisierungsenergie</i>
iris	Regenbogen	Iris
isos	gleich	<i>Isotop</i> , isotherm, isobar, isochor
kata	abwärts	Kathode
kinesis	Bewegung	<i>Kinematik</i>
lyein	lösen, zerlegen	Elektrolyse
mechanikos	kunstfertig	<i>Mechanik</i>
meros	Teil	Monomere, Polymere
metron	Maß	<i>Meter</i> , Metronom
phasis	Erscheinung	<i>Phase</i> (einer Welle), Mond-Phase
phone	Stimme, Ton	<i>Phon</i> , Mikrophon, Telephon
phos	Licht	<i>Photometrie</i>
polos	Achse	<i>Magnetpol</i> , Interpolation
poly	viele	Polymere
qualitas	Beschaffenheit	Qualität, <i>qualitative Erkenntnis</i>
skopein	sehen	<i>Mikroskop</i> , <i>Elektroskop</i> , <i>Teleskop</i>
sphaira	Kugel	Atmosphäre, sphärisch
stereos	körperlich	Stereometrie, Stereo-Lautsprecher
symbolon	Merkmal	<i>Symbol</i>
tachys	schnell	Tachometer
tele	fern	Telephon, <i>Teleskop</i>
thermos	warm	<i>Thermometer</i>
tópos	Platz	<i>Isotop</i>
tri	drei	Triode

Symbole und Einheiten

Tab. 31: Größen und Symbole

Größe	Symbol	Größe	Symbol
Beschleunigung	a	Leistung	P
Dichte	ρ	Masse	m
Drehimpuls	\vec{L}	Spannung	U
Energie	E	Stromstärke	I
Fläche	A	Temperatur	T
Geschwindigkeit	\vec{v}	Volumen	V
Impuls	\vec{p}	Widerstand	R
Kraft	\vec{F}	Zeit	t

Tab. 32: SI-Basiseinheiten

Größe	Einheit	Einheitsbezeichnung
Länge	m	Meter
Zeit	s	Sekunde
Masse	kg	Kilogramm
Temperatur	K	Kelvin
Elektr. Stromstärke	A	Ampere
Lichtstärke	cd	Candela
Stoffmenge	mol	Mol

Tab. 33: Größen und ihre Einheiten

Größe	Einheit	Einheitsbezeichnung	Definition
Zeit	min	Minute	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
	h	Stunde	$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$
	d	Tag	$1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min} = 86400 \text{ s}$
	a	Jahr	$1 \text{ a} = 365,2422 \text{ d} = 31\,556\,926 \text{ s}$
Frequenz	Hz	Hertz	$1 \text{ Hz} = 1 / \text{s}$
Kraft	N	Newton	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$
Druck	Pa	Pascal	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} / \text{m}^2$
	bar	Bar	$1 \text{ bar} = 100\,000 \text{ Pa}$
Energie, Arbeit, Wärme	J	Joule	$1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$
	kWh	Kilowattstunde	$1 \text{ kWh} = 3\,600\,000 \text{ J}$
Drehmoment	Nm	Newtonmeter	$1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$
Leistung	W	Watt	$1 \text{ W} = 1 \text{ J} / \text{s}$
Elektrische Ladung	C	Coulomb	$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$
Elektrische Spannung	V	Volt	$1 \text{ V} = 1 \text{ W} / \text{A} = 1 (\text{kg} \cdot \text{m}^2) / (\text{A} \cdot \text{s}^3)$
Elektrischer Widerstand	Ω	Ohm	$1 \Omega = 1 \text{ V} / \text{A} = 1 (\text{kg} \cdot \text{m}^2) / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^3)$
Elektrische Kapazität	F	Farad	$1 \text{ F} = 1 \text{ C} / \text{V} = 1 (\text{A}^2 \cdot \text{s}^4) / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
Magnetischer Fluss	Wb	Weber	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}$
Magnetische Flussdichte	T	Tesla	$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb} / \text{m}^2 = 1 (\text{V} \cdot \text{s}) / \text{m}^2$
Induktivität	H	Henry	$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb} / \text{A} = 1 (\text{V} \cdot \text{s}) / \text{A}$
Temperatur	$^{\circ}\text{C}$	Grad Celsius	$1^{\circ}\text{C} = 1 \text{ K}$ (nur bei Angabe von Celsius-Temperaturen)

Tab. 34: Zehnerpotenzen

Vorsilbe	Kurzzeichen	Faktor	Kurzschreibweise
Yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000	$1 \cdot 10^{24}$
Zetta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000	$1 \cdot 10^{21}$
Exa	E	1 000 000 000 000 000 000	$1 \cdot 10^{18}$
Peta	P	1 000 000 000 000 000	$1 \cdot 10^{15}$
Tera	T	1 000 000 000 000	$1 \cdot 10^{12}$
Giga	G	1 000 000 000	$1 \cdot 10^9$
Mega	M	1 000 000	$1 \cdot 10^6$
Kilo	k	1 000	$1 \cdot 10^3$
Hekto	h	100	$1 \cdot 10^2$
Deka	da	10	$1 \cdot 10^1$
		1	$1 \cdot 10^0$
Dezi	d	0,1	$1 \cdot 10^{-1}$
Zenti	c	0,01	$1 \cdot 10^{-2}$
Milli	m	0,001	$1 \cdot 10^{-3}$
Mikro	μ	0,000 001	$1 \cdot 10^{-6}$
Nano	n	0,000 000 001	$1 \cdot 10^{-9}$
Piko	p	0,000 000 000 001	$1 \cdot 10^{-12}$
Femto	f	0,000 000 000 000 001	$1 \cdot 10^{-15}$
Atto	a	0,000 000 000 000 000 001	$1 \cdot 10^{-18}$
Zepto	z	0,000 000 000 000 000 000 001	$1 \cdot 10^{-21}$
Yokto	y	0,000 000 000 000 000 000 000 001	$1 \cdot 10^{-24}$

Naturkonstanten

Tab. 35: Allgemeine Naturkonstanten

Konstante	Symbol	Betrag und Einheit
Avogadro-Konstante	N_A	$6,0221367 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{V}\cdot\text{m}}$
Elementarladung	e_0	$1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Eulersche Zahl	e	2,718281828459045...
Fallbeschleunigung auf der Erde (Norm)	g	$9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Faraday-Konstante	F	$96487,0 \frac{\text{C}}{\text{mol}}$
Gravitationskonstante	γ	$6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}$
Kreiszahl	π	3,141592653589793...
Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)	c	$2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}$
Planck-Konstante	h	$6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5,6705 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}^4}$
Universelle Gaskonstante	R	$8,314510 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$

Tab. 36: Astronomische Daten der Sonne und Erde

Sonne:		Erde:	
Masse	$m_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Masse	$m_E = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Radius	$r_S = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	Radius (Durchschnitt)	$r_E = 6371 \text{ km}$
Oberflächentemperatur	$T_S = 5,78 \cdot 10^3 \text{ K}$	Bahnradius (Durchschnitt)	$r_{EB} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$
Leuchtkraft	$L_S = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$		

Tab. 37: Ortsfaktoren im Sonnensystem

Ort	Ortsfaktor in $\frac{\text{N}}{\text{kg}}$
Sonne	274
Erde (Äquator)	9,78
Erde (Mitteleuropa)	9,81
Erde (Nordpol, Südpol)	9,83
Erde (300 km über Meeresspiegel)	8,96
Erde (40 000 km über Meeresspiegel)	0,19
Mond der Erde	1,60
Jupiter	24,79
Mars	3,69
Merkur	3,70
Neptun	11,15
Pluto	0,62
Saturn	10,44
Uranus	8,87
Venus	8,87

Materialabhängige Größen

Tab. 38: Dichte von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen (bei 0 °C)

Festkörper	Dichte in kg/dm ³	Flüssigkeit	Dichte in kg/dm ³	Gas	Dichte in kg/m ³
Aluminium	2,7	Ethanol	0,79	Chlor	3,21
Blei	11,34	Glycerin	1,26	Helium	0,18
Eis	0,9	Leichtbenzin	0,7	Kohlenstoffdioxid	1,98
Glas	ca. 2,5	Petroleum	0,81	Luft	1,29
Gold	19,3	Quecksilber	13,6	Methan	0,72
Hartgummi	ca. 1,3	Schmieröl	0,9	Wasserstoff	0,09
Holz	0,5 bis 1,2	Schwefelsäure	1,836	Xenon	5,90
Kork	0,2	Wasser (bei 4 °C)	1,000		
Kupfer	8,9				
Schaumstoff	0,15				
Silber	10,5				
Stahl	7,8				

Tab. 39: Haft- und Gleitreibungszahlen einiger Stoffe

Stoffpaar	Haftreibungszahl μ_H	Gleitreibungszahl μ_H
Holz auf Holz	0,5 bis 0,6	0,2 bis 0,4
Stahl auf Stahl	0,15	0,06
Stahl auf Eis	0,03	0,01
Autoreifen auf Beton (trocken)	1,00	0,60
Autoreifen auf Beton (nass)	0,50	0,30
Autoreifen auf Eis	0,10	0,05

Tab. 40: Luftwiderstands-Beiwerte

Gegenstand	c_w -Wert
Halbkugel (konkav), Fallschirm	1,33
Rechteckige Platte	1,1 bis 1,3
Kreisförmige Platte	1,11
Mensch (stehend)	0,78
LKW	0,6 bis 0,9
Fahrradfahrer (Mountainbike)	0,5 bis 0,7
Kugel	0,45
Fahrradfahrer (Rennrad)	0,4
PKW	0,25 bis 0,45
Halbkugel (konvex)	0,34
Tropfen (Stromlinienform)	0,02

Tab. 41: Viskositätswerte verschiedener Flüssigkeiten
(bei 20 °C)

Substanz	Viskosität η in mPa · s
Aceton	0,32
Benzol	0,65
Ethanol	1,20
Glycerin	1480
Olivenöl	≈ 80
Sirup	$\approx 1\,000$ bis $10\,000$
Wasser (10 °C)	1,30
Wasser (20 °C)	1,00
Wasser (30 °C)	0,80

Tab. 42: Thermische Eigenschaften von Festkörpern

Material	Schmelztemperatur T_S in °C (bei 101,3 kPa)	Siedetemperatur T_V in °C (bei 101,3 kPa)	Längen- Ausdehnungskoeffizient α in $10^{-6} \frac{1}{K}$	Spezifische Wärmekapazität c in $\frac{kJ}{kg \cdot K}$	Spezifische Schmelzwärme q_s in $\frac{kJ}{kg}$
Aluminium	660	2450	23,1	0,90	397
Beton	—	—	12,0	0,84	—
Blei	327	1750	29,0	0,13	23,0
Diamant	3540	4830	1,3	0,50	—
Eisen	1535	2735	11,8	0,45	277
Glas (Quarz)	1700	—	0,5	0,73	—
Gold	1063	2700	14,3	0,13	65,7
Graphit	3650	4830	7,9	0,71	—
Holz (Eiche)	—	—	Ca. 8	2,4	—
Kupfer	1083	2590	16,5	0,38	184
Magnesium	650	1110	26,0	1,02	368
Platin	1769	4300	9,0	0,13	111
Porzellan	—	—	3 bis 4	0,84	—
Silber	961	2180	18,9	0,24	105
Silicium	1420	2355	2,6	0,70	164
Wolfram	3380	5500	4,5	0,13	192
Zinn	232	2690	22,0	0,23	59,6

Tab. 43: Thermische Eigenschaften von Flüssigkeiten

Material	Schmelztemperatur T_S in °C (bei 101,3 kPa)	Siedetemperatur T_V in °C (bei 101,3 kPa)	Volumen-Ausdehnungskoeffizient γ in $10^{-3} \frac{1}{K}$	Spezifische Wärmekapazität c in $\frac{kJ}{kg \cdot K}$	Spezifische Verdampfungswärme q_v in $\frac{kJ}{kg}$
Azeton	-95	56,3	1,46	2,16	525
Benzol	+5,5	80,1	1,24	2,05	394
Brom	-7,2	58,8	1,13	0,46	183
Ethanol	-114	78,3	1,40	2,43	840
Glycerin	18,4	291	0,52	2,39	825
Methanol	-98	64,6	1,20	2,50	1100
Olivenöl (nativ)	Ca. -7	Ca. 180	1,14	1,97	
Petroleum	Ca. -35	Ca. 200	0,96	2,14	
Quecksilber	-38,9	357	0,18	0,14	285
Wasser	0	100	0,21	4,18	2257

Tab. 44: Thermische Eigenschaften von Gasen

Material	Schmelztemperatur T_S in °C (bei 101,3 kPa)	Siedetemperatur T_V in °C (bei 101,3 kPa)	Spezifische Wärmekapazität c_v in $\frac{kJ}{kg \cdot K}$	Spezifische Wärmekapazität c_p in $\frac{kJ}{kg \cdot K}$	Spezifische Verdampfungswärme q_v in $\frac{kJ}{kg}$
Ammoniak	-77,7	-33,4	1,65	2,16	1370
Chlor	-101	-34,1	0,55	0,74	290
Helium	-271	-269	3,21	5,23	20,6
Kohlenstoffdioxid	-56,6 (bei $p = 0,53$ MPa)	-78,5 (Sublimationspunkt)	0,65	0,84	574
Methan	-183	-162	1,70	2,22	510
Ozon	-193	-113	0,57	0,79	316
Propan	-190	-42,1	1,41	1,59	426
Wasserstoff	-259	-252,8	10,17	14,32	461
Xenon	-112	-108	0,16	0,21	96

Tab. 45: Heizwerte von Brennstoffen (unter Normalbedingungen)

Feste und flüssige Brennstoffe	Durchschnittlicher Heizwert in MJ/kg	Gasförmige Brennstoffe	Durchschnittlicher Heizwert in MJ/m ³
Benzin	41	Ammoniak	14
Braunkohle	12	Butan	124
Diesel	42	Methan	36
Ethanol	27	Propan	94
Heizöl	42	Stadtgas	20
Holz	12	Wasserstoff	11
Petroleum	42		
Steinkohle	30		

Periodensystem der Elemente

Links und Quellen

Online-Skripte und Tutorials

- Duden Physik: Gymnasiale Oberstufe
- Online-Skripte der Universität Göttingen (Mathematik, Physik, Chemie)
- Physik-Seite von Felix Elsenbruch
- Skript zu Atomphysik und Quantenmechanik
- Halbleiter-Infos
- Physik-Wikibooks
- Grundlagen der Akustik Wikibook
- PTB-Broschüre zu den Internationalen Einheiten (SI)

Youtube-Videos

- Physik Videos von „Educational Videos and Lectures“
- The Simple Physics (en.)

Lexika

- Technik-Lexikon
- Schülerlexikon Physik (Duden, Sekundarstufe)

Versuchsbeschreibungen

- Versuchsbeschreibungen Physik (RWTH Aachen)
- Physikalische Experimente und Freihandversuche
- Netexperimente Freihandversuche

Lehrmittelhersteller

- **Spielzeug und Bausätze:** Die folgenden Hersteller bzw. Händler bieten für den Einstieg in die Naturwissenschaften durchaus interessante Versuchsutensilien sowie komplette Experimentiersätze für Kinder.

- Astromedia
- Busch
- Eitech
- Experimentis
- Kids-and-Science
- Opitec

- **„Marken“-Hersteller:** Folgende bekannte Hersteller sind in der höchsten Preiskategorie angesiedelt. Ob die Artikel dann ihr Geld auch wirklich wert sind oder die entsprechenden Experimente nicht auch deutlich einfacher und mit mehr Spaß durchgeführt werden können, kann in vielen Fällen durchaus hinterfragt werden..

- Conatex
- Cornelsen
- Elwe
- Henschke
- Leybold
- NTL
- Phywe

Chemie-Links

- Die Chemie-Schule
- ChemgaPedia (umfangreiche Chemie-Enzyklopädie mit Lehrgängen)
- Netchemie Freihandversuche

Quellenangaben zur Mechanik

Tabellen mit Beispielen für Geschwindigkeiten sind in *[GrossBerhag1979]* (Seite 16) abgedruckt.

Eine ähnliche Graphik wie *Die Gewichtskraft auf der Erde* ist in *[GrossBerhag1979]* (Seite 23) zu finden. Die Werte aus Tabelle *Haft- und Gleitreibungszahlen einiger Stoffe* stammen aus *[Boes1995]* (Seite 43).

Zeichnungen wie *Umkippen eines Körpers* sind in zahlreichen Lehrbüchern zu finden, beispielsweise in *[GrossBerhag1979]* (Seite 66) oder *[Boes1995]* (Seite 41). Übersichten über Trägheitsmomente finden sich beispielsweise in *[Schmidt2003]* (Seite 105) oder *[Harten2007]* (Seite 92).

Der strukturelle Aufbau des Abschnitts *Mechanische Schwingungen* folgt strukturell *[Schmidt2003]*.

Das Dehnungsverhalten von Festkörpern ist auch in *[Harms1994]* (Seite 54f.) beschrieben.

Quellenangaben zur Akustik

Die Graphik *Schallpegel in Dezibel* ist nach *[Neyen2001]* (Seite 9), die Graphik *Isophone Lautstärkepegel* nach der Creative-Commons-Graphik *Isophone* von Raphael Frey entworfen (veröffentlicht im Wikibook: Grundlagen Akustik).

Die Werte aus Tabelle *Schallgeschwindigkeiten in verschiedenen Materialien* stammt von der Seite *Schallgeschwindigkeit* (Wikipedia) und wurde durch Werte aus *[Kuchling2001]* (Seite 641) ergänzt.

Quellenangaben zur Optik

Eine mit Abbildung *Der gekrümmte Spiegel* nahezu identische Graphik ist auch in [Boes1995] (Seite 207) abgedruckt. Zeichnungen zur *Lichtbrechung* und Totalreflexion wie sind in zahlreichen Lehrbüchern zu finden, u.a. [Boes1995] (Seite 213).

Quellenangaben zur Wärmelehre

Der grundlegende Aufbau dieses Abschnitts orientiert sich strukturell an [PhinUe1981]. Die Daten zu den Tabellen *Längenausdehnungskoeffiziente fester Stoffe* und *Volumenausdehnungskoeffiziente flüssiger Stoffe* stammen aus der Seite *Ausdehnungskoeffizient* (Wikipedia).

Quellenangaben zu Elektrizität und Magnetismus

Die Werte von Tabelle *Widerstände von Metalldrähten* sind der Seite *Spezifischer Widerstand* (Wikipedia) entnommen.

Quellenangaben zu Atom- und Kernphysik

Die Grundlage für die Graphik *Mittlere Bindungsenergie je Nukleon* ist das Diagramm *Binding energy curve - common isotopes*, zugänglich über die *Wikimedia Commons*

Die Werte aus der Tabelle *Halbwertszeiten (Beispiele)* stammen aus den Wikipedia-Einträgen der jeweiligen chemischen Elemente.

Quellenangaben zu den Versuchen, Übungsaufgaben und Lösungen

- Versuche zur Mechanik:
Die Idee zu Versuch *Kraft und Verformung* stammt aus [GrossBerhag1979] (Seite 18).
- Versuche und Übungsaufgaben zur Optik:
Die Versuche *Schattenspiel 1* und *Schattenspiel 2* sind in ähnlicher Form auch in [Heepmann1987] (Seite 28) zu finden. Die Idee zu Versuch *Schattenspiel 3* stammt aus [Barth1981] (Seite 27), ist jedoch auch in [Heepmann1987] (Seite 29) erläutert.
- Übungsaufgaben zur Mechanik:
Eine ähnliche Aufgabe wie *kdi04* findet sich in [Lindner1961] (Seite 12). Eine inhaltlich gleichartige Graphik wie bei der Aufgabe *Energie-Erhaltung beim Trampolinspringen* ist in [DornBader1992] (Seite 56) abgedruckt.

Quellenangaben zu den Tabellen

Die Daten aus den Tabellen stammen zum größten Teil aus der *Scholarpedia* und der deutschsprachigen *Wikipedia*. Ergänzt wurden fehlende Werte durch die beiden Nachschlagewerke [Kuchling2001] und [Hammer2002].

Literaturverzeichnis

- [Barth1981] Nikolaus Barth und Diethelm Völcker: Physik ab dem 7. Schuljahr; Teilband Optik, Akustik und Elektrizitätslehre. Hirschgraben-Verlag, Frankfurt am Main, 1981.
- [Boes1995] Frank Boes: Physik – Formeln, Maße, Gesetze. Lingen Verlag, Bergisch Gladbach, 1995.
- [DornBader1992] Friedrich Dorn und Franz Bader: Physik an Gymnasien (Mittelstufe). Schroedel Schulbuchverlag, Hannover, 1992.
- [Gladkowa1975] Rimma Gladkowa u.a.: Physik. Harri Deutsch Verlag, 1975.
- [GrossBerhag1979] Klaus Graeff, Hermann Ruoss, Martin Otter, Rolf Peter Schloot, Hermann Siege, Norbert Berghof, Rolf Hartmann und Jakob Goblet: Physik für die Sekundarstufe 1. Klett-Verlag, Stuttgart 1979.
- [Goetz2004] Hans-Peter Götz: Abiturwissen Physik kompakt. Cornelsen Verlag, Berlin 2004.
- [Hammer2002] Anton Hammer: Physikalische Formeln und Tabellen. Lindauer Verlag, 2002.
- [Harms1994] Volker Harms: Physik für Mediziner und Pharmazeuten. Harms Verlag, 1994.
- [Harten2007] Ulrich Harten: Physik - Einführung für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Springer, 2007.
- [Hellenthal1988] Wolfgang Hellenthal: Physik für Pharmazeuten, Mediziner und Biologen. Thieme Verlag, Stuttgart 1988.
- [Heepmann1987] Bernd Heepmann, Heinz Muckenfuß, Wilhelm Schröder und Leonhard Stiegler: Physik für die Sekundarstufe 1. Cornelsen-Verlag, Berlin, 1987.
- [Kuchling2001] Horst Kuchling: Taschenbuch der Physik. Fachbuchverlag Leipzig, 2001.
- [Lindner1961] Helmut Lindner: Physikalische Aufgaben. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1961.
- [Mortimer2003] Charles E. Mortimer und Ulrich Müller: Das Basiswissen der Chemie. Thieme Verlag, Stuttgart, 2003.
- [Neyen2001] Susanne Neyen: Gut, dass du Ohren hast. Unabhängiges Institut für Umweltfragen, 2001.
- [PhinUe1981] Rudolf Göbel, Eberhard Eichler, Hubert Buscherowsky, Helmut Menschel, Werner Steinrück, Werner Damm und Peter Glatz: Physik in Übersichten. Volk und Wissen Verlag, Berlin, 1981.
- [Schmidt2003] Gerd-Dietrich Schmidt: Lehrbuch Physik – Gymnasiale Oberstufe. Duden Paetec Schulbuchverlag, 2003.

- [Voelcker1984] Diethelm Völcker: Physik in der Mittelstufe 1. Mentor Verlag, München, 1984.
- [Voelcker1986] Diethelm Völcker: Physik in der Mittelstufe 2. Mentor Verlag, München, 1986.
- [Voelcker1988] Diethelm Völcker: Physik in der Mittelstufe 3. Mentor Verlag, München, 1988.
- [Zabel2011] Hartmut Zabel: Kurzlehrbuch Physik. Thieme Verlag, Stuttgart, 2011.
- [Zeitler2007] Jürgen Zeitler, Günter Simon: Physik für Techniker. Hanser Verlag, München, 2007.

Stichwortverzeichnis

Symbols

Übersetzungsverhältnis, 73

A

Adhäsionskraft, 121

Aggregatzustand, 12

Akkomodation, 188

Akustik, 150

Allgemeine Gasgleichung, 238

Allgemeine Gaskonstante, 238

Alpha-Teilchen, 326

Alpha-Zerfall, 326

Amplitude, 129

Anhalteweg, 28

Arbeit, 76

 Beschleunigungsarbeit, 78

 Hubarbeit, 77

 Reibungsarbeit, 77

 Rotationsarbeit, 79

 Spannarbeit, 78

Archimedisches Prinzip, 107

Atom, 311

Atomhülle, 322

Atomkern, 322

Atommodell, 311

 nach Bohr, 313

 nach Dalton, 311

 nach Demokrit, 311

 nach Rutherford, 313

 nach Sommerfeld, 315

 nach Thomson, 312

 Orbitalmodell, 316

 Schalenmodell, 318

Auftriebskraft, 106

Avogadro-Konstante, 239

B

Bandgenerator, 259

Beleuchtungsstärke, 165, 206

Bernoulli-Gleichung, Dynamischer Druck, 110

Beschleunigung, 22

Beschleunigungsarbeit, 78

Bestrahlungsstärke, 204

Beta-Teilchen, 326

Beta-Zerfall, 326

Bewegung, 14

 Geradlinige Bewegung, 15

 Kreisförmige Bewegung, 33

Bewegungsenergie, 85

Blende, 167

Brechkraft, 184

Brechungsgesetz, 175

Bremsformel, 27

Bremsweg, 28

Brennpunkt, 171

Brennweite, 171

Brennwert, 248

C

Candela (Einheit), 203

Carnot-Wirkungsgrad, 250

Celsius (Einheit), 212

Coulomb (Einheit), 258

Coulomb-Kraft, 284

D

Dehnung, 93

Delta-Schreibweise, 16

Dezibel (Einheit), 155

Dichte, 11

Dielektrikum, 289

Dioptrie (Einheit), 184

Doppelspalt, 195

Doppler-Effekt, 159

Drehimpuls, 90

Drehmoment, 56

Drehmomentwandler, 63

Drehzahl, 35

Driftgeschwindigkeit (von Elektronen), 282

Druck, 100

 Dynamischer Druck, 110

 Kolbendruck, 100

Schweredruck, 101
Druckmessung, 103
Druckspannung, 95
Druckwandler, 104
Durchschnittsgeschwindigkeit, 19
Dynamik, 39

E

Einheiten, 3
Elastizität, 43
Elastizitätsmodul, 93
Elektrische Feldstärke, 285
Elektrische Flussdichte, 286
Elektrische Influenz, 287
Elektrische Leitfähigkeit, 272
Elektrischer Dipol, 288
Elektrischer Leitwert, 272
Elektrisches Potential, 266
Elektronen-Einfang, 327
Elektronenhülle, 322
Elektronenvolt (Einheit), 294
Elementarladung, 258
Elementarmagnet, 296
Elongation, 129
Energie, 83
 Energie-Erhaltung, 85
Energieformen, 84
 Elektrische Energie, 273
 Kinetische Energie (Bewegungsenergie), 85
 Potentielle Energie (Höhenenergie), 84
 Rotationsenergie, 85
 Spannenergie, 84
Entropie, 252
Erdbeschleunigung, 23
Erdung, 260
Extinktion, 207

F

Fadenpendel, 134
Fahrenheit (Einheit), 213
Faradayischer Käfig, 287
Farbmischung, 201
 additiv, 201
 subtraktiv, 202
Federkraft, 54
Federpendel, 132
Feldlinien (elektrisch), 285
Feldlinien (magnetisch), 298
Flaschenzug, 67

Freier Fall, 29
Frequenz, 130

G

Gamma-Teilchen, 328
Gamma-Zerfall, 328
Gangunterschied, 147
Geradlinige Bewegung, 15
Geschwindigkeit, 16
 Bahngeschwindigkeit, 36
 Durchschnittsgeschwindigkeit, 19
 Umrechnung von km/h in m/s, 17
 Winkelgeschwindigkeit, 34
Getriebe, 63
Gleichgewicht, 57
Gleitreibung, 52
Gravitation, 50

H

Höhenenergie, 84
Haftreibung, 51
Hagen-Poiseuillesches Gesetz, 114
Halbleiter, 277
 n-Dotierung, 278
 n-p-Übergang, 279
 p-Dotierung, 278
Hauptsätze der Wärmelehre, 246
Hebel, 63
 Einseitiger Hebel, 64
 Winkelhebel, 64
 Zweiseitiger Hebel, 63
Heizwert, 248
Hertz (Einheit), 130
Hubarbeit, 77
Huygensches Prinzip, 194
Hydraulische Anlage, 104

I

Ideales Gas, 236
Impuls, 86
Impulserhaltung, 87
Induktion, 307
Induktionsgesetz von Faraday, 308
Inertialsystem, 44
Influenz, 287
Innere Energie, 247
Interferenz (Licht), 195
Ionisierungsenergie, 296, 322
Isotop, 323

J

Joule (Einheit), 76, 83

K

Körper, 9

Kapazität, 290

Kapillarität, 122

Kelvin (Einheit), 212

Kernladungszahl, 322

Kinematik, 14

Kinetische Energie, 85

Kinetische Gastheorie, 241

Kohärenz, 145

Kompressibilität, 99

Kompression, 98

Kompressionsmodul, 98

Kontinuitätsgleichung, 109

Kraft, 39

 Angriffspunkt, 42

 Gegenkraft, 41

 Wirkungslinie, 42

Kraftübertragung, 43

Kraftaddition, 45

Kraftarten, 49

 Gewichtskraft, 49

 Radialkraft, 55

 Spannkraft, 54

Kraftarten

 Reibungskraft, 51

Kraftstoß, 87

Kraftwandler, 63

 Feste Rolle, 67

 Flaschenzug, 67

 Hebel, 63

 Kurbel, 65

 Lose Rolle, 67

 Schiefe Ebene, 69

 Wellrad, 65

Kraftzerlegung, 48

Kreisförmige Bewegung, 33

L

Ladung, 257

Ladungsnachweis, 260

 Elektroskop, 260

 Glimmlampe, 262

Ladungstrennung, 258

 Bandgenerator, 259

Lambert-Beersches Gesetz, 207

Lautstärke, 158

Leistung, 81

Leistungszahl, 251

Leiter, 276

Lenzsche Regel, 310

Leuchtdichte, 206

Licht, 163

Lichtbeugung, 194

Lichtbrechung, 175

Lichtdispersion, 199

Lichtdurchlässigkeit, 166

Lichtgeschwindigkeit, 164

Lichtquellen, 163

Lichtreflexion, 168

 Diffuse Reflexion, 171

 Direkte Reflexion, 171

Lichtstärke, 165, 205

Lichtstrom, 205

Lorentz-Kraft, 303

Luftfeuchtigkeit, 221

Luftwiderstand, 54

Lumen (Einheit), 205

Lux (Einheit), 206

M

Mach-Kegel, 161

Magnet, 296

 Elektromagnet, 299

 Permanentmagnet, 296

Magnetfeld, 297

 einer Spule, 301

 eines geraden Leiters, 299

 eines Stabmagneten, 298

Magnetische Feldstärke, 302

Magnetische Flussdichte, 302

Magnetische Influenz, 297

Magnetismus, 296

Masse, 9

Masse (Elektrizität), 267

Masse (Körpereigenschaft), 9

Massendefekt, 324

Massenpunkt, 14

Massenzahl, 322

Mathematisches Pendel, 134

Mechanik, 8

Messfehler, 7

Millikan-Experiment, 291

Mischungsvorgang, 216
Molare Masse, 239
Monochromator, 206

N

Newtonsche Flüssigkeit, 115
Newtonsche Gesetze, 39
 Kraft und Gegenkraft, 41
 Kraftgesetz, 40
 Trägheitsgesetz, 39
Nit (Einheit), 206
Normalbedingungen, 238
Normalvolumen, 238
Nukleon, 321
Nuklid, 322
Nullpotential, 267

O

Oberschwingung, 147
Ohmsches Gesetz, 270
Optik, 162
Optische Achse, 171
Optische Linse, 180
Optisches Gitter, 198
Orbital, 316
 d-Orbital, 318
 f-Orbital, 318
 p-Orbital, 318
 s-Orbital, 317
Orientierungspolarisation, 288
Ortsfaktor, 50

P

Partialdruck, 240
Pauli-Prinzip, 317
Phasenübergang, 217
 Schmelzen und Erstarren, 217
 Sieden und Kondensieren, 219
 Verdunsten, 221
Phasendiagramm, 223
Phon (Einheit), 159
Photometrie, 201
Physikalische Stromrichtung, 264
Physikalisches Pendel, 135
Plattenkondensator, 285
Poisson-Zahl, 94
Positron, 327
Potentielle Energie, 84
Prinzip von D'Alembert, 45

Prisma, 179

Q

Quantenzahl, 316
 Hauptquantenzahl, 317
 Magnetquantenzahl, 317
 Nebenquantenzahl, 317
 Spinquantenzahl, 317
Querkontraktion, 94

R

Radialbeschleunigung, 36
Radialkraft, 55
Radioaktive Strahlung, 325
 Alpha-Strahlung, 326
 Beta-Strahlung, 326
 Gamma-Strahlung, 328
Radioaktivität, 324
Randwinkel, 121
Raumkurve, 14
Reibung, 51
 Gleitreibung, 52
 Haftreibung, 51
 Rollreibung, 53
Reibungsarbeit, 77
Relativgeschwindigkeit, 20
Resonanz, 131
Reynolds-Zahl, 117
Richtgröße, 135
Rollreibung, 53
Rotation, 33
Rotationsenergie, 85

S

Schall, 151
 Schallfrequenz, 152
 Schallgeschwindigkeit, 151
 Schallintensität, 155
 Schallpegel, 155
 Schallquelle, 151
Schatten, 166
 Halbschatten, 167
 Kernschatten, 167
 Schlagschatten, 167
Scheinkraft, 44
Scheitelpunkt, 171
Scherspannung, 97
Scherung, 97
Schmelzwärme, 218

Schubmodul, 97
 Schwarzer Körper, 230
 Schwebung, 143
 Schwerpunkt, 57
 Schwingung, 127

- erzwungen, 131
- gedämpft, 130
- resonant, 131

 Schwingungsdauer, 130
 SI-Einheiten, 4
 Siemens (Einheit), 272
 Spannenergie, 84
 Spannung (elektrisch), 265

- Gleichspannung, 267
- Wechselspannung, 268

 Spannung (mechanisch), 93
 Spektrometer, 206
 Spiegel, 168

- Ebener Spiegel, 169
- Hohlspiegel, 174
- Wölbspiegel, 172

 Sprödigkeit, 93
 Standfestigkeit, 59
 Statischer Druck, 101
 Stauchung, 95
 Stefan-Boltzmann-Gesetz, 230
 Stehende Welle, 147
 Steifigkeit, 99
 Stoßprozesse, 87

- elastisch, 87
- unelastisch, 89

 Stoffmenge, 239
 Strömung, 114

- laminare Strömung, 114
- turbulente Strömung, 117

 Strömungswiderstand, 54
 Strahldichte, 204
 Strahlstärke, 204
 Strahlungsfluss, 204
 Stromdichte, 265
 Stromstärke, 263
 Superpositionsprinzip, 143
 System, 210

- geschlossen, 210
- isoliert, 210
- offen, 210

T

Technische Stromrichtung, 264
 Temperatur, 210
 Temperaturbeiwert, 276
 Tesla (Einheit), 302
 Thermische Strahlung, 229
 Thermometer, 211
 Torsion, 98
 Trägheitskraft, 45
 Trajektorie, 14

V

Valenzelektron, 321
 Van-der-Waals-Gleichung, 241
 Verdampfungswärme, 220
 Verformung, 43

- elastisch, 43
- plastisch, 43

 Verschiebungspolarisation, 287
 Verschiebungspolarisation, 289
 Viskosimeter, 113
 Viskosität, 111
 Volumen, 10
 Volumenstrom, 109

W

Wärme, 210
 Wärmeübertragungskoeffizient, 229
 Wärmeausdehnung, 231

- von Festkörpern, 231
- von Flüssigkeiten, 233
- von Gasen, 235

 Wärmekapazität, 213
 Wärmeleitung, 225
 Wärmeströmung, 228
 Wärmestrahlung, 229
 Watt (Einheit), 81
 Welle (mechanisch), 139
 Wellenformel, 141
 Wellenfront, 194
 Wellengleichung, 132
 Wellrad, 65
 Widerstand, 269

- Halbleiter, 277
- Isolator, 280
- Leiter, 276
- Spezifischer Widerstand, 270

 Wiedemann-Franz'sches Gesetz, 225

Wiensches Verschiebungsgesetz, 230

Winkelbeschleunigung, 37

Winkelgeschwindigkeit, 34

Wirkungsgrad, 80

Z

Zahnrad, 73

Zahnstange, 74

Zehnerpotenzen, 4

Zentrifugalkraft, 55

Zentripetalkraft, 55

Zugspannung, 93

Zustandsänderung, 237

 isobar, 237

 isochor, 237

 isotherm, 238

Zustandsgleichung, 236